Stage de DEA Système intelligent et applications. Manipulabilité des opérateurs de fusion de croyances.

Patricia Everaere

12 septembre 2003

Remerciements

Ce stage a été réalisé au CRIL CNRS FRE 2499 sous la direction de S. Konieczny, Chercheur CNRS à l'IRIT Toulouse, et de P. Marquis, Professeur à l'Université d'Artois. Je tiens à les remercier particulièrement tous les deux pour le temps qu'ils m'ont consacré lors des réunions, et aussi pour les relectures de mon rapport. Leurs remarques et leurs conseils ont très largement contribué à ce travail.

Je voudrais également remercier mes collègues de l'IUT de Lens, S.Coste, O.Roussel, V.Vidal, G.Audemard et A.Chmeiss pour leur aide précieuse dans l'utilisation de LaTeX.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

La fusion d'informations répond à un besoin usuel d'agréger les données fournies par différents agents. Ces informations peuvent coder par exemple des connaissances d'experts, et le but de la fusion est alors de déterminer l'ensemble des connaissances obtenues en combinant celles de chaque expert. Elles peuvent également correspondre aux préférences ou aux buts de différents individus, et la fusion de ces préférences permet alors de déterminer quel monde correspond le mieux aux désirs collectifs. De nombreuses autres interprétations de ces informations sont encore possibles.
En général, le système obéit à des règles fixes indépendantes des informations fournies par chaque agent (comme des contraintes physiques, ou des lois générales), nous nous sommes donc intéressés à une fusion de croyances permettant la prise en compte de ces normes par l'introduction de contraintes d'intégrité [Kon00]. Ces opérateurs de fusion avec contraintes d'intégrité sont les opérateurs de fusion les plus généraux, puisqu'on retrouve les opérateurs usuels sans contrainte en supposant que la contrainte est égale à vrai.
Dans la suite, nous nous intéressons à la fusion d'informations représentées par des formules de la logique propositionnelle. Les opérateurs de fusion considérés ne dépendant que de ces formules, nous ferons abstraction de ce que ces formules expriment (croyances ou préférences) ; pour des raisons de commodité de présentation, nous parlerons désormais de fusion de croyances.
Les opérateurs de fusion de croyances permettent de déterminer les croyances d'un groupe d'agents à partir de leurs croyances individuelles. Ces opérateurs sont indispensables pour un grand nombre d'applications où l'on doit combiner un ensemble d'informations contradictoires provenant de sources différentes comme les bases de données distribuées, les systèmes multi-agents ou les systèmes d'informations distribués en général.

Le processus de fusion permet donc d'obtenir une information cohérente à partir d'un ensemble d'informations contradictoires, mais également de faire surgir des croyances qu'aucune des informations initiales ne permet d'inférer. Par exemple, si une des sources d'informations sait que a est vrai et qu'une autre source sait que $a \rightarrow b$, alors l'information synthétisée sait que b est vrai alors qu'aucune des deux sources ne le sait. Ce type de croyance a été appelé *croyance implicite* dans [Kon99].

De nombreux opérateurs de fusion avec contraintes d'intégrité existent [Kon00]. Nous nous sommes plus particulièrement posés la question de leur manipulabilité. La manipulabilité d'un opérateur Δ représente *la possibilité qu'un agent modifie à son avantage le résultat de la fusion par* Δ, en mentant sur ce qu'il déclare être ses croyances. Cette possibilité est un défaut de l'opérateur, puisqu'il paraît plus sage qu'une fusion prenne en compte de façon équitable les croyances de chaque agent, sans que l'un d'entre eux n'ait intérêt à tricher. En effet, en cas de manipulabité de l'opérateur de fusion, le problème devient alors un jeu entre les agents, puisque chacun doit alors chercher le meilleur coup (i.e. la meilleure base de croyance annoncée) possible pour maximiser son intérêt. Ce n'est évidemment pas le but recherché par la plupart des applications utilisant la fusion de croyances, qui désirent découvrir quelle est la croyance commune d'un groupe d'agents. Le même type de problèmes ce pose en théorie du choix social en ce qui concerne les méthodes de vote (voir par exemple [Arr63, Mou88, Gib73, Sat75]). Il est d'autant plus pregnant en ce qui concerne la fusion de croyances, car si dans le cas du vote, on peut compter sur les capacités de calcul limitées des individus, ce n'est pas le cas dans le cadre de la fusion de croyances ou les agents concernés seront souvent des agents logiciels aux capacités de calcul largement suffisantes pour pouvoir affronter ce "jeu" si cela est nécessaire. Un des buts de cette étude est donc de déterminer quels sont les opérateurs manipulables, dans quelles circonstances, et d'étudier les possibilités de restreindre ou de compliquer la manipulation lorsqu'elle est possible.
Après quelques rappels généraux sur les opérateurs de fusion avec contraintes d'intégrité et sur la manipulabilité dans le chapitre 2, nous définissons les opérateurs que nous avons étudiés du point de vue de la manipulabilité, ainsi que les indices de satisfaction utilisés (chapitre 3), ces indices codant la satisfaction relative d'un agent par rapport au résultat d'une fusion. Puis, dans le chapitre 4, nous donnons les résultats de manipulabilité pour les différentes familles d'opérateurs de fusion. Dans le chapitre 5, nous définissons une nouvelle famille d'opérateurs de fusion avec contraintes d'intégrité, les opérateurs de fusion avec quota, qui présentent de bonnes caractéristiques tant au niveau des propriétés logiques et calculatoires que de la manipulabilité. Enfin, dans la conclusion, nous faisons le bilan des résultats obtenus et l'inventaire de quelques perspectives de continuation.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Notations

Nous avons essayé de regrouper dans ce paragraphe toutes les notations que nous avons introduites et utilisées au cours de cette étude, afin qu'un lecteur perdu en cours de lecture puisse y retrouver leur sens.

On considère un langage propositionnel $\mathcal{L}$ sur un alphabet fini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles. Une interprétation est une fonction de $\mathcal{P}$ vers $\{0, 1\}$. $\top$ dénote la constante booléenne vraie et $\perp$ la constante faux. L'ensemble de toutes les interprétations est noté Ω.
Etant donné un langage propositionnel contenant quatre variables a, b, c, d, on notera 0010 l'interprétation qui affecte les valeurs de vérité faux, faux, vrai, faux respectivement aux variables propositionnelles a, b, c, et d. Une interprétation ω est un modèle d'une formule φ, noté $\omega \models \varphi$, si et seulement si elle rend cette formule vraie. Soit φ une formule, $mod(\varphi)$ représente l'ensemble des modèles de φ, c'est-à-dire $mod(\varphi) = \{\omega \in \Omega, \omega \models \varphi\}$ ($\models$ dénote la déduction logique) et $\equiv$ dénote l'équivalence logique.

Définition 1 *Une contrainte d'intégrité μ est une formule cohérente.*

Définition 2 *Une base de croyances K est un ensemble fini et cohérent de formules propositionnelles, interprété conjonctivement.*

Par commodité, on notera $[K]$ pour $mod(K)$.

Définition 3 *Soient $K_1, \ldots, K_n$ n bases de croyances (non nécessairement différentes), on appelle ensemble de croyances le multi-ensemble E constitué de ces n bases de croyances : $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$.*

On note $\bigwedge E$ la conjonction des bases de croyances de E, c'est-à-dire $\bigwedge E = K_1 \wedge \ldots \wedge K_n$. On dit que l'ensemble de croyances E est cohérent, si $\bigwedge E$ est cohérent. L'union sur les multi-ensembles sera notée $\sqcup$. Par abus d'écriture, si K est une base de croyances, K dénotera aussi l'ensemble de croyances singleton $E = \{K\}$.

Soit un entier strictement positif n, on notera E^n le multi-ensemble composé de n fois le multi-ensemble E : $E^n = \{\underbrace{E, \ldots, E}_{n}\}$.

Etant donné un ensemble fini F, on notera $|F|$ le cardinal de F, c'est-à-dire le nombre d'éléments de F.

Un pré-ordre $\leq$ sur un ensemble A est une relation binaire sur A qui est réflexive et transitive. Etant donné un pré-ordre $\leq$, on notera $<$ le pré-ordre strict associé défini par : $\omega < \omega'$ ssi $\omega \leq \omega'$ et $\omega \neq \omega'$. Etant donné un ensemble A muni d'un pré-ordre $\leq$, on peut définir l'ensemble des éléments minimaux a de A par $min(A, \leq) = \{a \in A \mid \nexists b, b < a\})$.

Enfin, pour alléger les notations lors de la manipulation d'un opérateur de fusion Δ, et s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'opérateur utilisé, on notera $E \triangle K$ pour $\Delta(E \sqcup \{K\})$.

2.2 Fusion d'informations

Dans ce travail, nous avons utilisé la définition des opérateurs de fusion avec contraintes introduite dans [KP99], plus générale que celle des opérateurs de fusion classique. Ici, la ou les contraintes représente une donnée sur laquelle tous les agents sont d'accord, ou qui est indépendante de leurs croyances (une loi physique ou une réglementation, par exemple).

Une base de croyances K représente les croyances d'un agent (d'une source). Un ensemble de croyances E représente un groupe d'agents.

Le but des opérateurs de fusion est, à partir des croyances des agents et des contraintes particulières du système (contraintes physiques, réglementations, etc), de déterminer les croyances du groupe.

Définition 4 *Un opérateur de fusion $\triangle$ est une application qui, à un ensemble de croyances E et à une formule μ représentant les contraintes d'intégrité du système, associe une base de croyances, notée $\triangle_\mu(E)$, représentant les croyances du groupe d'agents.*

Parmi les propriétés logiques que l'on peut souhaiter pour un opérateur de fusion se trouvent les propriétés suivantes [KP99, Kon99] :

Définition 5 $\triangle$ *est un opérateur de* fusion contrainte *si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes :*

(IC0) $\triangle_\mu(E) \models \mu$

(IC1) *Si μ est cohérent, alors $\triangle_\mu(E)$ est cohérent*

(IC2) *Si E est cohérent avec μ, alors $\triangle_\mu(E) = \bigwedge E \wedge \mu$*

(IC3) *Si $E_1 \equiv E_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\triangle_{\mu_1}(E_1) \equiv \triangle_{\mu_2}(E_2)$*

(IC4) *Si* $K \models \mu$ *et* $K' \models \mu$, *alors* $\triangle_\mu(K \sqcup K') \wedge K \not\models \perp \Rightarrow \triangle_\mu(K \sqcup K') \wedge K' \not\models \perp$

(IC5) $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2) \models \triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2)$

(IC6) *Si* $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2)$ *est cohérent, alors* $\triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2) \models \triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2)$

(IC7) $\triangle_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$

(IC8) *Si* $\triangle_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ *est cohérent, alors* $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \triangle_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$

On peut expliquer (voir [Kon00]) la signification intuitive de ces propriétés de la manière suivante :
(IC0) assure que les contraintes d'intégrité sont satisfaites par la fusion.
(IC1) dit que si les contraintes d'intégrité sont cohérentes alors le résultat de la fusion est cohérent, c'est-à-dire que l'on peut toujours extraire des croyances cohérentes du groupe d'agents.
(IC2) demande que, lorsque c'est possible, le résultat de la fusion soit simplement la conjonction des bases de croyances et des contraintes d'intégrité. Donc, lorsqu'il n'y a pas de conflit entre les agents et les contraintes, la fusion est simplement l'union des différentes bases de croyances.
(IC3) est le principe d'indépendance par rapport à la syntaxe, c'est-à-dire que le résultat de la fusion ne dépend pas de la forme syntaxique des croyances mais simplement des opinions exprimées.
(IC4) est la propriété d'équité. Elle assure que lorsque l'on fusionne l'opinion de deux agents, l'opérateur ne doit pas donner de préférence à l'un d'eux.
(IC5) exprime l'idée suivante : si un groupe E_1 se met d'accord sur un ensemble d'alternatives qui contient l'alternative A, et si un autre groupe E_2 se met d'accord sur un autre ensemble d'alternatives qui contient également A, alors si l'on joint les deux groupes, A fera encore partie des alternatives acceptables.
(IC5) et (IC6) ensemble, expriment le fait que, dès que l'on peut trouver deux sous-groupes qui s'accordent sur au moins une alternative, alors le résultat de la fusion sera exactement l'ensemble des alternatives sur lesquelles ces deux groupes s'accordent.
(IC7) et (IC8) expriment des conditions sur les conjonctions de contraintes d'intégrité et s'assurent de ce fait que la notion de *proximité* est bien fondée. Cela signifie, par exemple, que si une alternative A est préférée parmi un ensemble d'alternatives possibles et si on restreint le nombre d'alternatives possibles tout en gardant l'alternative A, celle-ci sera toujours préférée parmi les alternatives restantes.

Deux sous-classes d'opérateurs de fusion, les opérateurs de fusion majoritaires et les opérateurs d'arbitrage, ont également été proposées [KP99].

Définition 6 *Un opérateur de* fusion majoritaire *est un opérateur de fusion contrainte qui satisfait la propriété suivante :*

(Maj) $\exists n \ \triangle_\mu (E_1 \sqcup E_2^n) \models \triangle_\mu(E_2)$

Ce postulat exprime le fait que si une opinion a une large audience, ce sera alors l'opinion du groupe. On peut remarquer que cette propriété est très générale. Elle ne dit pas exactement le nombre de répétitions nécessaires d'un ensemble de croyances pour s'imposer (cela dépend de l'opérateur), mais elle impose l'existence d'un tel seuil. Les opérateurs de fusion majoritaire tentent donc de satisfaire au mieux le groupe dans son ensemble. D'un autre côté, les opérateurs d'arbitrage tentent de satisfaire chacun des éléments du groupe pris individuellement du mieux possible.

Définition 7 *Un* opérateur d'arbitrage *est un opérateur de fusion contrainte qui satisfait la propriété suivante :*

$$\textbf{(Arb)} \quad \left.\begin{array}{l} \triangle_{\mu_1}(K_1) \equiv \triangle_{\mu_2}(K_2) \\ \triangle_{\mu_1 \equiv \neg \mu_2}(K_1 \sqcup K_2) \equiv (\mu_1 \equiv \neg \mu_2) \\ \mu_1 \not\models \mu_2 \\ \mu_2 \not\models \mu_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(K_1 \sqcup K_2) \equiv \triangle_{\mu_1}(K_1)$$

Ce postulat stipule que si un ensemble d'alternatives préférées sous un ensemble de contraintes d'intégrité μ_1 pour une base de croyances K_1 correspond à l'ensemble des alternatives préférées par la base K_2 sous les contraintes μ_2, et si les alternatives qui n'appartiennent qu'à une des deux contraintes d'intégrité sont toutes aussi crédibles pour le groupe $(K_1 \sqcup K_2)$, alors les alternatives préférées pour le groupe parmi la disjonction des deux ensembles de contraintes sont celles préférées par chacune des bases sous leurs contraintes respectives. Ce postulat exprime le fait que ce sont les alternatives médianes qui sont favorisées.

Dans l'article [KP99] , on trouve également un théorème de représentation qui permet de caractériser ces opérateurs de manière plus constructive. Ce théorème montre qu'un opérateur de fusion contrainte correspond à une famille de pré-ordres sur les interprétations.

Définition 8 *Un* assignement syncrétique *est une fonction qui associe à chaque ensemble de croyances E un pré-ordre $\leq_E$ sur Ω telle que pour tous les ensembles de croyances E, E_1, E_2 et pour toutes les bases de croyances K, K' les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Si $\omega \models E$ et $\omega' \models E$, alors $\omega \simeq_E \omega'$*
2. *Si $\omega \models E$ et $\omega' \not\models E$, alors $\omega <_E \omega'$*
3. *Si $E_1 \equiv E_2$, alors $\leq_{E_1} = \leq_{E_2}$*
4. $\forall \omega \models K \ \exists \omega' \models K' \ \omega' \leq_{K \sqcup K'} \omega$
5. *Si $\omega \leq_{E_1} \omega'$ et $\omega \leq_{E_2} \omega'$, alors $\omega \leq_{E_1 \sqcup E_2} \omega'$*
6. *Si $\omega <_{E_1} \omega'$ et $\omega \leq_{E_2} \omega'$, alors $\omega <_{E_1 \sqcup E_2} \omega'$*

Un *assignement syncrétique majoritaire* est un assignement syncrétique qui satisfait la condition suivante :

7. Si $\omega <_{E_2} \omega'$, alors $\exists n\ \omega <_{E_1 \sqcup E_2{}^n} \omega'$

Un *assignement syncrétique juste* est un assignement syncrétique qui satisfait la condition suivante :

8. $\left.\begin{array}{l} \omega <_{K_1} \omega' \\ \omega <_{K_2} \omega'' \\ \omega' \simeq_{K_1 \sqcup K_2} \omega'' \end{array}\right\} \Rightarrow \omega <_{K_1 \sqcup K_2} \omega'$

Nous pouvons à présent énoncer un théorème de représentation pour les opérateurs de fusion contrainte [KP99, Kon99] :

Proposition 1 *Un opérateur $\triangle_\mu$ est un opérateur de fusion contrainte (respectivement un opérateur majoritaire ou un opérateur d'arbitrage) si et seulement si il existe un assignement syncrétique (respectivement un assignement syncrétique majoritaire ou un assignement syncrétique juste) qui associe à chaque ensemble de croyances E un pré-ordre total $\leq_E$ tel que*

$$mod(\triangle_\mu(E)) = \min(mod(\mu), \leq_E)$$

Ce théorème présente plusieurs avantages. Tout d'abord, il est souvent beaucoup plus simple de vérifier qu'un opérateur de fusion vérifie les conditions des assignements syncrétiques plutôt que de vérifier directement les propriétés logiques. Ensuite, le fait qu'un opérateur corresponde à une famille de pré-ordres (un pré-ordre par ensemble de croyances), peut donner des idées pour concevoir de nouveaux opérateurs. En particulier, beaucoup d'opérateurs sont définis de la sorte, en utilisant une fonction qui associe un pré-ordre à l'ensemble de croyances passé en paramètre. C'est le cas des opérateurs basés sur des distances dont nous rappelerons la définition au chapitre 3.

2.3 Manipulabilité

La manipulabilité est une notion qui a fait l'objet d'une recherche active en théorie du choix social, particulièrement dans la théorie du vote (voir par exemple [Mou88, Arr63]). L'idée est assez simple : est-il possible qu'un agent, en supposant qu'il connaît l'opérateur de fusion utilisé et les croyances $K_1, K_2, ..., K_n$ des autres agents, modifie ce qu'il déclare être ses croyances K de manière à améliorer le résultat de son point de vue ? Si la réponse à cette question est oui, on dit que l'opérateur est manipulable. Intuitivement, on peut donc dire qu'il y a manipulabilité d'un opérateur de fusion si on peut trouver un ensemble de croyances $E = \{K_1, K_2, ..., K_n\}$, une contrainte d'intégrité μ, deux ensembles de croyance K et K' tels que le résultat de la fusion de E et K' est meilleur pour l'agent dont les croyances sont K que le résultat de la fusion de E avec K. Il faut également avoir un moyen de "mesurer" la satisfaction d'un agent par rapport au résultat d'une fusion, pour savoir quand un résultat est meilleur qu'un autre. Nous avons donc besoin de définir une notion d'indice de satisfaction.

Définition 9 (indice de satisfaction)
Un indice de satisfaction i est une fonction calculable de $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous pouvons à présent définir formellement la notion d'opérateur manipulable.

Définition 10 (opérateur manipulable)
Un opérateur de fusion contrainte Δ est manipulable *pour un indice de satisfaction i ssi il existe une contrainte d'intégrité μ, un ensemble de croyances $E = \{K_1, K_2, ...K_n\}$, une base de croyances K et une base de croyances K' telle que*

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) > i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})).$$

On peut également considérer des restrictions de cette notion générale : que devient la manipulabilité si l'agent manipulateur ne peut mentir que sur l'ensemble de ses modèles (mondes les plus préférés) ou sur l'ensemble de ses contre-modèles (mondes les moins préférés), mais pas les deux à la fois ? On obtient alors, parmi les opérateurs manipulables, ceux pour lesquels la manipulation consiste seulement à faire passer des contre-modèles pour des modèles (d-manipulation), c'est-à-dire à remplacer K par une base logiquement plus faible ; ou alors seulement des modèles pour des contre-modèles (e-manipulation), c'est-à-dire à remplacer K par une base logiquement plus forte.

Définition 11 (opérateur d-manipulable)
Un opérateur de fusion contrainte Δ est manipulable par dilatation (d-manipulable) *pour un indice de satisfaction i ssi il existe une contrainte d'intégrité μ, un ensemble de croyances E, une base de croyances K et une base de croyances K' telle que $K \models K'$ et*

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) > i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})).$$

Définition 12 (opérateur e-manipulable)
Un opérateur de fusion contrainte Δ est manipulable par érosion (e-manipulable) *pour un indice de satisfaction i ssi il existe une contrainte d'intégrité μ, un ensemble de croyances E, une base de croyances K et une base de croyances K' telle que $K' \models K$ et*

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) > i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})).$$

On définit alors les notions d'opérateurs de fusion manipulables par une base de croyances pour un ensemble de croyances, une contrainte d'intégrité un indice de satisfaction donnés :

Définition 13 (fusion manipulable par une base)
Soit Δ *un opérateur de fusion contrainte manipulable pour un indice de satisfaction* i*, soit* E *un ensemble de croyances et soit* μ *une contrainte d'intégrité.* Δ *est* manipulable *par une base de croyances* K *étant donnés* i, E, μ *ssi il existe une base de croyances* K' *telle que*

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) > i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})).$$

Par abus de langage, on dira que K est une base manipulable étant donné Δ, i, E, μ .

Définition 14 (fusion d-manipulable par une base)
Soit Δ *un opérateur de fusion contrainte d-manipulable pour un indice de satisfaction* i*, soit* E *un ensemble de croyances et soit* μ *une contrainte d'intégrité.* Δ *est* d-manipulable *par une base de croyances* K *étant donnés* i, E, μ *ssi il existe une base de croyances* K' *telle que* $K \models K'$ *et*

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) > i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})).$$

Par abus de langage, on dira que K est une base d-manipulable étant donné Δ, i, E, μ .

Définition 15 (fusion e-manipulablepar une base)
Soit Δ *un opérateur de fusion contrainte e-manipulable pour un indice de satisfaction* i*,soit* E *un ensemble de croyances et soit* μ *une contrainte d'intégrité.* Δ *est* e-manipulable *par une base de croyances* K *étant donnés* i, E, μ *ssi il existe une base de croyances* K' *telle que* $K' \models K$ *et*

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) > i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})).$$

Par abus de langage, on dira que K est une base e-manipulable étant donné Δ, i, E, μ .

Chapitre 3

Opérateurs de fusion et indices étudiés

3.1 Quelques opérateurs de fusion

Nous rappelons dans cette partie la définition de deux familles d'opérateurs très étudiées dans la littérature.

3.1.1 Opérateurs basés sur une distance

La première famille d'opérateurs est basée sur une notion de distance d entre interprétations et ensembles de croyances. On définit alors :

$$\omega \leq_E \omega' \text{ ssi } d(\omega, E) \leq d(\omega', E)$$

Pour définir la distance entre une interprétation et un ensemble de croyances, on commence usuellement par définir une distance entre interprétations. Intuitivement une telle distance $d(\omega, \omega')$ indique à quel point un monde possible (une interprétation) ω' est crédible lorsque l'on se trouve dans le monde ω.

Définition 16 *Une pseudo-distance entre interprétations est une application*

$d\ : \Omega \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^+$ *telle que :*

- $d(\omega, \omega') = d(\omega', \omega)$, et
- $d(\omega, \omega') = 0$ ssi $\omega = \omega'$.

Définition 17 *Une distance entre interprétations est une pseudo-distance qui vérifie l'inégalité triangulaire :*

$$\forall \omega, \omega', \omega'' \in \Omega, d(\omega, \omega') \leq d(\omega, \omega'') + d(\omega'', \omega').$$

Nous utiliserons dans ce travail deux distances entre interprétations couramment utilisées. D'abord, la distance de Dalal [Dal88], notée d_h, qui est la distance de Hamming entre les interprétations, soit le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations considérées diffèrent.

Ensuite la distance drastique, notée d_D, qui est la distance la plus simple qu'on peut définir entre deux interprétations. Elle vaut 0 si les deux interprétations sont égales, et 1 sinon.

Toute distance entre interprétations induit de manière naturelle une distance entre une interprétation et une base de croyances K, *chaque base K étant considérée comme la conjonction des formules qu'elle contient :*

$$d(\omega, K) = min_{\omega' \models K} d(\omega, \omega').$$

Enfin, pour définir la distance d'une interprétation ω à un ensemble de croyances $E = \{K_1, K_2, ..., K_n\}$, on utilise une fonction f, qui nous permet d'agréger les distances de ω à chaque K_i (voir [KLM01]) :

$$d(\omega, E) = f_{\{K \in E\}}(d(\omega, K)).$$

On se focalisera sur les fonctions d'agrégation respectant la définition suivante :

Définition 18 (fonction d'agrégation) *Soit f une application associant un entier positif à tout tuple fini d'entiers et telle que :*
- *f est non décroissante en chaque argument :*
  si $x \leq y$, alors $f(x_1, ..., x, ..., x_n) \leq f(x_1, ..., y, ..., x_n)$
- *Pour tout tuple d'entiers positifs $(x_1, ..., x_n)$:*
  $f(x_1, ..., x_n) = 0$ ssi $x_1 = ... = x_n = 0$.
- *Pour tout entier positif x, $f(x) = x$.*

f est appelée fonction d'agrégation.

On obtient, en considérant de telles fonctions d'agrégation f(voir [KLM01]), un assignement syncrétique [1] et, d'après le théorème de représentation donné au chapitre 1 (proposition 1) , un opérateur de fusion contrainte vérifiant les postulats de la définition 5.

On notera $\Delta^{d,f}$ les opérateurs de fusion obtenus à partir d'une distance ou d'une pseudo-distance d entre interprétations et d'une fonction d'agrégation f, et Δ^f si la pseudo-distance n'est pas précisée (i.e. peut être quelconque).

Nous allons définir deux familles d'opérateurs de fusion contraintes très utilisés [KLM01, KP99], qui diffèrent par les fonctions d'agrégation employées.

[1] En fait, on peut se contenter d'une pseudo-distance entre interprétations pour définir un pré-ordre syncrétique lié à l'ensemble de croyances E, en procédant de la même manière.

1. La famille $\Delta^{G_{max}}$ [KP99, Kon99] est une famille d'opérateurs d'arbitrage.

   Définition 19 *Soit un ensemble de croyances $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$. Pour chaque interprétation $\omega \in \Omega$ on construit la liste $(d_1^\omega, \ldots, d_n^\omega)$ des distances entre cette interprétation et les n bases de l'ensemble de croyances, c'est-à-dire que $d_j^\omega = d(\omega, K_j)$. Soit L_ω^E la liste obtenue en triant $(d_1^\omega, \ldots, d_n^\omega)$ dans l'ordre décroissant. Soit $\leq_{lex}$ l'ordre lexicographique sur les listes d'entiers. On obtient alors le pré-ordre suivant :*

   $$\omega \leq_E^{d,G_{max}} \omega' ssi \;\; L_\omega^E \leq_{lex} L_{\omega'}^E$$

   Et l'opérateur $\Delta^{d,G_{max}}$ est défini par :

   $$mod(\Delta_\mu^{d,G_{max}}(E)) = min(mod(\mu), \leq_E^{d,G_{max}})$$

2. La famille Δ^Σ [KP99, Kon99] donne une famille d'opérateurs majoritaires :

   Définition 20 *Soient un ensemble de croyances E et une interprétation ω, la distance entre l'interprétation et l'ensemble de croyances est :*

   $$d_{d,\Sigma}(\omega, E) = \sum_{K \in E} d(\omega, K)$$

   On obtient alors le pré-ordre suivant :

   $$\omega \leq_E^{d,\Sigma} \omega' \;\;\; ssi \;\; d_{d,\Sigma}(\omega, E) \leq d_{d,\Sigma}(\omega', E)$$

   Et l'opérateur $\Delta^{d,\Sigma}$ est défini par :

   $$mod(\Delta_\mu^{d,\Sigma}(E)) = \min(mod(\mu), \leq_E^{d,\Sigma})$$

On obtient *a priori* quatre opérateurs en considérant les distances d_D et d_h, et les fonctions d'agrégation G_{max} et Σ. En fait, on peut voir assez facilement que $\Delta^{d_D,G_{max}}$ et $\Delta^{d_D,\Sigma}$ coïncident. Nous allons illustrer le fonctionnement de ces opérateurs sur un exemple.

Exemple : On considère quatre bases de croyances représentées par leur modèles, c'est-à-dire les mondes préférés des quatre agents 1, 2, 3 et 4 définies par : $mod(K_1) = \{0011, 0000, 0100\}$, $mod(K_2) = \{0110, 1110\}$, $mod(K_3) = \{0000, 1111\}$ et $mod(K_4) = \{0101, 1110, 0011\}$. On note E l'ensemble de croyances $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$, la contrainte d'intégrité μ est $\neg(a \wedge \neg b)$, où a, b, c, d sont les quatre variables propositionnelles utilisées.

Dans le tableau 3.1, on trouve les résultats obtenus avec la distance drastique. Les interprétations qui ne satisfont pas la contrainte sont grisées.

ω	$d_D(\omega, K_1)$	$d_D(\omega, K_2)$	$d_D(\omega, K_3)$	$d_D(\omega, K_4)$	$\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}(E)$	$\Delta_\mu^{d_D,G_{max}}(E)$
0000	**0**	**1**	**0**	**1**	**2**	$(\mathbf{1,1,0,0})$
0001	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
0010	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
0011	**0**	**1**	**1**	**0**	**2**	$(\mathbf{1,1,0,0})$
0100	0	1	1	1	3	$(1,1,1,0)$
0101	1	1	1	0	3	$(1,1,1,0)$
0110	1	0	1	1	3	$(1,1,1,0)$
0111	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
1000	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
1001	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
1010	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
1011	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
1100	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
1101	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
1110	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	$(\mathbf{1,1,0,0})$
1111	1	1	0	1	3	$(1,1,1,0)$

TAB. 3.1 – Distance drastique.

Dans les deux dernières colonnes, on trouve la distance de l'interprétation à l'ensemble $E = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$. Les modèles de $\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}(E)$ et de $\Delta_\mu^{d_D,G_{max}}(E)$ sont $0000, 0011, 1110$ qui sont indiqués en gras.

Si on considérait à présent la contrainte $\mu' = a$, alors l'unique modèle de $\Delta_{\mu'}^{d_D,\Sigma}(E)$ et de $\Delta_{\mu'}^{d_D,G_{max}}(E)$ serait 1110.

Dans le tableau 3.2 sont présentés les résultas obtenus en utilisant la distance de Hamming. Les modèles de $\Delta_\mu^{d_h,\Sigma}$ sont $0100, 1110$ et le modèle de $\Delta_\mu^{d_h,G_{max}}$ est 0100.

Si on considèrait à présent la contrainte $\mu' = a$, alors l'ensemble des modèles de $\Delta_{\mu'}^{d_h,\Sigma}(E)$ serait $\{1110\}$, et celui de $\Delta_{\mu'}^{d_h,G_{max}}(E)$ serait $\{1110\}$ également, alors que 1110 n'était pas un modèle de $\Delta_\mu^{d_h,G_{max}}(E)$ au départ. L'introduction d'une contrainte peut donc modifier l'ensemble des modèles de la fusion.

ω	$d_h(\omega, K_1)$	$d_h(\omega, K_2)$	$d_h(\omega, K_3)$	$d_h(\omega, K_4)$	$\Delta_\mu^{d_h,\Sigma}(E)$	$\Delta_\mu^{d_h,G_{max}}(E)$
0000	0	2	0	2	4	$(2,2,0,0)$
0001	1	3	1	1	6	$(3,1,1,1)$
0010	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
0011	0	2	0	2	4	$(2,2,0,0)$
0100	**0**	**1**	**1**	**1**	**3**	$\mathbf{(1,1,1,0)}$
0101	1	2	2	0	5	$(2,2,1,0)$
0110	1	0	2	1	4	$(2,1,1,0)$
0111	1	1	1	1	4	$(1,1,1,1)$
1000	1	2	1	2	6	$(2,2,1,1)$
1001	2	3	2	2	9	$(3,2,2,2)$
1010	2	1	2	1	6	$(2,2,1,1)$
1011	1	2	1	1	5	$(2,1,1,1)$
1100	1	1	2	1	5	$(2,1,1,1)$
1101	2	2	1	1	6	$(2,2,1,1)$
1110	**2**	**0**	**1**	**0**	**3**	$(2,1,0,0)$
1111	2	1	0	1	4	$(2,1,1,0)$

TAB. 3.2 – Distance de Hamming.

3.1.2 Opérateurs “syntaxiques” à connecteur virgule

L'autre famille d'opérateurs de fusion étudiée dans la suite n'est pas basée sur une distance : il s'agit d'opérateurs basés sur l'inclusion ensembliste. Ces opérateurs sont dits syntaxique car les formules utilisées pour représenter les croyances influent sur le résultat. Avec les opérateur de la section précédente on pouvait considérer les bases K conjonctivement, c'est-à-dire que remplacer $K = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ par la conjonction des formules de K : $K' = \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ ne changeait pas le résultat de la fusion. Alors qu'avec ces opérateurs syntaxiques des bases de croyances logiquement équivalentes (i.e. ayant le meme ensemble de modèles) peuvent conduire à des résultat différents. Nous allons d'abord donner une définition d'un de ces opérateurs [CBS92, RM70, KLM01, Kon00].

Définition 21 *Soit $MAXCONS(K, \mu)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles maximaux (au sens de l'inclusion) cohérents de $K \cup \{\mu\}$ qui contiennent μ, i.e. $MAXCONS(K, \mu)$ est l'ensemble de tous les S qui vérifient :*
- $S \subseteq K \cup \{\mu\}$,
- $\mu \in S$,
- *Si* $S \subset S' \subseteq K \cup \{\mu\}$, *alors* $S' \models \perp$.

Soit $MAXCONS(E, \mu) = MAXCONS(\bigcup_{K_i \in E} K_i, \mu)$. On peut alors définir un opérateur de fusion comme dans [KLM01, Kon00].

Définition 22 *Soit E un ensemble de croyances et soit μ une contrainte d'intégrité. On définit la fusion avec contrainte de E selon $\Delta_\mu^{C_1}$ par :*
$\Delta_\mu^{C_1}(E) = MAXCONS(E, \mu)$.

L'opérateur $\Delta_{\mu}^{C_1}$ donne comme résultat de la fusion l'ensemble des sous-ensembles maximaux cohérents de $E \cup \{\mu\}$ qui contiennent μ. Les modèles de la fusion sont ceux qui appartiennent à tous les sous-ensembles maximaux cohérents de $E \cup \{\mu\}$ qui contiennent μ, ce qui revient à faire l'intersection des conséquences logiques des sous-ensembles maximaux cohérents. On peut facilement montrer que le fait que l'inclusion soit considérée comme ensembliste ou multi-ensembliste n'a aucune influence sur l'ensemble des modèles de $\Delta_{\mu}^{C_1}(E)$ (ce qui montre au passage que l'intensité avec laquelle une croyances est supportée n'est pas prise en compte). Cet opérateur ne vérifie par tous les postulats logiques. Plus précisément (voir [Kon00]), il vérifie $(IC0), (IC1), (IC2), (IC4), (IC5), (IC7)$ et ne vérifie pas $(IC3), (IC6), (IC8)$ et (Maj).

Exemple :
Considérons, pour illustrer l'action de $\Delta_{\mu}^{C_1}$, quatre bases de croyances $K_1 = \{a, b \to c, \neg d\}, K_2 = \{b, c\}, K_3 = \{a\}$ et $K_4 = \{b \vee c, d\}$, ainsi que la contrainte d'intégrité $\mu = a \vee b$. Les deux sous-ensembles maximaux de $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup \mu$ sont $\{a \vee b, a, b \to c, \neg d, b, c, b \vee c\}$ et $\{a \vee b, a, b \to c, b, c, b \vee c, d\}$, donc $\Delta_{\mu}^{C_1} = \{\{a \vee b, a, b \to c, \neg d, b, c, b \vee c\}, \{a \vee b, a, b \to c, b, c, b \vee c, d\}\}$. On peut déduire de cette fusion que a, b et c sont vrais, mais on ne peut rien dire pour d.

Une variante de cet opérateur consiste à considérer conjonctivement chaque base de croyances, i.e. à supposer que chaque base ne contient qu'une formule. Dans ce cas, $\Delta_{\mu}^{C_1}$ a de meilleures propriétés logiques, puisqu'il vérifie en plus le postulat (IC_3). Ceci suffit à montrer que la virgule n'équivaut en général pas à la conjonction logique dans ce cadre. Par exemple, avec $\mu = \top, K_1 = \{a \wedge b\}, K_2 = \{\neg(a \wedge b)\}$ et $K_1' = \{a, b\}$, le fait que $\bigwedge K_1' \equiv K_1$ n'entraîne pas que $\Delta_{\mu}^{C_1}(\{K_1, K_2\}) \equiv \Delta_{\mu}^{C_1}(\{K_1', K_2\})$, puisque $\Delta_{\mu}^{C_1}(\{K_1, K_2\}) \equiv \top$ et $\Delta_{\mu}^{C_1}(\{K_1', K_2\}) \equiv a \vee b$.

D'autres opérateurs "syntaxiques" peuvent être définis en sélectionnant seulement certains sous-ensembles maximaux cohérents, par exemple ceux qui sont maximaux pour la cardinalité. Toutefois, dans la suite de cette étude, nous nous focaliserons sur l'opérateur "syntaxique" $\Delta_{\mu}^{C_1}$.

Dans la suite, pour alléger les notations, il nous arrivera de noter $E \triangle K$ pour désigner la fusion de E et K, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'opérateur utilisé.

3.2 Indices de satisfaction étudiés

On peut imaginer un grand nombre de façons de définir la satisfaction d'un agent par rapport à une base de croyances. Les définitions les plus objectives à trouver sont de deux types : probabiliste ou purement logique. En ce qui concerne l'évaluation purement logique de la satisfaction d'un agent, celle-ci peut se baser sur la cohérence du résultat avec les croyances de l'agent, ou sur l'implication du résultat par ses croyances. La définition probabiliste (qui est en fait, on le verra plus tard, une généralisation des définitions purement logiques) se base sur le fait que la proportion de modèles des croyances de l'agent présents dans le résultat de la fusion représente la probabilité qu'un modèle de l'agent soit choisi si on tire de façon uniforme un modèle parmi ceux de la fusion. On peut donc penser que plus cette probabilité est importante, plus l'agent a de chance d'être satisfait.
Dans la suite, on écrira $[K]$ pour $mod(K)$ pour alléger les notations, et $|K|$ désignera le cardinal de K.

Définition 23 *Soient K et K_Δ deux formules. On définit l'indice de satisfaction probabiliste $i_p(K, K_\Delta)$ comme la probabilité d'obtenir un modèle de K en faisant un tirage uniforme d'un modèle de K_Δ.*

On a donc :

$$i_p(K, K_\Delta) = \frac{|[K] \cap [K_\Delta]|}{|[K_\Delta]|}.$$

Dans le cas où $|[K_\Delta]| = 0$, on pose $i_p(K, K_\Delta) = 0$.

Un avantage de ce choix est que l'indice ainsi défini est compris entre 0 et 1, et a des propriétés assez usuelles. Il est minimal s'il vaut 0 ; dans ce cas, aucun modèle de K n'appartient à la fusion K_Δ. Il est maximal s'il vaut 1 ; dans ce cas, tous les modèles de K sont dans la fusion, et ce sont les seuls modèles de la fusion.

Nous nous sommes également s'intéressés à deux autres indices assez naturels, à valeurs binaires 0 ou 1.
Le premier est l'indice drastique faible i_{d_f} :

Définition 24

$$i_{d_f}(K, K_\Delta) = 0 \textit{ ssi } K \wedge \Delta(E \sqcup \{K\}) \textit{ est incohérent}$$

et

$$i_{d_f}(K, K_\Delta) = 1 \textit{ sinon.}$$

Cet indice vaut 0 si la fusion ne contient aucun modèle de K et 1 sinon. Il indique si l'agent n'est pas du tout satisfait (lorsque $i_{d_f} = 0$), ou s'il est au moins un peu satisfait ($i_{d_f} = 1$).

Proposition 2 *Si un opérateur de fusion est manipulable pour* i_{d_f}*, alors il est manipulable pour* i_p*.*

Preuve : Si i_{d_f} passe de 0 à 1, alors on passe de 0 modèle dans la fusion à au moins 1, donc on a augmenté aussi i_p, qui passe de 0 à un nombre strictement positif. Si on a manipulabilité pour i_{d_f}, alors on a manipulabilité pour i_p.

$\square$

Le second est l'indice drastique fort i_{d_F} :

Définition 25

$$i_{d_F}(K, K_\Delta) = 1 \textit{ ssi } \Delta(E \sqcup \{K\}) \models K$$

et

$$i_{d_f}(K, K_\Delta) = 0 \textit{ sinon.}$$

Cet indice vaut 1 si tous les modèles de la fusion sont des modèles de K, et 0 sinon. Il indique si l'agent est tout à fait satisfait (lorsque $i_{d_F} = 1$), ou s'il n'est pas entièrement satisfait ($i_{d_F} = 0$).

Proposition 3 *Si un opérateur de fusion est manipulable pour* i_{d_F}*, alors il est manipulable pour* i_p*.*

Preuve : Si i_{d_F} passe de 0 à 1, alors tous les modèles de la fusion n'étaient pas des modèles de K et le sont devenus, donc on a augmenté aussi i_p, puisque la probabilité d'obtenir on modèle de K en tirant une interprétation de la fusion vaut 1 si $i_{d_F} = 1$, et est strictement inférieure à 1 si $i_{d_F} = 0$. Si on a manipulabilité pour i_{d_F}, alors on a manipulabilité pour i_p.

$\square$

Ces deux propriétés montrent que la manipulabilité pour i_{d_f} ou i_{d_F} peut être vue encore comme un cas particulier de manipulabilité pour i_p.

Une situation de manipulabilité pour i_{d_f} exprime le cas où un agent totalement insatisfait pour i_p devient quelque peu satisfait par manipulation.

Une situation de manipulabilité pour i_{d_F}, à l'extrême inverse, traduit le cas où un agent non totalement satisfait pour i_p le devient totalement par manipulation.

En revanche, la manipulabilité pour i_{d_F} et celle pour i_{d_f} sont logiquement indépendants.

Chapitre 4

Quelques résultats sur la manipulabilité

4.1 Opérateurs basés sur une distance

En toute généralité, c'est-à-dire sans hypothèse supplémentaire, les opérateurs de fusion avec pseudo-distance sont manipulables pour i_{d_F}, donc pour i_p. Toutefois, le choix de certaines pseudo-distances et de certaines fonctions d'agrégation peut conduire à des situations de non-manipulabilité.

Ce chapitre est organisé comme suit : on donnera les résultats les plus généraux d'abord, c'est-à-dire ceux où la pseudo-distance et la fonction d'agrégation ne sont pas fixées, puis on donnera les résultats obtenus en fixant soit la distance, soit la fonction d'agrégation, soit les deux. Par exemple, les résultats du premier paragraphe concernent TOUS les opérateurs de fusion avec distance.

Dans ce chapitre, pour simplifier, on ne prend pas en compte de contraintes d'intégrité, soit $\mu = \top$. Pour alléger l'écriture, on notera Δ au lieu de $\Delta_\top$.

4.1.1 Opérateur $\Delta^{d,f}$, où d est une pseudo-distance

On donne d'abord un résultat de non-manipulabilité qui concerne la manipulabilité par dilatation pour tous les opérateurs de fusion avec pseudo-distance pour l'indice de satisfaction i_p.

Proposition 4 *La manipulabilité par dilatation est impossible pour tout opérateur de fusion avec une pseudo-distance, pour l'indice de satisfaction probabiliste i_p.*

Preuve : On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe un opérateur de fusion avec une pseudo-distance noté Δ^d manipulable par dilatation pour i_p, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble de croyances E, deux bases de croyances K et K' avec $K \models K'$, tels que :

$$i_p(K, \Delta^d(\{K\} \sqcup E)) < i_p(K, \Delta^d(\{K'\} \sqcup E))$$

c'est-à-dire , en notant $E \bigtriangleup K$ pour $\Delta^d(\{K\} \sqcup E)$:

$$\frac{|[K] \cap [E \bigtriangleup K]|}{|[E \bigtriangleup K]|} < \frac{|[K] \cap [E \bigtriangleup K']|}{|[E \bigtriangleup K']|}$$

Comme $K \models K'$, quelle que soit la pseudo-distance utilisée, on a :

$$\forall \omega \in \Omega, d(\omega, K) \geq d(\omega, K')$$

On a donc, quelle que soit la fonction d'agrégation non décroissante utilisée :

$$\forall \omega \in \Omega, d(\omega, E \bigtriangleup K) \geq d(\omega, E \bigtriangleup K') \tag{4.1}$$

Si on note $d_{min}(E \bigtriangleup K) = min(\{d(\omega, E \bigtriangleup K) \ / \ \omega \in \Omega\}, \leq)$, on a immédiatement avec (4.1) : $d_{min}(E \bigtriangleup K) \geq d_{min}(E \bigtriangleup K')$. Deux cas sont donc possibles :

- $d_{min}(E \bigtriangleup K) > d_{min}(E \bigtriangleup K')$ (*).
  On peut alors conclure qu' il n'y a aucun modèle de K dans $E \bigtriangleup K'$.
  En effet, si ω_1 est un modèle de K alors, comme $K \models K'$,
  $d(\omega_1, K) = d(\omega_1, K') = 0$, donc $d(\omega_1, E \bigtriangleup K) = d(\omega_1, E \bigtriangleup K')$.

  Si de plus, $d(\omega_1, E \bigtriangleup K') = d_{min}(E \bigtriangleup K')$,
  alors $d(\omega_1, E \bigtriangleup K) = d_{min}(E \bigtriangleup K')$.
  Comme par définition du min, on a $d(\omega_1, E \bigtriangleup K) \geq d_{min}(E \bigtriangleup K)$, on peut en conclure que $d_{min}(E \bigtriangleup K) \leq d_{min}(E \bigtriangleup K')$ ce qui contredit (*).
  Donc aucun modèle de K n'est un modèle de $E \bigtriangleup K'$. En conséquence, $i_p(K, E \bigtriangleup K') = 0$ et est donc minimale, ce qui contredit la manipulabilité de Δ^d.
- $d_{min}(E \bigtriangleup K) = d_{min}(E \bigtriangleup K')$ (**).
  Si ω est un modèle de $E \bigtriangleup K$, $d(\omega, E \bigtriangleup K) = d_{min}(E \bigtriangleup K)$ et donc $d(\omega, E \bigtriangleup K) = d_{min}(E \bigtriangleup K')$ d'après (**). Comme avec l'inégalité (4.1), $d(\omega, E \bigtriangleup K) \geq d(\omega, E \bigtriangleup K')$, on a $d(\omega, E \bigtriangleup K') \leq d_{min}(E \bigtriangleup K')$, donc ω est aussi un modèle de $E \bigtriangleup K'$. On peut en déduire que tous les modèles de $E \bigtriangleup K$ sont des modèles de $E \bigtriangleup K'$, et donc que :

$$|[E \bigtriangleup K]| \leq |[E \bigtriangleup K']| \tag{4.2}$$

  On peut également en déduire que tous les modèles de $E \bigtriangleup K$ qui sont des modèles de K sont des modèles de $E \bigtriangleup K'$ (et de K), donc on a :

$$|[K] \cap [E \bigtriangleup K]| \leq |[K] \cap [E \bigtriangleup K']|$$

De plus, si $\omega_1 \models K$ est un modèle de $E \triangle K'$, comme $d(\omega_1, E \triangle K') = d_{min}(E \triangle K') = d_{min}(E \triangle K)$ d'après (**), et que $d(\omega_1, E \triangle K) = d(\omega_1, E \triangle K')$ car $d(\omega_1, K) = d(\omega_1, K') = 0$, on obtient :
$d(\omega_1, E \triangle K) = d_{min}(E \triangle K)$, et ω_1 est un modèle de $E \triangle K$. On peut en déduire que :

$$|[K] \cap [E \triangle K]| \geq |[K] \cap [E \triangle K']|$$

et donc :

$$|[K] \cap [E \triangle K]| = |[K] \cap [E \triangle K']| \tag{4.3}$$

Avec (4.2) et (4.3), on a immédiatement que :

$$\frac{|[K] \cap [E \triangle K]|}{|[E \triangle K]|} \geq \frac{|[K] \cap |[E \triangle K']|}{|[E \triangle K']|} \tag{4.4}$$

Ce qui correspond à $i_p(K, \Delta^d(K, E) \geq i_p(K, \Delta^d(K', E))$.
Cette inégalité montre que Δ^d n'est pas manipulable pour i_p, ce qui contredit l'hypothèse.

On vient de montrer par l'absurde qu'un opérateur de fusion avec distance n'est pas manipulable par dilatation pour i_p.

□

Corollaire 5 *Les opérateurs de fusion avec pseudo-distance ne sont pas manipulables par dilatation pour l'indice drastique faible i_{d_f} ni pour l'indice drastique fort i_{d_F}.*

Preuve : Cette propriété est une simple conséquence de la propriété 4. En effet, la non-manipulabilité pour i_p entraîne la non-manipulabilité pour i_{d_f} et i_{d_F}, puisque si i_{d_f} ou i_{d_F} est manipulable, alors i_p l'est aussi.

□

Dans ce paragraphe, nous montrons que chaque fois que la manipulation est possible pour un opérateur de fusion avec pseudo-distance quelconque pour l'indice drastique faible i_{d_f} et un opérateur de fusion à base de distance, elle est possible avec une base complète.

Proposition 6 *Pour toute pseudo distance d et toute fonction d'agrégation f, si l'opérateur de fusion $\Delta^{d,f}$ est manipulable pour l'indice de satisfaction* *drastique faible i_{d_f}, alors cet opérateur est manipulable avec K' -les croyances que K déclare à la place de ses croyances réelles, afin d'augmenter son indice de satisfaction- complète.*

Preuve : Rappelons que si $\Delta^{d,f}$ est manipulable pour l'indice drastique faible i_{d_f}, alors il existe un ensemble de croyances $E = \{K_1, ...K_n\}$, et deux bases de croyances K et K' tels que :

$$i_{d_f}(K, \Delta^{d,f}(\{K\} \sqcup E)) < i_{d_f}(K, \Delta^{d,f}(\{K'\} \sqcup E)) \tag{4.5}$$

Ce qui est équivalent, d'après la définition de l'indice drastique faible, à : $i_{d_f}(K, E \triangle K) = 0$ et $i_{d_f}(K, E \triangle K') = 1$, où $\Delta^{d,f}(\{K\} \sqcup E)$ est noté $E \triangle K$ pour alléger les notations.
La propriété (4.6) traduit le fait que $i_{d_f}(K, E \triangle K) = 0$, donc qu'aucun modèle de K ne fait partie de $E \triangle K$. La propriété (4.7) traduit le fait que $i_{d_f}(K, E \triangle K') = 1$, donc qu'il y a au moins un modèle de K dans $E \triangle K'$.

$$\forall \omega \models K, \exists \omega' \models \neg K, d(\omega', E \triangle K) < d(\omega, E \triangle K) \tag{4.6}$$

$$\exists \omega_1 \models K, \forall \omega \in \Omega, d(\omega_1, E \triangle K') \leq d(\omega, E \triangle K') \tag{4.7}$$

Comme dans (4.6), le choix de ω' peut être réalisé indépendemment de ω, (4.6) est encore équivalent à :

$$\exists \omega' \models \neg K, \forall \omega \models K, d(\omega', E \triangle K) < d(\omega, E \triangle K) \tag{4.8}$$

Soit $\omega'' \models K'$ tel que $d(\omega_1, K') = d(\omega_1, \omega'')$. On pose $K'' = \{\omega''\}$.
Si K déclare K'' au lieu de K, alors, comme $d(\omega_1, K'') = d(\omega_1, K')$, on a :

$$d(\omega_1, E \triangle K'') = d(\omega_1, E \triangle K') \tag{4.9}$$

et on a :

$$\forall \omega \in \Omega : d(\omega_1, E \triangle K'') \leq d(\omega, E \triangle K') \tag{4.10}$$

d'après (4.7) et (4.9). De plus, comme la fonction d'agrégation f n'est pas décroissante d'après la définition des opérateurs de fusion à base de distance, et comme $K'' \subset K'$, on a $\forall \omega \in \Omega, d(\omega, E \triangle K') \leq d(\omega, E \triangle K'')$, donc il vient immédiatement avec (4.10) :

$$\forall \omega \in \Omega : d(\omega_1, E \triangle K'') \leq d(\omega, E \triangle K'') \tag{4.11}$$

ω_1 est donc un modèle de $E \triangle K''$, et $\Delta^{d,f}$ est manipulable pour une base de croyance K'' complète.

$\square$

Corollaire 7 *K est non-manipulable pour i_{d_f} étant donné $\Delta^{d,f}$ et E ssi $\forall \omega \in \Omega, \Delta^{d,f}(E \sqcup \{\omega\})$ ne contient aucun modèle de K.*

Preuve : L'implication est évidente dans la mesure où si K est non-manipulable pour i_{d_f} étant donné $\Delta^{d,f}$ et E, alors $\forall K' \subseteq \Omega, \Delta^{d,f}(E \sqcup K')$ ne contient aucun modèle de K. Cela est vrai en particulier pour les K' réduits à des singletons.
L'implication réciproque est une conséquence de la proposition 6. En effet, cette proposition prouve que si K est manipulable pour i_{d_f} étant donné $\Delta^{d,f}$ et E, alors on peut trouver $\omega \in \Omega$ tel que $\Delta^{d,f}(E \sqcup \{\omega\})$ contienne au moins un modèle de K. Si on a : $\forall \omega \in \Omega, \Delta^{d,f}(E \sqcup \{\omega\})$ ne contient aucun modèle de K, alors K ne peut être manipulable.

□

Ce corollaire 7 a une incidence notable sur la complexité de la manipulation : dans une situation où K est manipulable, il suffit de chercher K' parmi l'ensemble simplement exponentiel des interprétations (et pas dans l'ensemble doublement exponentiel des ensembles de modèles).

4.1.2 Opérateur $\Delta^{d_D,f}$, où d_D est la distance drastique

Dans ce paragraphe, on donne un résultat très général de non-manipulabilité des opérateurs de fusion basés sur la distance drastique, puisque ce résultat est vrai pour une fonction d'agrégation quelconque.

Proposition 8 *Les opérateurs de fusion $\Delta^{d_D,f}$ définis à partir de la distance drastique ne sont pas manipulables pour l' indice de satisfaction i_p, quelle que soit la fonction d'agrégation f utilisée.*

Preuve : On va raisonner par l'absurde, c'est-à-dire qu'on suppose $\Delta^{d_D,f}$ manipulable pour i_p. On suppose donc qu'il existe un ensemble de croyances E, deux bases de croyances K et K' tels que :

$$i_p(K, \Delta^{d_D,f}(\{K\} \sqcup E)) < i_p(K, \Delta^{d_D,f}(\{K'\} \sqcup E))$$

c'est-à-dire :

$$\frac{|[K] \cap [E \bigtriangleup K]|}{|[E \bigtriangleup K]|} < \frac{|[K] \cap [E \bigtriangleup K']|}{|[E \bigtriangleup K']|}$$

On peut supposer $0 \leq i_p(K, E \bigtriangleup K) < 1$ (car si $i_p(K, E \bigtriangleup K) = 1$, alors K est entièrement satisfaite et n'est donc pas manipulable).
On note $d_{min}(E \bigtriangleup K_1) = min(\{d_D(\omega, E \bigtriangleup K_1) | \omega \in \Omega\}, \leq)$.
Comme $i_p(K, E \bigtriangleup K) < 1$, on peut en déduire que $|K \cap (E \bigtriangleup K)| < |E \bigtriangleup K|$, et donc il existe au moins un modèle de $E \bigtriangleup K$ qui n'appartiennent pas à K : $\exists \omega' \models \neg K, d_D(\omega', E \bigtriangleup K) = d_{min}(E \bigtriangleup K)$.

Comme $\omega' \models \neg K, d_D(\omega', K) = 1$ et est donc maximale (on utilise la distance drastique), on a immédiatement que :
$d_D(\omega', E \triangle K) \geq d_D(\omega', E \triangle K')$
(car la fonction d'agrégation utilisée n'est pas décroissante).
Comme $d_D(\omega', E \triangle K) = d_{min}(E \triangle K)$, on obtient :
$d_{min}(E \triangle K) \geq d_D(\omega', E \triangle K')$. Comme de plus $d_D(\omega', E \triangle K') \geq d_{min}(E \triangle K')$ par définition du min, on a :
$d_{min}(E \triangle K) \geq d_{min}(E \triangle K')$. (*)

Considérons à présent un contre-modèle ω_1 de $E \triangle K$.
On a $d_D(\omega_1, E \triangle K) > d_{min}(E \triangle K)$.
Avec (*), on a donc : $d_D(\omega_1, E \triangle K) > d_{min}(E \triangle K')$, et donc ω_1 n'est pas un modèle de $E \triangle K'$.

Ainsi, tout contre-modèle de $E \triangle K$ est un contre-modèle de $E \triangle K'$, ce qui est équivalent à dire que tout modèle de $E \triangle K'$ est un modèle de $E \triangle K$:

$$[E \triangle K'] \subseteq [E \triangle K]. \tag{4.12}$$

Ceci reste en particulier vrai pour les modèles de K : $[K] \cap [E \triangle K'] \subseteq [K] \cap [E \triangle K]$, donc :

$$|[K] \cap [E \triangle K]| \geq |[K] \cap [E \triangle K']|. \tag{4.13}$$

Si $|[K] \cap [E \triangle K']| = 0$, alors $i_p(K, E \triangle K') = 0$ et on n'a pas amélioré i_p, ce qui contredit le fait que $\Delta^{d_D, f}$ est manipulable. On peut donc supposer dans la suite de la preuve que $i_p(K, E \triangle K') \neq 0$. Si $i_p(K, E \triangle K') \neq 0$, alors il existe au moins un modèle de K dans $E \triangle K'$ donc on a :
$\exists \omega_1 \models K, d_D(\omega_1, E \triangle K') = d_{min}(E \triangle K')$.
Comme $\omega_1 \models K, d_D(\omega_1, K) = 0$ et est donc minimale, on a immédiatement que :

$d_D(\omega_1, E \triangle K) \leq d_D(\omega_1, E \triangle K')$, et donc :
$d_D(\omega_1, E \triangle K) \leq d_{min}(E \triangle K')$.
puisque $d_D(\omega_1, E \triangle K') = d_{min}(E \triangle K')$.
Comme de plus $d_D(\omega_1, E \triangle K) \geq d_{min}(E \triangle K)$ par définition du min, alors :

$d_{min}(E \triangle K) \leq d_{min}(E \triangle K')$.

Avec l'inégalité (*), on obtient donc :
$d_{min}(E \triangle K) = d_{min}(E \triangle K')$.

Considérons à présent un contre-modèle ω de K qui est un modèle de $E \triangle K$: $\omega \models \neg K \wedge (E \triangle K)$, et supposons que ω n'est pas un modèle de $E \triangle K'$. Si ω n'est pas un modèle de $E \triangle K'$, alors il existe $\omega' \models E \triangle K'$ tel que : $d_D(\omega', E \triangle K') < d_D(\omega, E \triangle K')$, et $d_D(\omega', E \triangle K') = d_{min}(E \triangle K')$.

De plus, comme $d_{min}(E \triangle K) = d_{min}(E \triangle K')$, on a $d_{min}(E \triangle K) = d_D(\omega', E \triangle K')$.

ω étant un modèle de $E \triangle K$, $d_{min}(E \triangle K) = d_D(\omega, E \triangle K)$, donc $d_D(\omega', E \triangle K') = d_D(\omega, E \triangle K)$.
On a aussi $d_D(\omega, E \triangle K) \geq d_D(\omega, E \triangle K')$ car $\omega \models \neg K$, donc $d_D(\omega, K) = 1$ et est maximale.
Donc $d_D(\omega', E \triangle K') \geq d_D(\omega, E \triangle K')$.

On obtient à la fois :
$d_D(\omega', E \triangle K') \geq d_D(\omega, E \triangle K')$ et $d_D(\omega', E \triangle K') < d_D(\omega, E \triangle K')$, d'où la contradiction.

On arrive à la conclusion que tout modèle de $E \triangle K$ qui n'est pas un modèle de K est un modèle de $E \triangle K'$, donc :

$$[\neg K] \cap [E \triangle K] \subseteq [\neg K] \cap [E \triangle K'].$$

Avec (4.12), on a également l'implication inverse, c'est-à-dire $[\neg K] \cap [E \triangle K'] \subseteq [\neg K] \cap [E \triangle K]$, donc on a en fait une équivalence :
$\neg K \wedge (E \triangle K) \equiv \neg K \wedge (E \triangle K')$.
Donc :

$$|[\neg K] \cap [E \triangle K]| = |[\neg K] \cap [E \triangle K']|. \tag{4.14}$$

On a supposé $\Delta^{d,f}$ manipulable, donc :

$$\frac{|[K] \cap [E \triangle K]|}{|[E \triangle K]|} < \frac{|[K] \cap [E \triangle K']|}{|[E \triangle K']|}$$

Pour simplifier, on va noter $x = |[K] \cap [E \triangle K]|, y = |[\neg K] \cap [E \triangle K]|, x' = |[K] \cap [E \triangle K']|$ et $y' = |[\neg K] \cap [E \triangle K']|$, ce qui donne pour l'inégalité ci-dessus :

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x'}{x'+y'}.$$

Comme $y = y'$ d'après 4.14, on obtient en fait :

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x'}{x'+y}.$$

On sait d'après 4.13 que $x \geq x'$, donc on peut écrire que $x' = x - k$, avec $k \geq 0$. On obtient :

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x-k}{x+y-k}$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{(x)(x+y-k)}{(x+y)(x+y-k)} < \frac{(x-k)(x+y)}{(x+y-k)(x+y)}$$

soit :

$$-xk < -(x+y)k$$

$$xk > (x+y)k$$

avec x, y, et k positifs, ce qui est absurde.

On aboutit aussi à une contradiction.

On a donc démontré par l'absurde que $\Delta^{d_D,f}$ n'est pas manipulable pour i_p.

□

Corollaire 9 *Les opérateurs de fusion $\Delta^{d_D,f}$ définis à partir de la distance drastique ne sont pas manipulables pour les indices de satisfaction i_{d_f} et i_{d_F}, quelle que soit la fonction d'agrégation f utilisée.*

Preuve : C'est un simple corollaire de la proposition 8. La non-manipulabilité pour i_{d_f} et i_{d_F} résulte du fait que ce sont des cas particuliers de i_p.

□

4.1.3 Opérateur $\Delta^{d,\Sigma}$, où d est une distance quelconque

Le résultat suivant porte sur la non-manipulabilité d'une base de croyances complète pour l'opérateur de fusion $\Delta^{d,\Sigma}$ et l'indice de satisfaction drastique faible i_{d_f}, quelle que soit la distance d utilisée.

Proposition 10 *Si la base de croyance initiale K est complète, alors K n'est pas manipulable pour l'indice drastique faible i_{d_f} et l'opérateur de fusion à base de distance $\Delta^{d,\Sigma}$, pour une distance d quelconque.*

Preuve : Par l'absurde. On suppose $K = \{\omega_1\}$ complète, et manipulable pour i_{d_f} et Δ^{Σ}. On a montré avec la proposition 6 qu'on pouvait supposer $K' = \{\omega'_1\}$ complète.

$$i_{d_f}(\{\omega_1\}, \Delta^{\Sigma}(E \sqcup \{\omega_1\})) < i_{d_f}(\{\omega_1\}, \Delta^{\Sigma}(E \sqcup \{\omega'_1\}))$$

c'est-à-dire , pour l'indice drastique faible :

$$i_{d_f}(\{\omega_1\}, \Delta^{\Sigma}(E \sqcup \{\omega_1\}) = 0$$

et

$$i_{d_f}(\{\omega_1\}, \Delta^{\Sigma}(E \sqcup \{\omega'_1\}) = 1.$$

Ce qui signifie que ω_1 n'est pas un modèle de $\Delta(E \cup \{\omega_1\}$, mais est un modèle de $\Delta(E \cup \{\omega'_1\}$, donc :

$$\exists \omega' \models \neg\{\omega_1\}, d(\omega', E \triangle \{\omega_1\}) < d(\omega_1, E \triangle \{\omega_1\}) \tag{4.15}$$

et :

$$\forall \omega \in \Omega, d(\omega_1, E \triangle \{\omega'_1\}) \leq d(\omega, E \triangle \{\omega'_1\}). \tag{4.16}$$

(4.16) donne, puisque $f = \Sigma$:

$$d(\omega_1, \omega'_1) + d(\omega_1, E) \leq d(\omega', \omega'_1) + d(\omega', E). \tag{4.17}$$

Et avec (4.15), on a $d(\omega', \omega_1) + d(\omega', E) < d(\omega_1, \omega_1) + d(\omega_1, E)$. Comme $d(\omega_1, \omega_1) = 0$, on a :

$$d(\omega', \omega_1) + d(\omega', E) < d(\omega_1, E). \tag{4.18}$$

Avec (4.17) et (4.18), on obtient par transitivité :
$d(\omega', \omega_1) + d(\omega', E) + d(\omega_1, \omega'_1) < d(\omega_1, \omega'_1) + d(\omega_1, E) \leq d(\omega', \omega'_1) + d(\omega', E)$
donc :

$$d(\omega', \omega_1) + d(\omega', E) + d(\omega_1, \omega'_1) < d(\omega', \omega'_1) + d(\omega', E)$$

et en simplifiant par $d(\omega', E)$, on a :

$d(\omega', \omega_1) + d(\omega_1, \omega'_1) < d(\omega', \omega'_1)$.

Or avec l'inégalité triangulaire, on a pour tout ω_1 : $d(\omega', \omega'_1) \leq d(\omega', \omega_1) + d(\omega_1, \omega'_1)$, d'où la contradiction.

□

Cette proposition ne peut être généralisée aux autres indices de satisfaction i_p et i_{d_F} si on considère la distance de Hamming.

Proposition 11 *$\Delta^{d_h,\Sigma}$ est manipulable pour les indices i_p et i_{d_F}, même si la base de croyances initiale K est complète.*

Preuve : On considère l'exemple suivant : K a pour modèle 10, K_1 a pour modèles $10, 11$ et K_2 a pour modèle 11. $\Delta^{d_h,\Sigma}(\{K, K_1, K_2\})$ a pour modèles 10 et 11 (voir tableau 4.1), on a alors $i_p(K, \Delta^{d_h,\Sigma}(\{K, K_1, K_2\})) = \frac{1}{2}$ et $i_{d_F}(K, \Delta^{d_h,\Sigma}(\{K, K_1, K_2\})) = 0$. Si on déclare K' de modèle 00 à la place de K, $\Delta^{d_h,\Sigma}(\{K', K_1, K_2\})$ a pour modèle 10 (voir tableau 4.1), on a alors $i_p(K, \Delta^{d_h,\Sigma}(\{K', K_1, K_2\}) = 1$ et $i_{d_F}(K, \Delta^{d_h,\Sigma}(\{K', K_1, K_2\}) = 1$ également, donc on a un exemple de manipulation.

ω	K	K'	K_1	K_2	$\Delta^{d_h,\Sigma}(\{K, K_1, K_2\})$	$\Delta^{\Sigma}(\{K', K_1, K_2\})$
00	1	0	1	2	4	3
01	2	1	1	1	4	3
10	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**2**
11	**1**	1	**0**	**0**	**2**	3

TAB. 4.1 – Manipulabilité de $\Delta^{d_h,\Sigma}$ pour i_p et i_{d_F} si K est complète.

□

On s'intéresse à présent à la non-manipulabilité des opérateurs de fusion $\Delta^{d,\Sigma}$, un opérateur défini à partir d'une distance quelconque et de la fonction d'agrégation Σ, pour l'indice de satisfaction drastique faible i_{d_f} si on dispose seulement de deux bases.

Proposition 12 *La fusion de deux bases avec $\Delta^{d,\Sigma}$ n'est pas manipulable pour i_{d_f}, quelle que soit la distance d utilisée.*

Preuve : Ce résultat est une conséquence directe de la propriété suivante :

Lemme 13 *Si $E = \{K_1, K_2\}$ alors $\Delta^{\Sigma}(E) \wedge K_1$ et $\Delta^{\Sigma}(E) \wedge K_2$ sont cohérents.*

Preuve : Par l'absurde. On suppose que pour deux bases K_1 et K_2 le résultat de la fusion réalisée avec $\Delta^{d,\Sigma}$ ne contient aucun modèle de K_1. On peut en déduire que :

$\exists \omega' \models \neg K_1, \forall \omega \models K_1, d(\omega, K_1 \triangle K_2) > d(\omega', K_1 \triangle K_2)$.
Comme $\forall \omega \models K_1, d(\omega, K_1) = 0$, on obtient :
$\exists \omega' \models \neg K_1, \forall \omega \models K_1, d(\omega, K_2) > d(\omega', K_1) + d(\omega', K_2)$.
En particulier, si on considère $\omega_1 \models K_1$ tel que $d(\omega', K_1) = d(\omega', \omega_1)$ on a :
$d(\omega_1, K_2) > d(\omega', \omega_1) + d(\omega', K_2)$.

De même, si on considère $\omega_2 \models K_2$ tel que $d(\omega', K_2) = d(\omega', \omega_2)$ on obtient :
$d(\omega_1, K_2) > d(\omega', \omega_1) + d(\omega', \omega_2)$.(*)
Or, $\forall \omega \models K_2, d(\omega_1, K_2) \leq d(\omega_1, \omega)$, en particulier, $d(\omega_1, K_2) \leq d(\omega_1, \omega_2)$.
Par transitivité de $\leq$, il vient avec (*) : $d(\omega_1, \omega_2) > d(\omega', \omega_1) + d(\omega', \omega_2)$.

Or avec l'inégalité triangulaire, on a pour tout $\omega \in \Omega$:
$d(\omega_1, \omega_2') \leq d(\omega_1, \omega) + d(\omega, \omega_2)$, d'où la contradiction.

$\square$

Pour deux bases K_1 et K_2, on a toujours $i_{d_f}(K_1, K_1 \triangle K_2) = 1$, car $\Delta^{\Sigma}(K_1, K_2) \wedge K_1$ est cohérent (lemme 13), donc il n'y a pas manipulabilité, puisque K_1 est satisfaite.

$\square$

Le résultat de non-manipulabilité obtenu avec la proposition 12 pour l'indice de satisfaction i_{d_f} ne peut pas s'étendre à l'indice de satisfaction i_p.

Proposition 14 *La fusion de deux bases avec $\Delta^{d_h,\Sigma}$ est manipulable pour i_p.*

Preuve : Si on considère la base de croyances K_1 ayant pour ensemble de modèles $\{0000, 1110, 0111, 1011, 1101\}$, K_2 ayant pour ensemble de modèles $\{0001, 0010, 0100, 1000\}$, on obtient $\Delta^{d_h,\Sigma}(\{K_1, K_2\})$ qui a pour ensemble de modèles $\{0000, 0001, 0010, 0100, 1000\}$, et donc $i_p(K_1, K_1 \triangle K_2) = \frac{1}{5}$. Si l'agent 1 déclare K_1' ayant pour ensemble de modèles $\{1110, 0111, 1011, 1101\}$ à la place de $mod(K_1)$, alors $mod(\Delta^{d_h,\Sigma}(\{K_1', K_2\})) = \Omega \backslash \{0000, 1111\}$, donc $i_p(K_1, K_1' \triangle K_2) = \frac{4}{14}$.
On a : $i_p(K_1, K_1 \triangle K_2) < i_p(K_1, K_1' \triangle K_2)$, et $\Delta^{d_h,\Sigma}$ est manipulable.
Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1.3.

ω	K_1	K_1'	K_2	$\Delta^{d_h,\Sigma}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta^{d_h,\Sigma}(\{K_1',K_2\})$
0000	**0**	3	**1**	**1**	4
0001	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**
0010	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**
0011	1	**1**	**1**	2	**2**
0100	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**
0101	1	**1**	**1**	2	**2**
0110	1	**1**	**1**	2	**2**
0111	0	**0**	**2**	2	**2**
1000	**1**	**2**	**0**	**1**	**2**
1001	1	**1**	**1**	2	**2**
1010	1	**1**	**1**	2	**2**
1011	0	**0**	**2**	2	**2**
1100	1	**1**	**1**	2	**2**
1101	0	**0**	**2**	2	**2**
1110	0	**0**	**2**	2	**2**
1111	1	1	3	4	4

TAB. 4.2 – Manipulabilité de $\Delta^{d_h,\Sigma}$ pour i_p avec deux bases.

□

Proposition 15 *L'opérateur de fusion $\Delta^{d_h,\Sigma}$ est manipulable pour i_{d_f} si le nombre de bases de croyances est au moins égal à 3.*

Preuve : On considère les trois bases K_1 de modèles $00, 10$, K_2 de modèles $01, 10, 11$ et K_3 de modèles 01. Alors $\Delta^{d_h,\Sigma}(E)$ a pour modèle 01 et $i_{d_f}(K_1, \Delta^{d_h,\Sigma}(\{K_1,K_2,K_3\}) = 0$. Si en revanche on déclare K_1' de modèle 10 à la place de K_1, alors $\Delta^{\Sigma}_{\mu}(E)$ a pour modèles $01, 10, 11$ et
$i_{d_f}(K_1, \Delta^{d_h,\Sigma}(\{K_1',K_2,K_3\}) = 1$

ω	K_1	K_1'	K_2	K_3	$\Delta^{d_h,\Sigma}(\{K_1,K_2,K_3\})$	$\Delta^{d_h,\Sigma}(\{K_1',K_2,K_3\})$
00	0	1	1	1	2	3
01	**1**	**2**	**0**	**0**	**1**	**2**
10	0	**0**	**0**	**2**	2	**2**
11	1	**1**	**0**	**1**	2	**2**

TAB. 4.3 – Manipulabilité de $\Delta^{d_h,\Sigma}$ pour trois bases.

Pour avoir un exemple de manipulabilité avec un nombre quelconque de bases, il suffit de compléter l'exemple 4.3 avec le nombre voulu de bases triviales (c'est-à-dire contenant toutes les interprétations).

□

4.1.4 Opérateur $\Delta^{d,G_{max}}$, où d est une distance quelconque

Le résultat de non-manipulabilité obtenu dans le paragraphe précédent pour l'opérateur $\Delta^{d,\Sigma}$ et une base complète (proposition 10) ne s'étend pas à l'opérateur $\Delta^{d_h,G_{max}}$.

Proposition 16 *$\Delta^{d_h,G_{max}}$ est manipulable pour les trois indices de satisfaction i_{d_f}, i_{d_F} et i_p, même si la base de croyances initiale K est complète.*

Preuve : On considère le contre-exemple suivant : K_1 a pour modèle 0011, K_2 a pour modèle 0000, K_3 a pour modèle 0000 et K_4 a pour modèle 0011. On obtient deux modèles de $\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1, K_2, K_3, K_4\})$ qui sont 0001 et 0010, et donc K_1 n'est satisfaite pour aucun des trois indices i_{d_f}, i_{d_F} et i_p, puisque $i_{d_f} = 0, i_{d_F} = 0$ et $i_p = 0$. Si l'agent 1 déclare K'_1, avec $mod(K'_1) = \{1111\}$ à la place de $\{0011\}$, alors le seul modèle de $\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K'_1, K_2, K_3, K_4\})$ est 0011, et donc K_1 est satisfaite pour les trois indices, puisque $i_{d_f} = 1, i_{d_F} = 1$ et $i_p = 1$ également. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

ω	K_1	K'_1	K_2	K_3	K_4	$\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1, K_2, K_3, K_4\})$	$\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K'_1, K_2, K_3, K_4\})$
0000	2	4	0	0	2	$(2, 2, 0, 0)$	$(4, 2, 0, 0)$
0001	**1**	3	**1**	**1**	**1**	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(3, 1, 1, 1)$
0010	**1**	3	**1**	**1**	**1**	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(3, 1, 1, 1)$
0011	0	**2**	**2**	**2**	**0**	$(2, 2, 0, 0)$	$(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$
0100	3	3	1	1	3	$(3, 3, 1, 1)$	$(3, 3, 1, 1)$
0101	2	2	2	2	2	$(2, 2, 2, 2)$	$(2, 2, 2, 2)$
0110	2	2	2	2	2	$(2, 2, 2, 2)$	$(2, 2, 2, 2)$
0111	1	1	3	3	1	$(3, 3, 1, 1)$	$(3, 3, 1, 1)$
1000	3	3	1	1	3	$(3, 3, 1, 1)$	$(3, 3, 1, 1)$
1001	2	2	2	2	2	$(2, 2, 2, 2)$	$(2, 2, 2, 2)$
1010	2	2	2	2	2	$(2, 2, 2, 2)$	$(2, 2, 2, 2)$
1011	1	1	3	3	1	$(3, 3, 1, 1)$	$(3, 3, 1, 1)$
1100	4	2	2	2	4	$(4, 4, 2, 2)$	$(4, 2, 2, 2)$
1101	3	1	3	3	3	$(3, 3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 1)$
1110	3	1	3	3	3	$(3, 3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 1)$
1111	2	0	4	4	2	$(4, 4, 2, 2)$	$(4, 4, 2, 0)$

TAB. 4.4 – Manipulabilité de $\Delta^{d_h,G_{max}}$ pour i_{d_f}, i_{d_F} et i_p avec K complète.

□

Les résultats obtenus pour la fusion de deux bases avec Δ^{Σ} ne peuvent pas non plus être étendus à $\Delta^{G_{max}}$: le résultat de non-manipulabilité obtenu pour Δ^{Σ} est faux pour $\Delta^{d_h,G_{max}}$ même en considérant l'indice de satisfaction i_{d_f}.

Proposition 17 *$\Delta^{d_h,G_{max}}$ est manipulable pour les trois indices i_{d_f}, i_{d_F} et i_p si le nombre de bases considéré est au moins égal à deux.*

Preuve : L'exemple développé ci-dessous prouve la manipulabilité de $\Delta^{d_h,G_{max}}$ pour l'indice de satisfaction i_{d_f}. On considère K_1 de modèle 0000 et K_2 de modèle 1100. On voit que $mod(\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1, K_2\}) = \{0100, 1000\}$, aucun modèle de K_1 n'appartient à $\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1,K_2\})$ donc $i_{d_f}(K_1,\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1,K_2\}) = 0$.

On voit également que si l'agent déclare $\{0011\}$ à la place de $\{0000\}$, alors les modèles de $\Delta^{d_h,G_{max}}\{K_1',K_2\})$ sont $0000, 0101, 0110, 1001, 1111$ et donc $i_{d_f} = 1$, et $\Delta^{d_h,G_{max}}$ est manipulable dans ce cas.

ω	K_1	K_1'	K_2	$\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1',K_2\})$
0000	0	**2**	**2**	$(2,0)$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$
0001	1	1	3	$(3,1)$	$(3,1)$
0010	1	1	3	$(3,1)$	$(3,1)$
0011	2	0	4	$(4,2)$	$(4,0)$
0100	**1**	3	**1**	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(3,1)$
0101	2	**2**	**2**	$(2,2)$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$
0110	2	**2**	**2**	$(2,2)$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$
0111	3	1	3	$(3,3)$	$(3,1)$
1000	**1**	3	**1**	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(3,1)$
1001	2	**2**	**2**	$(2,2)$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$
1010	2	2	2	$(2,2)$	$(2,2)$
1011	3	1	3	$(3,3)$	$(3,1)$
1100	2	4	0	$(2,0)$	$(4,0)$
1101	3	3	1	$(3,1)$	$(3,1)$
1110	3	3	1	$(3,1)$	$(3,1)$
1111	4	**2**	**2**	$(4,2)$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$

TAB. 4.5 – Manipulabilité de $\Delta^{d_h,G_{max}}$ pour i_{d_f} et deux bases.

Si on a la manipulabilité pour i_{d_f}, on a forcément la manipulabilité pour i_p. Quant à i_{d_F}, considérons l'exemple suivant : $mod(K_1) = \{00, 10\}, mod(K_2) = \{10\}$. Alors $mod(\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1,K_2\}) = \{10\}$, et donc $i_{d_F} = 0$. En revanche, si on déclare $mod(K_1') = \{00\}$ à la place de K_1, alors $mod(\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1',K_2\}) = \{10, 00\}$ et $i_{d_F} = 1$.

ω	K_1	K_1'	K_2	$\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1',K_2\})$
00	0	**0**	**1**	$(1,0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$
01	1	1	2	$(2,1)$	$(2,1)$
10	**0**	**1**	**0**	$(\mathbf{0},\mathbf{0}$	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$
11	1	2	1	$(1,1)$	$(2,1)$

TAB. 4.6 – Manipulabilité de $\Delta^{d_h,G_{max}}$ pour i_{d_F} et deux bases.

Enfin, si on considère plus de deux bases, il suffit d'en prendre deux identiques à l'exemple 4.5 ou à l'exemple 4.6 selon l'indice considéré et les autres triviales pour retrouver un exemple de manipulabilité.

□

On peut remarquer également que $K_1 \wedge \Delta^{d_h,G_{max}}(K_1,K_2)$ peut ne pas être cohérent, comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple : On considère les ensembles suivants $mod(K_1) = \{00\}$ et $mod(K_2) = \{11\}$. On voit que $mod(\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1, K_2\})) = \{01, 10\}$, aucun modèle de K_1 n'appartient à $\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1, K_2\})$.

ω	K_1	K_2	$\Delta^{d_h,G_{max}}(\{K_1, K_2\})$
00	0	2	$(2, 0)$
01	**1**	**1**	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})$
10	**1**	**1**	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})$
11	0	2	$(2, 0)$

TAB. 4.7 – Non-cohérence de $K_1 \wedge \Delta^{d_h,G_{max}}\{K_1, K_2\}$.

4.2 Opérateurs "syntaxiques" à connecteur virgule

On rappelle que E dénote un multi-ensemble de bases K_i, où chaque K_i est un ensemble de formules cohérentes.

Proposition 18 *L'opérateur $\Delta_\mu^{C_1}$ est manipulable pour i_p, même si $|E| = 2$ et $\mu \equiv \top$.*

Preuve : On peut facilement trouver un exemple de manipulabilité de $\Delta_\mu^{C_1}$ pour i_p, même lorsque $|E| = 2$, et pour $\mu = \top$.

On considère $E = \{K_1, K_2\}$, avec $K_1 = \{a \wedge b\}$ et $K_2 = \{\neg(a \wedge b)\}$. Alors $\Delta_\mu^{C_1} \equiv \top$, et $i_p(K_1, \Delta_\mu^{C_1}(E) = \frac{1}{4}$. Si l'agent 1 déclare $K_1' = \{a, b\}$ à la place de K_1, alors $\Delta_\mu^{C_1}(\{K_1', K_2\}) \equiv a \vee b$, et $i_p(K_1, \Delta^{C_1}(\{K_1', K_2\})) = \frac{1}{3}$. On a augmenté i_p, donc on a un exemple de manipulation.

□

Proposition 19 *L'opérateur $\Delta_\mu^{C_1}$ n'est pas manipulable pour i_{d_f}.*

Preuve : Si on considère un opérateur $\Delta_\mu^{C_1}$, deux cas sont possibles :

- $\bigwedge K \wedge \mu$ est cohérente. Alors il existe au moins une sous-base maximale cohérente S de E qui contient μ et toutes les formules de K. Comme S est cohérente avec $\bigwedge K \wedge \mu$, $\Delta_\mu^{C_1}(E \cup \{K\})$ l'est aussi puisque $S \models \Delta_\mu^{C_1}(E \cup \{K\})$. Donc on a toujours $i_{d_f}(K, \Delta_\mu^{C_1}(E \cup \{K\})) = 1$, et la manipulation n'est pas possible.
- $\bigwedge K \wedge \mu$ n'est pas cohérente. Alors comme $\Delta_\mu^{C_1}(E \sqcup \{K'\})) \models \mu$ quel que soit K', on a $i_{d_f}(K, \Delta_\mu^{C_1}(E \cup \{K'\}) = 0$ pour tout K', et la manipulation n'est pas possible.

□

Proposition 20 *L'opérateur $\Delta_{\mu}^{C_1}$ n'est pas manipulable pour i_{d_F} lorsque les K_i sont des singletons (c'est-à-dire lorsqu'on interprète conjonctivement les formules).*

Preuve : Δ^{C_1} n'est pas manipulable pour i_{d_F}, car on ne peut pas avoir à la fois :

$$\Delta_{\mu}^{C_1}(E \cup \{K'\}) \models \bigwedge K \tag{4.19}$$

et

$$\Delta_{\mu}^{C_1}(E \cup \{K\}) \not\models \bigwedge K \tag{4.20}$$

En effet si on a (4.20) alors il existe un sous-ensemble cohérent S de E contenant μ et maximal pour l'inclusion, tel que S contredit $\bigwedge K$. Ceci entraîne qu'il existe un sous-ensemble cohérent S' de $E \cup \{K'\}$ tel que $S \subset S'$ contenant μ et maximal pour l'inclusion, tel que S' contredit $\bigwedge K$. Or ceci est contradictoire avec (4.19).

□

4.3 Synthèse

4.3.1 Opérateurs basés sur une distance

d’ est une pseudo-distance.

d est une distance.

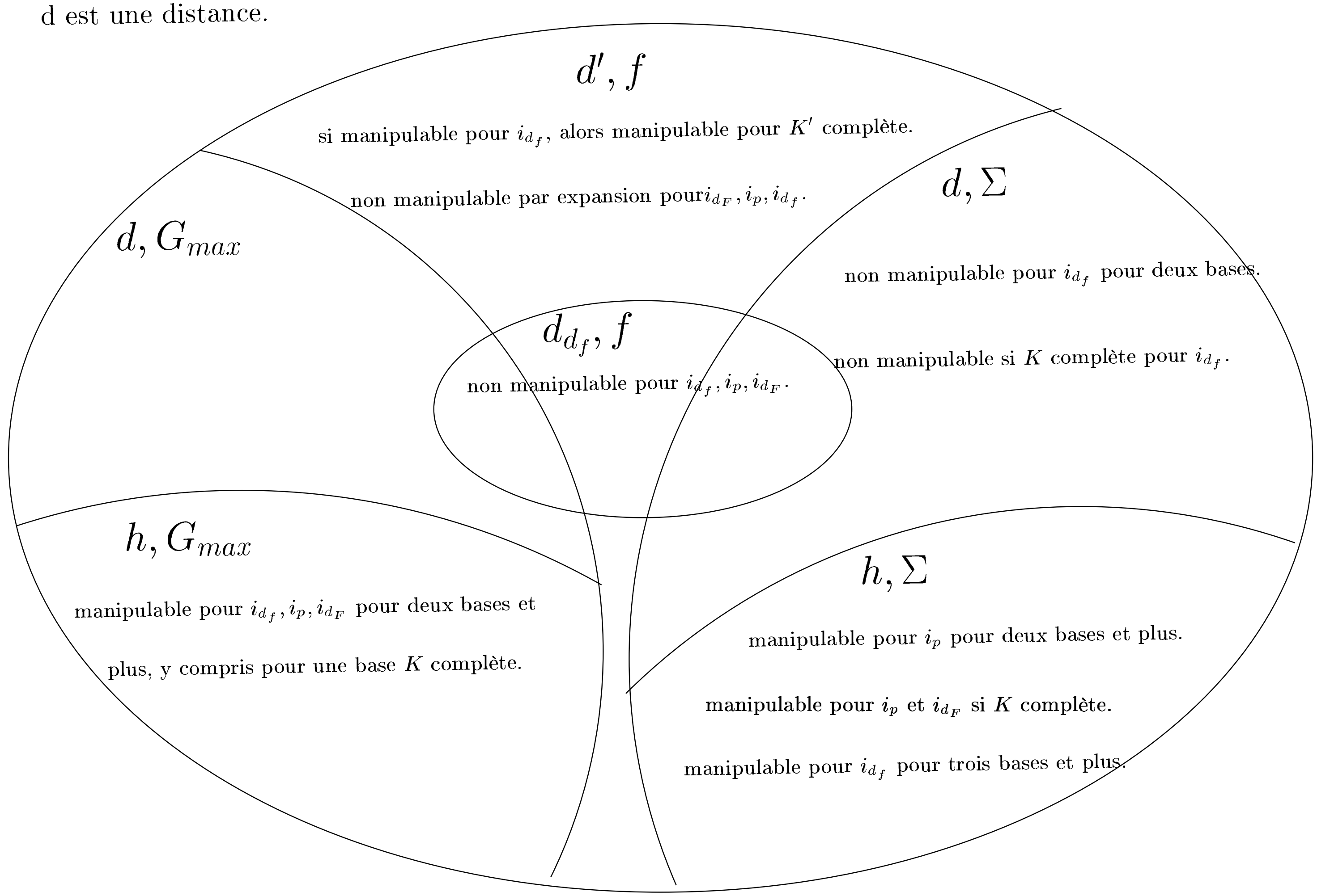

FIG. 4.1 – Synthèse des résultats obtenus pour les opérateurs de fusion basés sur des distances

4.3.2 Opérateur $\Delta_{\mu}^{C_1}$

L'opérateur $\Delta_{\mu}^{C_1}$ est manipulable pour i_p, non manipulable pour i_{d_f}, et non manipulable pour i_{d_F} si les K_i sont des singletons.

Chapitre 5

Fusion par quota

Nous avons cherché à définir un nouvel opérateur de fusion, ayant de bonnes propriétés logiques et non manipulable. Nous avons donc défini un opérateur de fusion par quota, dans le même esprit que le vote par quota défini dans l' article [SBZ91].

Dans cet article, on voit en effet que le mode de scrutin par quota n'est pas manipulable, et offre donc une alternative au résultat de Gibbard-Sattherthwaite ([Gib73, Sat75]) qui s'applique d'habitude et montre que les modes de scrutin usuels sont manipulables. On pouvait donc penser qu'en transposant cette idée pour un opérateur de fusion, celui-ci serait non manipulable également.

L'idée est la suivante : dans le cadre d'une fusion, sont qualifiés les modèles appartenant à au moins k des n bases, où k est un entier non nul fixé. Ce chapitre est organisé ainsi : après avoir donné une définition de cet opérateur, nous préciserons quelles sont ses propriétés logiques, avant de parler de sa non-manipulabilité.

5.1 Définition

Il est à préciser que dans ce chapitre, on considère que les bases K_i sont des singletons, i.e. sont interprétées conjonctivement. On introduit ici une notation qui est utile pour simplifier l'expression de l'opérateur à quota :

Définition 26 *On définit :* $\ulcorner n_k \urcorner = \{C \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid |C| \geq k\}$

Nous pouvons alors définir formellement les opérateurs suivants :

Définition 27 *Soit* k *un entier naturel non nul,* $E = \{K_1, \ldots K_n\}$ *un ensemble de croyances, et soit* μ *une contrainte d'intégrité. On note* $\Delta^Q_{\mu,k}$ *l'opérateur de fusion contrainte défini comme suit :* $\Delta^Q_{\mu,k}(E) =$

– $\bigwedge E \wedge \mu$ *si cohèrent, sinon*

– $(\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge \mu$

La première remarque que l'on peut faire sur cet opérateur est la suivante :

$$\Delta^Q_{\mu,k}(E) \equiv \Delta^Q_{\top,k}(E) \wedge \mu$$

qui est une remarque qui découle trivialement de la définition.

On peut donner une autre définition équivalente à la première :

Définition 28 *Soient k un entier naturel non nul, $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un ensemble de croyances, et μ une base de croyances représentant les contraintes d'intégrité. On note $\triangle^Q_{\mu,k}$ l'opérateur de fusion à quota k définit par : $mod(\triangle^Q_{\mu,k}) =$*

– $\{\omega \in mod(\mu) \mid \forall K_i \in E \ \omega \models K_i\}$ *si cet ensemble est non vide.*

– $\{\omega \in mod(\mu) \mid |K_i \in E \mid \omega \models K_i\}| \geq k\}$ *sinon.*

Avant de travailler avec cet opérateur, on peut donner un exemple pour illustrer son fonctionnement.

Exemple :

Considérons l'ensemble de croyances suivant $E = \{K_1, K_2, K_3\}$ avec : $K_1 = \{a \wedge \neg c\}, K_2 = \{b \wedge c\}$ et $K_3 = \{\neg a\}$, et la contrainte d'intégrité $\mu = \neg a \wedge b$. On voit immédiatement que $\bigwedge E$ n'est pas cohérent, donc pas cohérent avec μ.

Si $k = 1$, alors $\Delta_{\mu,k}(E) \equiv [(a \wedge \neg c) \vee (b \wedge c) \vee \neg a] \wedge \mu \equiv \neg a \wedge b$.

Si $k = 2$, alors $\Delta_{\mu,k}(E) \equiv [(a \wedge \neg c \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg c \wedge \neg a) \vee (b \wedge c) \wedge \neg a] \wedge \mu \equiv \neg a \wedge b \wedge c$.

Si $k = 3$, alors $\Delta_{\mu,k}(E) \equiv \bot$.Si $k > 3$, alors il n'existe aucun sous-ensemble C de $\{1, ...3\}$ de taille supérieure à k donc $\Delta_{\mu,k}(E) \equiv \bot$.

5.2 Propriétés logiques

On obtient de bonnes propriétés logiques, comme le montre la propriété suivante.

Proposition 21 *L'opérateur $\Delta^Q_{\mu,k}$ est un opérateur de fusion avec contrainte , qui vérifie les postulats de la définition 5* **(IC0)** **(IC2)**, **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)** *et* **(IC8)** *et qui ne vérifie pas les postulats* **(IC1)** *et* **(IC6)**.

Preuve :

- **(IC0)** est vérifié : si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent, alors $\Delta^Q_{\mu,k}(E) = \bigwedge E \wedge \mu$, donc $\Delta^Q_{\mu,k}(E) \models \mu$ dans ce cas. Sinon, si $\bigwedge E \wedge \mu$ n'est pas cohérent, $\Delta^Q_{\mu,k}(E) = (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge \mu$, donc $\Delta^Q_{\mu,k}(E) \models \mu$ dans ce cas également.
- **(IC1)** n'est pas vérifié : à chaque fois que $k > |E|$ car si $\bigwedge E \wedge \mu$ n'est pas cohérent et $k > E$ il n'existe aucun sous ensemble C de $\{1, ...|E|\}$ de taille supérieure à k donc $\Delta_{\mu,k}(E) = \bot$, ou comme le prouve l'exemple suivant : $E = \{a\}, k = 1$ et $\mu = \neg a$. Dans ce cas, μ est cohérent mais pas $\Delta^Q_{\mu,k}(E)$.
- **(IC2)** est vérifié : si E est cohérent avec μ, alors $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent, et donc $\Delta_{\mu,k}(E) = \bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent.
- **(IC3)** est vérifié : si on remplace μ par une contrainte équivalente, et E également, le résultat de la fusion est équivalent à $\Delta_{\mu,k}(E)$.
- **(IC4)** est vérifié : on doit montrer que si $K_1 \models \mu$ et $K_2 \models \mu$, alors $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1\} \sqcup \{K_2\}) \wedge K_1 \not\models \bot \Rightarrow \Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1\} \sqcup \{K_2\}) \wedge K_2 \not\models \bot$.
  On note $E = \{K_1, K_2\}$. On suppose que $K_1 \models \mu$ et $K_2 \models \mu$. Deux cas sont possibles :
  - $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ est cohérent.
    Alors $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) = E \wedge \mu = K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$.
    Comme $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2$ est cohérent, le postulat est vérifié.
  - $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ n'est pas cohérent.
    Alors $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) = (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge \mu$.
    Selon les valeurs de k, on va obtenir des cas différents :
    - $k \geq 3$: il n'existe aucun sous-ensemble C de cardinal k inclu dans $\{1, 2\}$, donc la disjonction est équivalente à faux. Dans ce cas, $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \equiv \bot$, donc (IC4) est trivialement vérifié.
    - $k = 2$: $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \equiv (\bigvee_{C \in \ulcorner 2_2 \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge \mu$
      Donc :
      $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \equiv K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$. Comme $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ n'est pas cohérent, $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \equiv \bot$ et on retrouve la même situation que précédemment .
    - $k = 1$:$\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \equiv (\bigvee_{C \in \ulcorner 2_1 \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge \mu$
      Donc :
      $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) = (K_1 \vee K_2) \wedge \mu$.
      Comme $K_1 \models \mu$ et $K_2 \models \mu$, $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \equiv K_1 \vee K_2$, donc $\Delta^Q_{\mu,k}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2$ est cohérent, donc (IC4) est encore vérifié.
- **(IC5)** est vérifié : Pour prouver (IC5), on va tout d'abord énoncer et prouver un lemme qui sera utile à la démonstration.
  Lemme 22 *Si $E' = E \sqcup F$, alors :*
  - *si $E' \wedge \mu$ est cohérent,*$\Delta^Q_{\mu,k}(E') \models \Delta^Q_{\mu,k}(E)$.

– *sinon, si $E' \wedge \mu$ n'est pas cohérent et si $E \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors* $\Delta^Q_{\mu,k}(E) \models \Delta^Q_{\mu,k}(E')$.

Preuve :

– si $E' \wedge \mu$ est cohérent, alors $E \wedge \mu$ est cohérent, puisque $E' = E \sqcup F$. On a dans ce cas $\Delta^Q_{\mu,k}(E) = E \wedge \mu$ et $\Delta^Q_{\mu,k}(E') = E' \wedge \mu$, donc comme $E' = E \sqcup F$, $E' \wedge \mu = (E \wedge \mu) \sqcup (F \wedge \mu)$, d'où $\Delta^Q_{\mu,k}(E') = \Delta^Q_{\mu,k}(E) \sqcup \Delta^Q_{\mu,k}(F)$, donc $\Delta^Q_{\mu,k}(E') \models \Delta^Q_{\mu,k}(E)$.
– si $E' \wedge \mu$ n'est pas cohérent (donc $\Delta^Q_{\mu,k}(E') = (\bigvee_{C \in \ulcorner n'_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K'_j)) \wedge \mu$, où $n' = |E'|$) et si $E \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors différents cas sont possibles suivants les valeurs de k :
  – $k > |E|$: Alors $\Delta^Q_{\mu,k}(E) \equiv \perp$, car il n'existe aucun sous-ensemble de C de taille k. Dans ce cas, on a évidemment $\Delta^Q_{\mu,k}(E) \models \Delta^Q_{\mu,k}(E')$.
  – $k \leq |E|$: Alors $\Delta^Q_{\mu,k}(E) = (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge \mu$.
    Or tous les disjoints de $\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)$ sont des disjoints de $(\bigvee_{C \in \ulcorner n'_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K'_j)) \wedge \mu$ puisque $E' = E \sqcup F$. Donc $\Delta^Q_{\mu,k}(E) \models \Delta^Q_{\mu,k}(E')$.

□

Pour (IC5), il faut prouver que $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2) \models \triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2)$. En prenant $E = E_1$ et $E' = E_1 \sqcup E_2$, le lemme montre immédiatement que si $(E_1 \sqcup E_2) \wedge \mu$ est incohérent et $E_1 \wedge \mu$ est incohérent alors $\Delta^Q_{\mu,k}(E_1) \models \Delta^Q_{\mu,k}(E_1 \sqcup E_2)$. Idem en remplaçant E_1 par E_2 par symétrie.
Or, $(E_1 \sqcup E_2) \wedge \mu$ est incohérent et $E \wedge \mu$ est incohérent) ssi $E_1 \wedge \mu$ est incohérent. Le lemme affirme donc que :
1) si $E_1 \wedge \mu$ est incohérent alors $\Delta^Q_{\mu,k}(E_1) \models \Delta_\mu(E_1 \sqcup E_2)$, et
2) si $E_2 \wedge \mu$ est incohérent alors $\Delta^Q_{\mu,k}(E_2) \models \Delta^Q_{\mu,k}(E_1 \sqcup E_2)$ (par symétrie).
Dans les deux cas, i.e. si $E_1 \wedge \mu$ est incohérent ou $E_2 \wedge \mu$ est incohérent, on a $\Delta^Q_{\mu,k}(E_1) \wedge \Delta^Q_{\mu,k}(E_2) \models \Delta^Q_{\mu,k}(E_1 \sqcup E_2)$, par monotonie de la déduction logique. Ainsi (IC5) est vérifié.
Le seul cas restant est le cas où $E_1 \wedge \mu$ est cohérent et $E_2 \wedge \mu$ est cohérent. On a alors $\Delta^Q_{\mu,k}(E_1) \equiv E_1 \wedge \mu$ et $\Delta^Q_{\mu,k}(E_2) \equiv E_2 \wedge \mu$ par définition de l'opérateur de fusion. Par conséquent,$\Delta^Q_{\mu,k}(E_1) \wedge \Delta^Q_{\mu,k}(E_2) \equiv E_1 \wedge E_2 \wedge \mu$. Or l'opérateur de fusion avec quota vérifie pour tout ensemble de croyances E la propriété $E \wedge \mu \models \Delta^Q_{\mu,k}(E)$ (ceci est facile à prouver vu la définition de cet opérateur). Un choix de E logiquement équivalent à $E_1 \wedge E_2$ permet de conclure pour le cas restant que (IC5) est aussi vérifié.

- **(IC6)** n'est pas vérifié : On le voit par exemple avec le contre-exemple suivant. On considère $E_1 = \{a, b, c\}, E_2 = \{d, e, f\}, k = 2$ et $\mu = \neg(a \wedge b \wedge c) \wedge (d \wedge e \wedge f)$.
  Comme $E_1 \wedge \mu$ n'est pas cohérent, $\Delta^Q_{\mu,k}(E_1) = \mu \wedge ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c))$, et comme $E_2 \wedge \mu$ n'est pas cohérent, $\Delta^Q_{\mu,k}(E_2) = \mu \wedge ((d \wedge e) \vee (d \wedge f) \vee (e \wedge f))$.
  D'autre part, $(E_1 \sqcup E_2) \wedge \mu$ n'est pas cohérent,donc $\Delta^Q_{\mu,k}(E_1 \sqcup E_2) = \mu \wedge ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (a \wedge e) \vee (a \wedge f) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge d) \vee (b \wedge e) \vee (b \wedge f) \vee (c \wedge d) \vee (c \wedge e) \vee (c \wedge f) \vee (d \wedge e) \vee (d \wedge f) \vee (e \wedge f))$.
  $a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d \wedge \neg e \wedge \neg f$ est un modèle de $\Delta^Q_{\mu,k}(E_1 \sqcup E_2)$ mais pas de $\Delta^Q_{\mu,k}(E_1)$ et $\Delta^Q_{\mu,k}(E_2)$.
  Donc dans ce cas, $(\Delta^Q_{\mu,k}(E_1) \wedge \Delta^Q_{\mu,k}(E_2)) \not\models \Delta^Q_{\mu,k}(E_1 \sqcup E_2)$, alors que $(\Delta^Q_{\mu,k}(E_1) \wedge \Delta^Q_{\mu,k}(E_2))$ est cohérent (par exemple $a \wedge b \wedge \neg c \wedge d \wedge e \neg \wedge f$ en est un modèle), donc (IC6) n'est pas vérifié.
- **(IC7)** est vérifié : il faut montrer que $\Delta^Q_{\mu_1,k}(E) \wedge \mu_2 \models \Delta^Q_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E)$.

  Si $\bigwedge E \wedge \mu_1$ est cohérent, alors $\Delta^Q_{\mu_1,k}(E) \wedge \mu_2 = E \wedge \mu_1 \wedge \mu_2$, et comme on a toujours $E \wedge \mu_1 \wedge \mu_2 \models \Delta^Q_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E)$,(IC7) est vérifié de façon triviale.
  Sinon, si $\bigwedge E \wedge \mu_1$ n'est pas cohérent, alors
  $\Delta^Q_{\mu_1,k}(E) \wedge \mu_2 = (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu_1) \wedge \mu_2$. Si $\bigwedge E \wedge \mu_1$ n'est pas cohérent, alors $\bigwedge E \wedge \mu_1 \wedge \mu_2$ n'est pas cohérent, et on a :
  $\Delta^Q_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E) \equiv (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge (\mu_1 \wedge \mu_2)$. Donc $\Delta^Q_{\mu_1,k}(E) \wedge \mu_2 \equiv \Delta^Q_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E)$, et (IC7) est vérifié.
- **(IC8)** est vérifié : il faut montrer que si $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \Delta_{\mu_1}(E)$.

  Si $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge E$ est cohérent, alors $\mu_1 \wedge E$ aussi et $\Delta^Q_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E) \equiv \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge E \models \Delta^Q_{\mu_1,k}(E)$, et (IC8) est vérifié.
  Si $\mu_1 \wedge E$ est incohérent, alors $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge E$ aussi. Dans ce cas,
  $\Delta^Q_{\mu_1,k}(E) \equiv \bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu_1$.
  Et $\Delta^Q_{\mu_1 \wedge \mu_2,k}(E) \equiv (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge (\mu_1 \wedge \mu_2)$ donc on a $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \Delta_{\mu_1}(E)$ et (IC8) est vérifié.

  Enfin, reste le cas où $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge E$ est incohérent et où $\mu_1 \wedge E$ est cohérent. Alors, $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 = \mu_1 \wedge E \wedge \mu_2$ n'est pas cohérent, donc (IC8) est vérifié de façon triviale.

$\square$

5.3 Non-manipulabilité

Proposition 23 *La fusion par quota n'est pas manipulable pour i_p.*

Preuve : Par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier naturel non nul k, une contrainte d'intégrité μ, tels que $\Delta^Q_{\mu,k}$ soit manipulable pour i_p. On peut donc trouver un ensemble de croyances $E = \{K_2, ..., K_n\}$, deux bases de croyances K et K' tels que :

$i_p(K, \Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})) < i_p(K, \Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\}))$.
On a donc :

$$\frac{|[K] \cap [\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})]|}{|[\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})]|} < \frac{|[K] \cap [\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})]|}{|[\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})]|} \tag{5.1}$$

Deux cas sont possibles pour l'expression de $\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$:

- cas 1 : $(E \sqcup \{K\}) \wedge \mu$ est cohérent.
  Alors $\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\}) = (E \sqcup \{K\}) \wedge \mu$, donc tous les modèles de $\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$ sont des modèles de K, donc $i_p(K, \Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})) = 1$ et est maximale, donc on ne peut avoir manipulabilité dans ce cas.
- cas 2 : $(E \sqcup \{K\}) \wedge \mu$ n'est pas cohérent.Alors $\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\}) = (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge \mu$, où $K_1 = K$ et $E = \{K_2, ..., K_n\}$.
  - Si $\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$ est cohérent. Deux cas sont possibles pour l'expression de $\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$:
    - $(E \sqcup \{K'\}) \wedge \mu$ est cohérent. Alors $\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\}) = (E \sqcup \{K'\}) \wedge \mu$. Aucun modèle de K n'est un modèle de $\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$. En effet, dans le cas contraire, il existerait ω vérifiant $\omega \models K$ et $\omega \models (E \sqcup \{K'\}) \wedge \mu$. Alors on aurait $\omega \models (E \sqcup \{K\}) \wedge \mu$ ce qui est absurde puisque $(E \sqcup \{K\}) \wedge \mu$ n'est pas cohérent et n'a donc aucun modèle. Donc $K \cap \Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\}) = \emptyset$ et $i_p(K, \Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\}) = 0$, ce qui interdit la manipulabilité pour i_p.
    - $(E \sqcup \{K'\}) \wedge \mu$ n'est pas cohérent. On a $\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\}) = (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge \mu$, où $K'_1 = K'$ et $K'_i = K_i$ pour $i > 1$.
      Si $\omega \models K$ et $\omega \not\models \Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$, alors ω ne satisfait pas μ ou ω satisfait strictement moins de k-1 bases K_i pour $i > 1$. Dans les deux cas, ω ne peut satisfaire aucun des $\wedge K'_j \wedge \mu$ pour $j \geq 1$, puisque qu'il satisfait au plus k-1 bases ou qu'il ne satisfait pas μ.
      Donc $\omega \not\models \Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$, et par conséquent :

$$|[K] \cap [\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})]| \geq |[K] \cap [\Delta^Q_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})]|. \tag{5.2}$$

D'autre part, si $\omega \not\models K$ et $\omega \models \Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$, alors il existe au moins k bases de croyances K_i avec $i > 1$ telles que $\omega \models \wedge K_i \wedge \mu$. Alors $\omega \models \Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$, et par conséquent :

$$|[\neg K] \cap [\Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})]| \leq |[\neg K] \cap [\Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})]|. \tag{5.3}$$

Si on note $x = |[K] \cap [\Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})]|, y = |[\neg K] \cap [\Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})]|, x' = |[K] \cap [\Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})]|$ et $y' = |[\neg K] \cap [\Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})]|$, l'inégalité 5.1 devient :

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x'}{x'+y'}.$$

Comme $y \leq y'$ d'après (5.3), on doit en fait avoir :

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x'}{x'+y}.$$

On sait d'après (5.2) que $x \geq x'$, donc on peut écrire que $x' = x - z$, avec $z \geq 0$. On obtient :

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x-z}{x+y-z}$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{(x)(x+y-z)}{(x+y)(x+y-z)} < \frac{(x-z)(x+y)}{(x+y-z)(x+y)}$$

soit :

$$-xz < -(x+y)z$$

$$xz > (x+y)z$$

avec x, y, et z positifs, ce qui est absurde.

- Si $\Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$ n'est pas cohérent. $\forall \omega \models K$, $\omega \not\models \Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K\})$. On peut donc voir que $\forall \omega \models K$, ω ne satisfait pas μ ou ω satisfait strictement moins de k-1 bases K_i pour $i > 1$. Dans les deux cas, ω ne peut satisfaire aucun des $\wedge K'_j \wedge \mu$ pour $j \geq 1$, puisque qu'il satisfait au

plus k-1 bases ou qu'il ne satisfait pas μ.
Donc, $\forall\omega \models K, \omega \not\models \Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})$, et par conséquent :

$$|[K] \cap [\Delta^{Q}_{\mu,k}(E \sqcup \{K'\})]| = 0.$$

et

$$i_p(K, \Delta(E \sqcup \{K'\}) = 0$$

ce qui contredit encore la manipulabilité.

$\square$

L'intérêt de cet opérateur de fusion n'est pas seulement ses bonnes propriétés logiques ou sa non-manipulabilité, mais également le fait que sa complexité est moindre que les opérateurs syntaxiques de fusion comme $\Delta^{C_1}_{\mu}$. En effet,une fois un test de cohérence effectué, il est toujours possible d'exprimer en temps polynomial $\Delta^{Q}_{\mu,k}(E)$ par une formule propositionnelle (car k est une constante fixée).

Chapitre 6

Conclusion

6.1 Synthèse des résultats obtenus

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à la manipulabilité de quelques opérateurs de fusion de croyances.

Nous avons obtenu des résultats généraux sur les opérateurs de fusion basés sur une pseudo-distance. En particulier, nous avons montré (proposition 4) que la manipulation par dilatation est impossible pour ces opérateurs, et nous avons également obtenu un résultat (proposition 6) qui simplifie considérablement la recherche de la manipulabilité de ces opérateurs.

Nous avons ensuite prouvé que si l'opérateur de fusion est basé sur la distance drastique, il est non manipulable quelle que soit la fonction d'agrégation considérée.

En ce qui concerne la famille des opérateurs de fusion majoritaires basés sur la fonction d'agrégation Σ, nous avons pu établir que ces opérateurs ne sont pas manipulables pour l'indice drastique faible i_{d_f} lorsque K est complète, quelle que soit la distance utilisée, et que ce résultat ne se généralise pas pour la distance de Hamming aux autres indices de satisfaction i_p et i_{d_F}. Nous avons pu voir également que le nombre minimal de bases nécessaire à la manipulabilité pour i_p est 2 avec la distance de Hamming, pour i_{d_f} il passe à 3, la manipulation étant impossible pour 2 bases pour i_{d_f}, quelle que soit la distance utilisée.

Enfin, la dernière famille étudiée est la famille des opérateurs de fusion d'arbitrage $\Delta^{d,G_{max}}$. Nous avons montré qu'en considérant la distance de Hamming, ces opérateurs sont manipulables à partir de deux bases, même si K est complète.

Nous avons également introduit dans ce travail une nouvelle famille d'opérateurs de fusion contrainte : les opérateurs de fusion à quota. Les avantages de cet opérateur non basé sur une distance sont multiples. Nous avons en effet pu montré qu'il a de bonnes propriétés logiques, et qu'il est non manipulable. De plus, la complexité de cet opérateur est moindre que celle d'autres opérateurs "syntaxiques" comme $\Delta_\mu^{C_1}$, puisqu'on peut exprimer le résultat de la fusion par une formule de la logique propositionnelle en temps polynomial, une fois la cohérence de l'ensemble de croyances avec la contrainte μ testée.

6.2 Problèmes ouverts

Lors de cette étude, nous n'avons pas pris en compte l'introduction des contraintes pour l'étude de la manipulabilité des opérateurs de fusion de croyances basés sur une distance entre interprétations.

La première remarque qu'on peut faire à ce sujet est que cette introduction ne change rien dans tous les cas où on a prouvé que la manipulation est possible : en effet, dans ce cas, il suffit de choisir comme contrainte $\mu = \top$ pour trouver un exemple de manipulation avec contraintes.

Le deuxième cas est plus délicat : si la manipulation est impossible pour un opérateur de fusion avec distance, reste-t'elle impossible lorsqu'on introduit des contraintes ? Si on regarde les preuves de non-manipulabilité données dans ce rapport, on voit que ces preuves sont des preuves par l'absurde : on suppose qu'il existe une base de croyances K manipulable étant donnés Δ_μ, E et i et on prouve qu'on aboutit à une contradiction.

Une première réponse à la question posée est oui, si on suppose en plus que K et μ ne sont pas cohérents. En effet dans ce cas, aucun modèle de K ne sera dans la fusion, **quel que soit** l'ensemble K' choisi pour fusionner avec E, puisque le résultat de la fusion doit être cohérent avec μ.
Si on suppose le K choisi dans la démonstration par l'absurde cohérent avec μ, deux cas sont encore possibles.

- Soit le résultat de la fusion de E avec K, $\Delta_\mu(K \sqcup E)$, est cohérent avec μ .
  Alors, si on avait une manipulation possible avec $E = \{K_1, ..., K_n\}$ dans ce cas, la manipulation resterait possible en choisissant comme ensemble de croyances $\{K_1 \cup \{\mu\}, ..., K_n \cup \{\mu\}\}$ à la place de E, et Δ serait manipulable, ce qui n'est pas possible.
- Soit le résultat de la fusion de E avec K, $\Delta_\mu(K \sqcup E)$, n'est pas cohérent avec μ.
  Les modèles préférés de la fusion sont alors les modèles minimaux pour le préordre associé à $E \sqcup K$ de μ, et peuvent être des modèles de K ! Par exemple, considérons la situation suivante : $mod(K) = \{01\}; mod(K_1) = \{00\}; mod(K_2) = \{00\}$ et $\Delta = \Delta^{d,\Sigma}$. Alors le seul modèle de $\Delta_\mu(E \sqcup K)$, où $E = \{K_1, K_2\}$ est évidemment $\{00\}$ et K n'est pas satisfait, et ne peut le devenir. En revanche, si on introduit la contraite $\mu = a \vee b$, alors $\Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup K)$ a pour modèle 01, et K est

satisfait. On voit bien au travers de cet exemple que si le résultat de la fusion n'est pas cohérent avec la contrainte μ, cela peut modifier radicalement la fusion, et donc les raisonnements qu'on peut faire avec elle. Ce cas reste donc à étudier.

D'autres problèmes ont été soulevés et restent sans réponse pour l'instant. Par exemple, l'étude de la manipulabilité des opérateurs syntaxiques s'est limitée à un seul de ces opérateurs, $\Delta_{\mu}^{C_1}$, et cette étude n'a pas porté sur tous les indices étudiés. Beaucoup de choses restent également en suspend pour l'opérateur à quota. Il serait par exemple intéressant d'étudier son comportement si on considère les bases de croyances K_i comme des formules, c'est-à-dire si les bases K_i ne sont plus interprétées conjonctivement.

6.3 Perspectives

Les perspectives de continuation de ce travail ne manquent pas. Dans un premier temps, nous pourrons chercher des réponses aux problèmes ouverts. D'autres prolongations de l'étude engagée sont possibles. Tout d'abord, il serait intéressant d'identifier la complexité de la manipulabilité. En effet, si un opérateur est manipulable mais que la manipulation a une complexité élevée pour cet opérateur, il peut devenir non manipulable en pratique. On pourrait par exemple imaginer qu'un nombre de bases élevé rende la manipulation intraitable, même si elle est théoriquement possible.

Ensuite, d'autres indices de satisfaction peuvent être introduits. On pourrait par exemple considérer l'étude de la manipulabilité pour l'indice suivant, qu'on pourrait appeler indice de Dalal, qui définit la satisfaction d'un agent de croyances K par rapport à un ensemble de modèles K_Δ comme la distance de Dalal entre ces deux ensembles : $i_{dalal} = d_h(K, K_\Delta)$.

Bibliographie

[Arr63] K. J. Arrow. *Social choice and individual values.* Wiley, New York, second edition, 1963.

[CBS92] J. Minker C. Baral, S. Kraus and V.S. Subrahmanian. Combining knowledge bases consisting of first-order theories. *Computational Intelligence*, 8 :45–71, 1992.

[Dal88] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision : preliminary report. In *Proceedings of the seventh American National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'88)*, pages 475–479, 1988.

[Gib73] A. Gibbard. Manipulation of voting schemes. *Econometrica*, 41 :587–602, 1973.

[KLM01] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. Distance-based merging : a general framework and some complexity results. Technical report, IRIT, available by anonymous FTP at `ftp ://ftp.irit.fr/pub/IRIT/RPDMP/DBMC.ps.gz`, 2001.

[Kon99] S. Konieczny. *Sur la logique du changement : révision et fusion de bases de connaissance.* PhD thesis, Université de Lille 1, 1999.

[Kon00] S. Konieczny. On the difference between merging knowledge bases and combining them. In *Proceedings of the seventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'00)*, pages 135–144, 2000.

[KP98] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.

[KP99] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In *Proceedings of the fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'99)*, LNAI 1638, pages 233–244, 1999.

[KP02a] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging information under constraints : a qualitative framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.

[KP02b] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the frontier between arbitration and majority. In *Proceedings of the eighth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 109–118, 2002.

[LL00] C. Lafage and J. Lang. Logical representation of preferences for group decision theory. In *Proceedings of the seventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'00)*, pages 457–468, 2000.

[LL01] C. Lafage and J. Lang. Propositional distances and preference representation. In *Proceedings of the sixth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'01)*, pages 48–59, 2001.

[Mou88] Hervé Moulin. *Axioms of cooperative decision making*, chapter 9. Econometric society monographs. Cambridge University Press, 1988.

[RM70] N. Rescher and R. Manor. On inference from inconsistent premises. *Theory and Decision*, 1 :179–219, 1970.

[Sat75] M.A. Satterthaite. Strategy-proofness and arrow's conditions. *Journal of Economic Theory*, 10 :187–217, 1975.

[SBZ91] H. Sonnenschein S. Barberà and L. Zhou. Voting by committees. *Econometrica*, 59(3) :595–609, May 1991.