Le bien-être de Nash: enjeux et difficultés pour une société d'agents

A. Nongaillard — antoine.nongaillard@lifl.fr
P. Mathieu — philippe.mathieu@lifl.fr
P. Everaere — patricia.everaere@lifl.fr

Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille
Université des Sciences et Technologies de Lille

Résumé

L'allocation optimale de m ressources entre n agents est un problème d'IA important pour la négociation automatique. La question centrale est de savoir comment les agents doivent interagir afin d'induire une allocation de ressources socialement optimale pour la société. Il existe dans la littérature de nombreuses propositions permettant d'évaluer la valeur du bien-être de la société en fonction du bien-être de ses membres, en général évaluée dans ce cadre à l'aide d'une fonction d'utilité. Parmi ces propositions, le bien-être de Nash bénéficie de bonnes propriétés pour une société d'agents égalitaire. Il garantit une distribution équitable des ressources aux agents tout en respectant leurs préférences. On peut alors s'étonner que l'évaluation du bien-être collectif à l'aide de la fonction de Nash soit si peu utilisée en pratique. Dans un premier temps, cet article illustre par de nombreux contre-exemples les difficultés liées au calcul de la valeur optimale du bien-être de Nash, difficultés qui expliquent sans doute sa faible utilisation pratique. Dans un second temps, nous décrivons notre solution distribuée s'appuyant sur des comportements d'agents, et les résultats obtenus sur des instances difficiles que notre approche "anytime" est jusqu'à présent seule à résoudre efficacement.

Mots-clés : *Bien-être de Nash, allocation de ressources, système multi-agents, négociation*

Abstract

The allocation of m resources between n agents is an AI problem with a great practical interest for automated trading. The general question is how to configure the behavior of bargaining agents to induce a socially optimal allocation. The literature contains many proposals for calculating a social welfare but the Nash welfare seems to be the one which has the most interesting properties for a fair agent society. It guarantees that all resources are fairly distributed among agents respecting their own preferences. This article shows first that the computation of this welfare is a difficult problem, contrary to common intuition, illustrated by many counter-examples. In a second step, we describe our distributed multi-agent solution based on a specific agent's behavior and the results we get on difficult instances. We finally claim that this anytime solution is the only one able to effectively address this problem of obvious practical interest.

Keywords: *Resource allocation, Nash welfare, multi-agent system, negotiations*

1 Introduction

Les problèmes d'allocation optimale de ressources sont présents dans la vie courante au travers d'innombrables applications. Ils visent à déterminer une allocation maximisant (ou minimisant) une fonction objective donnée. Cependant, l'apparente simplicité de ces problèmes cache une réalité très riche et complexe. Déterminer une allocation optimale est le plus souvent très difficile, pour des raisons de calculabilité principalement. De nombreuses études ont été menées aussi bien d'un point de vue distribué [1, 4], que centralisé [11], considérant des hypothèses variées et des fonctions de bien-être différentes.

Dans cet article, nous nous intéressons au bien-être de Nash [6, 9], qui est de notre point de vue une notion ayant des propriétés très intéressantes. En effet, aucun agent n'est négligé lorsque l'on maximise le bien-être de Nash (dès que $m > n$), et d'autre part les ressources ne peuvent être drainées par un seul agent ayant des préférences faibles. Ces propriétés ne sont en général pas satisfaites par les allocations maximisant les autres notions de bien-être social (comme le bien-être utilitaire ou le bien-être égalitaire, qui sont les notions les plus utilisées jusqu'à présent).

En dépit de ses qualités, le bien-être de Nash est une notion rarement étudiée jusqu'à présent. Cela est certainement lié à la complexité pratique du calcul et de l'optimisation de ce bien-être. En particulier, nous montrons dans cet article qu'il n'existe pas d'approche constructive pour identifier les allocations optimales. De ce fait, une énumération explicite de toutes les allocations possibles est nécessaire pour garantir qu'une allocation est optimale. Or, un problème d'allocation basé sur n agents et m ressources mène à n^m allocations différentes. L'énumération explicite n'est donc pas envisageable [1] et nous devons concevoir une méthode alternative pour trouver un optimum global pour le bien-être de Nash.

Cet article présente deux contributions. D'abord, la section 2 détaille les idées reçues sur les problèmes d'allocation de ressources (aussi bien de manière centralisée que distribuée) qui font penser que ce problème est simple, et démontre donc ses difficultés bien réelles. La section 3 présente ensuite une méthode efficace de résolution distribuée, basée sur la négociation entre agents.

2 Un problème complexe

Un problème d'allocation de ressources est défini par deux ensembles : $\mathcal{P}$ de n agents et $\mathcal{R}$ de m ressources. Chaque agent a_i possède un panier $\mathcal{R}_{a_i}$ qui contient les ressources qu'il possède. Dans cet article, nous supposons que chaque agent exprime ses préférences sur l'ensemble des ressources par une fonction d'utilité additive $u_{a_i} : 2^{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}$, définie par :

Définition 1 (Fonction d'utilité)**.** Lorsqu'un agent $a_i \in \mathcal{P}$ possède un ensemble de ressources $\rho \subseteq \mathcal{R}$, son utilité est évaluée de la manière suivante :

$$u_{a_i}(\rho) = \sum_{r \in \rho} u_{a_i}(r), \quad a_i \in \mathcal{P}, \rho \subseteq \mathcal{R}.$$

Le choix de l'utilité additive est un choix assez naturel, lorsqu'on ne dispose pas d'information supplémentaire sur l'influence de l'interaction entre les ressources sur les préférences des agents. En effet, le choix d'une fonction d'utilité non additive pose un problème difficile d'expression des préférences sur les ensembles de ressources, et d'élicitation de ces préférences. Dans la suite, nous noterons $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les allocations possibles. Une transaction δ change une allocation A en une nouvelle allocation A' : $\delta(A) = A'$. $\mathcal{T}$ est l'ensemble de types de transaction autorisés entre les agents (dons, échanges, ...).

1. Depuis la naissance du système solaire (4.6 10^9 années), avec un ordinateur déterminant un million d'allocations par seconde, nous aurions résolu un problème de Nash de 10 agents et 23 ressources.

2.1 Bien-être de Nash

Le bien-être de Nash est une notion intéressante de la théorie du choix social [6, 9], qui est rarement utilisée en pratique en dépit de ses qualités. Définissons tout d'abord ce bien-être :

Définition 2 (Bien-être de Nash)**.** Le bien-être de Nash d'une allocation $A \in \mathcal{A}$, noté $sw_n(A)$, correspond au produit des utilités individuelles de tous les agents de la population $\mathcal{P}$:

$$sw_n(A) = \prod_{a_i \in \mathcal{P}} u_{a_i}(\mathcal{R}_{a_i}), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Maximiser le bien-être de Nash peut être vu comme un compromis entre la maximisation de la richesse moyenne et la minimisation des inégalités au sein de la population. Une question se pose cependant : pourquoi une notion aussi intéressante est-elle si rarement utilisée en pratique ? Une partie de la réponse se trouve sans doute dans la suite de cette section, où nous illustrons les difficultés à surmonter pour résoudre ce problème.

2.2 Optimum global vs optimum accessible

Indépendamment de la notion de bien-être considérée, tous les problèmes d'allocation de ressources n'ont pas le même objectif et ne sont pas basés sur les mêmes hypothèses. Une première classe de problème vise à identifier une allocation optimale. Ces problèmes sont souvent résolus efficacement par une approche centralisée qui considère les ressources et les agents séparément. La détermination du vainqueur dans les enchères combinatoires appartient à cette classe [11]. Une autre classe de problèmes part d'une allocation initiale, et cherche à déterminer un chemin de transactions menant de cette allocation initiale à une allocation optimale. Les méthodes distribuées, basées sur des transactions entre agents, sont alors souvent utilisées [1, 4, 7]. Cependant, dans ce cas, un chemin de transactions $\delta \in \mathcal{T}$ menant d'une allocation initiale à une allocation finale peut ne pas exister, selon les types de transactions autorisées.

Exemple 1. Soient une population $\mathcal{P} = \{a_1, a_2\}$ et un ensemble de ressources $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$. Les préférences des agents sont définies dans le tableau suivant, qui contient les utilités associées à chaque ressource par chaque agent.

$u_{a_i}(r_j)$		$\mathcal{R}$		
		r_1	r_2	r_3
$\mathcal{P}$	a_1	5	5	1
	a_2	1	1	5

Supposons que l'allocation initiale soit la suivante : $A = \big[\{r_1\}\{r_2, r_3\}\big]$ où l'agent a_1 possède r_1 alors que l'agent a_2 possède r_2 et r_3. Cette allocation vaut $sw_n(A) = 30$. Il est facile ici de trouver une allocation optimale $A' = \big[\{r_1, r_2\}\{r_3\}\big]$, qui vaut $sw_n(A') = 125$.

Cependant, aucun chemin d'échanges (une ressource contre une autre) ne permet d'atteindre l'allocation optimale, alors qu'un chemin de dons (une ressource sans contrepartie) existe. En effet, l'usage exclusif de transactions de type "échange" ne permet pas de modifier le nombre de ressources par agent.

Les solutions optimales fournies par chacune des approches doivent être distinguées : si les optimaux sont similaires, alors l'optimum global peut être atteint de manière distribuée.

Définition 3 (Optimum global)**.** Une allocation de ressources $A \in \mathcal{A}$ est un optimum global si il n'existe pas d'autre allocation $A' \in \mathcal{A}$ associée à une valeur de bien-être plus importante.

$$\nexists A' \in \mathcal{A} \quad sw_n(A') > sw_n(A) \quad A, A' \in \mathcal{A}, A \neq A'.$$

Définition 4 ($\mathcal{T}$-optimum)**.** Une allocation de ressources $A \in \mathcal{A}$ est un $\mathcal{T}$-optimum si aucun chemin de transactions, appartenant à l'ensemble des types autorisés $\mathcal{T}$, ne mène à une allocation associée à un plus grand bien-être.

$$\forall A' \in \mathcal{A}, \quad \nexists \delta \quad sw_n(A') > sw_n(A) \quad \delta \in \mathcal{T}, A \in \mathcal{A}.$$

Un $\mathcal{T}$-optimum ne peut être associé à une plus grande valeur de bien-être qu'un optimum global, mais l'inverse est généralement vrai. Dans l'exemple 1, l'allocation A est un *échange-optimum* sans être un optimum global. Les techniques centralisées ne peuvent être utilisées pour déterminer un $\mathcal{T}$-optimum de manière efficace, puisqu'elles considèrent les ressources et les agents séparément.

2.3 Inefficacité de la prog. linéaire

Les techniques centralisées ne sont pas efficaces lorsque l'on considère le bien-être de Nash. On peut formuler ce problème par un modèle mathématique utilisant les variables x_{ar}, qui décrivent la possession d'une ressource $r \in \mathcal{R}$ par un agent $a \in \mathcal{P}$:

$$x_{ar} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ possède } r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad r \in \mathcal{R}, a \in \mathcal{P}.$$

Alors, le problème d'allocation de Nash peut être exprimé de la manière suivante :

$$sw_n^\star = \begin{cases} \max \prod_{a \in \mathcal{P}} \sum_{r \in \mathcal{R}} u_a(r) x_{ar} \\ \text{tq : } \sum_{a \in \mathcal{P}} x_{ar} = 1 \qquad r \in \mathcal{R} \\ \qquad x_{ar} \in \{0, 1\} \quad r \in \mathcal{R}, a \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

La fonction du bien-être de Nash n'a pas de propriétés mathématiques intéressantes. En effet, cette fonction n'est ni concave, ni convexe, ni linéaire. L'utilisation des techniques d'optimisation classiques n'est pas possible ici.

Dans un tel cas, la première idée est de transformer cette fonction complexe en une plus simple, ayant des propriétés intéressantes. L'idée la plus répandue est d'utiliser la propriété particulière de la fonction logarithme ($log(a * b) = log(a) + log(b)$) pour transformer le produit en somme. Le but de cette manipulation est de se rapprocher d'un cas bien connu, facile à résoudre : le bien-être utilitaire. Mais cette transformation ne facilite pas pour autant la résolution ! En effet, le logarithme n'est pas une fonction linéaire, et il n'est pas plus facile d'optimiser une telle somme. Ainsi, cette transformation change une fonction complexe en une autre, qu'il n'est pas plus facile de résoudre.

Puisque les techniques basées sur la programmation linéaire ne semblent pas efficaces, nous pouvons chercher du côté des méthodes constructives, basées sur la recherche d'une solution optimale d'une sous-partie du problème pour résoudre ensuite le problème global.

2.4 Incrémentalité impossible

Les méthodes constructives sont basées sur une idée simple : utiliser une solution optimale d'un sous-problème pour construire une solution optimale au problème complet. Un sous-problème ne considère qu'une partie des ressources $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$, et détermine une allocation Nash-optimale pour $\mathcal{R}'$. De nouveaux éléments $\rho \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'$ sont ajoutés au sous-problème, et nous cherchons alors à adapter la solution optimale du sous-problème afin de trouver une solution optimale au nouveau problème.

Proposition 1 (Pas de méthode constructive)**.** *Il n'est pas possible de déterminer un optimum global du problème complet à partir d'une solution optimale d'un sous-problème.*

Démonstration. Prouvons cette proposition en construisant un contre-exemple. Soient les ensembles $\mathcal{P} = \{a_1, a_2\}$ et $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$. Les préférences des agents sont définies de la manière suivante :

$u_{a_i}(r_j)$		$\mathcal{R}$		
		r_1	r_2	r_3
$\mathcal{P}$	a_1	4	3	4
	a_2	2	4	7

Considérons maintenant le sous-problème consistant à allouer de manière optimale $\mathcal{R}' = \{r_1, r_2\}$ à $\mathcal{P}$. Ici, seules quatre allocations sont possible. Celle maximisant le bien-être de Nash est : $A = [\{r_1\}\{r_2\}]$ et vaut $sw_n(A) = 4 \times 4 = 16$. Déterminons maintenant l'optimum global du problème complet. Huit allocations sont désormais possibles, et l'optimum global est : $A' = [\{r_1 r_2\}\{r_3\}]$ qui vaut $sw_n(A') = 7 \times 7 = 49$. Afin d'obtenir l'optimum global A', il est indispensable de ré-allouer les ressources allouées précédemment dans A. Il n'est ainsi pas possible de déterminer un optimum global de manière constructive. □

Cette proposition explique pourquoi les algorithmes de branchement *branch& bound* ne sont pas efficaces. Les conséquences sur la conception d'algorithmes de résolution sont importantes.

Notons que cette proposition est toujours valide lorsque l'on considère le bien-être égalitaire, mais pas dans le cas du bien-être utilitaire ou du bien-être élitiste.

2.5 Non fiabilité des heuristiques

Puisqu'à la fois les méthodes centralisées et les méthodes constructives ne donnent pas de bons résultats, une solution va être d'utiliser une approche distribuée. Mais là encore, le bien-être de Nash pose un problème. En effet, l'évaluation de la solution est essentielle dans le cadre distribué. Or, il est difficile de connaître la valeur optimale du bien-être de Nash (pas d'approche centralisée possible). Dans ce cadre, la conception d'heuristiques peut représenter une alternative attrayante pour estimer la valeur optimale du bien-être de Nash.

Nous avons implémenté et comparé par paires de nombreuses heuristiques. Celle obtenant le plus souvent les meilleurs résultats est constituée de deux étapes. D'abord, chaque ressource est allouée à un des agents qui lui attribue la plus grande valeur. Ensuite, on vérifie que tous les agents possèdent au moins une ressource. Sinon, parmi ceux possédant au moins deux ressources, on recherche la ressource qui maximise le produit des utilités individuelles des deux agents impliqués.

Puisque ces algorithmes sont des heuristiques, ils ne font qu'estimer la valeur optimale du bien-être de Nash. Il est normal de s'interroger sur la qualité des solutions fournies par ces heuristiques. Une comparaison relative entre les valeurs données par chacune n'est pas suffisante. Il est en effet possible que la meilleure heuristique ne délivre qu'une solution très éloignée de l'optimum global. Or, le seul moyen pour garantir qu'une solution est optimale, est l'énumération explicite. Seules de très petites instances peuvent être résolues. Dans les autres cas, où la population est importante et l'ensemble de ressources conséquent, il n'est pas possible de garantir la fiabilité des résultats fournis.

Nous nous sommes focalisés sur les problèmes d'allocations où les ressources ne sont pas allouées initialement aux agents. Puisque les techniques centralisées ne sont pas applicables en pratique, d'autres méthodes basées sur des négociations entre agents ont été développées.

2.6 Rationalité individuelle et efficacité

Dans les approches distribuées, les agents sont souvent supposés autonomes. L'allocation de ressources initiale évolue petit à petit, grâce à des transactions locales entre les agents. Au lieu d'une entité centrale qui décide comment allouer les ressources, la décision est prise par les agents eux-mêmes. Chaque agent doit donc pouvoir déterminer localement si une transaction est profitable ou non. Cette prise de décision est basée sur un critère d'acceptabilité.

Dans la littérature (e.g. [10]), le critère le plus couramment utilisé est la *rationalité individuelle* : seule la satisfaction personnelle de l'agent est prise en compte. Il est principalement utilisé pour des agents égoïstes.

Définition 5 (Agent rationnel)**.** Un agent rationnel accepte seulement une transaction qui augmente sa propre utilité. Si un agent $a_i \in \mathcal{P}$ est rationnel, une transaction acceptable doit satisfaire la condition suivante :

$$u_{a_i}(\mathcal{R}'_{a_i}) > u_{a_i}(\mathcal{R}_{a_i}), \quad a_i \in \mathcal{P}, \mathcal{R}_{a_i}, \mathcal{R}'_{a_i} \subseteq \mathcal{R}.$$

Ce critère d'acceptabilité est uniquement basé sur des informations personnelles, ce qui rend son calcul aisé. Cependant, ne considérer que le bien-être individuel des agents est inefficace si l'on veut atteindre des allocations socialement optimales. En effet, en général peu de transactions rationnelles peuvent être effectuées et la population reste ensuite dans une situation socialement pauvre.

Exemple 2. Pour illustrer ceci, considérons un petit exemple basé sur $\mathcal{P} = \{a_1, a_2\}$ et $\mathcal{R} = \{r_1, r_2\}$. Les préférences des agents sont définies de la manière suivante :

$u_{a_i}(r_j)$		$\mathcal{R}$ r_1	r_2
$\mathcal{P}$	a_1	1	4
	a_2	10	5

Supposons que l'allocation de ressources initiale soit $A = \big[\{r_1\}\{r_2\}\big]$ qui vaut $sw_n(A) = 5$. À partir de cette allocation, aucune transaction rationnelle ne peut être effectuée. Aucun don n'est rationnel puisque les valeurs des utilités sont positives : tout don de ressources entraînerait une diminution du bien-être individuel de son propriétaire. De même, le seul échange possible diminuerait également le bien-être individuel de l'agent a_1 de 5 à 4.

Cependant, il existe une allocation associée à une valeur sociale plus importante. En effet, $A' = \big[\{r_2\}\{r_1\}\big]$ vaut : $sw_n(A') = 40$. Cet optimum global ne peut être atteint au moyen de transactions rationnelles.

Cet exemple illustre à quel point les ressources ont tendance à rester facilement dans le panier d'un agent, et ainsi empêcher l'atteinte d'un optimum global. Comme montré dans [8], selon les paramètres de négociation, l'efficacité sociale des négociations rationnelles n'excède jamais 20% de l'optimum global.

Notons que ce résultat sur l'efficacité de la *rationalité individuelle* en pratique est valide indépendemment de la notion de bien-être social considérée.

2.7 Restrictions sur les transactions

Une transaction est caractérisée par le nombre d'agents impliqués et par le nombre de ressources que chacun peut offrir. Deux familles de transactions existent : les transactions *bilatérales* et les transactions *multilatérales*.

Les transactions bilatérales n'impliquent que deux agents à la fois : l'initiateur et son partenaire. Différents types de transactions bilatérales ont été répertoriés dans [10]. C'est la famille de transactions la plus utilisée à l'heure actuelle. Les transactions multilatérales peuvent impliquer plusieurs agents à la fois [5], mais sont rarement utilisées en pratique car leur identification est un problème complexe qui ne peut être résolu efficacement de manière distribuée. Le nombre de transactions possibles augmente exponentiellement en fonction du nombre d'agents impliqués. Ainsi, en pratique, des restrictions sur le nombre de participants sont souvent imposées pour réduire la complexité. Cependant, restreindre les transactions peut empêcher l'atteinte une solution optimale.

Proposition 2. *Au sein d'une population $\mathcal{P}$ de n agents, une transaction impliquant simultanément n agents peut être nécessaire pour atteindre une allocation globalement optimale.*

Corollaire 1. *Restreindre le nombre d'agents pouvant être impliqués simultanément dans une transaction peut empêcher l'atteinte d'une solution globalement optimale.*

Démonstration. Pour prouver cette proposition, considérons un contre-exemple basé sur $\mathcal{P} = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$. Les préférences des agents sont définies comme suit :

$u_{a_i}(r_j)$		$\mathcal{R}$ r_1	r_2	r_3
$\mathcal{P}$	a_1	2	1	5
	a_2	1	2	5
	a_3	1	5	2

Supposons que l'allocation de ressources initiale soit $A = \big[\{r_1\}\{r_2\}\{r_3\}\big]$, qui vaut $sw_n(A) = 8$. Aucun chemin de transactions acceptables ne mène à une meilleure allocation. En effet, les dons ne sont pas rationnels et tous les échanges entraînent une diminution du bien-être individuel d'un des agents impliqués. Par conséquent, cette allocation est une $\mathcal{T}$-optimum ($\mathcal{T}$ = {don, échange}). Cette allocation n'est pas un optimum global puisqu'il existe $A' = \big[\{r_3\}\{r_2\}\{r_1\}\big]$ valant $sw_n(A') = 125$.

La seule possibilité d'atteindre l'optimum global est une transaction multilatérale impliquant tous les agents, ce qui correspond à trois dons simultanés. En effet, si les trois agents donnent une ressource à un participant et en reçoivent une de la part d'un autre partenaire simultanément, ils augmentent tous leur utilité individuelle. Par conséquent, limiter le nombre d'agents pouvant être impliqués dans une transaction peut empêcher l'atteinte d'un optimum global. □

Cette propriété est également satisfaite lorsqu'une autre fonction de bien-être ou un autre critère d'acceptabilité est considéré.

2.8 Décomposition des transactions

Afin d'identifier une transaction acceptable en un temps raisonnable, le nombre maximum de ressources que les agents peuvent offrir est souvent restreint. Par exemple, une restriction à une seule ressource signifie que les agents ne peuvent plus effectuer que des dons ou des échanges (une ressource contre rien, ou une ressource contre une autre). Cependant, une question peut être soulevée : quel est l'impact de ces restrictions sur l'efficacité des négociations ?

Proposition 3 (Décomposition des transactions)**.** *Une transaction acceptable ne peut pas toujours être décomposée en une séquence de transactions acceptables de cardinalité inférieure.*

Démonstration. Prouvons cette proposition par un contre-exemple. Considérons pour cela une population de deux agents $\mathcal{P} = \{a_1, a_2\}$ et un ensemble de deux ressources $\mathcal{R} = \{r_1, r_2\}$. Les préférences des agents sont définies comme suit :

$u_{a_i}(r_j)$		$\mathcal{R}$	
		r_1	r_2
$\mathcal{P}$	a_1	1	7
	a_2	7	1

Supposons que l'allocation de ressources initiale soit $A = \big[\{r_1\}\{r_2\}\big]$ qui vaut $sw_n(A) = 1$. Un échange est acceptable pour les deux participants, augmentant leur bien-être individuel. Cela mène le système à une allocation $A' = \big[\{r_2\}\{r_1\}\big]$, qui vaut $sw_n(A') = 49$.

Cependant, cette transaction acceptable δ ne peut être décomposée en une séquence de transactions acceptables de cardinalité inférieure. La seule façon de décomposer un échange est une séquence de deux dons consécutifs. Or, les dons ne peuvent être rationnels puisque les valeurs d'utilité sont toutes positives. Ainsi, une transaction rationnelle ne peut pas toujours être décomposée en une séquence de transactions acceptables de cardinalité inférieure. □

La première conséquence de cette proposition est assez évidente : les transactions de large cardinalité ne peuvent être décomposée en une séquence de transactions acceptables de cardinalité inférieures, et donc en une séquence de dons. Cette proposition établit également que les transactions impliquant beaucoup de ressources sont nécessaires pour pouvoir garantir l'atteinte d'une allocation socialement optimale. Il peut en effet être nécessaire pour deux agents d'échanger la totalité de leurs paniers de ressources respectifs pour atteindre un optimum global.

Ces résultats ont été prouvés dans le cadre d'agents rationnels, mais les contre-exemples peuvent être conçus pour d'autres critères d'acceptabilité.

2.9 Importance du graphe d'accointances

Dans la plupart des études basées sur des négociations entre agents (e.g. [1, 4]), les capacités de communication des agents ne sont pas restreintes. Un agent peut ainsi négocier avec tous les autres agents de la population, alors que ce n'est pas vrai dans la plupart des applications. Par exemple, dans un réseau pair-à-pair, un pair ne connaît pas tous les autres pairs du réseau. Dans un réseau social sur Internet, une personne ne connaît pas tous les autres membres du réseau. Dans de telles applications, un agent n'est même pas conscient du système complet, et doit baser ses décisions sur des informations locales seulement.

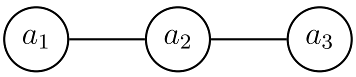
Les études faites jusqu'à présent qui considèrent des restrictions sur les capacités de communication des agents adressent d'autres problèmes. Certains travaux portent sur la notion d'envie dans un réseau [2] et d'autres s'intéressent à l'allocation de tâches sur un réseau d'un point de vue utilitaire [3]. Il est donc légitime de s'interroger sur l'importance d'un tel paramètre. Un processus de négociation, qui mène à un optimum global lorsque les communications ne sont pas restreintes, peut ne mener qu'à une solution éloignée de l'optimum lorsque les communications sont restreintes.

Proposition 4 (Impact du graphe d'accointances)**.** *Un graphe d'accointances restreint peut empêcher l'atteinte d'une solution optimale.*

Démonstration. Prouvons cette proposition en utilisant un contre-exemple, basé sur une population $\mathcal{P} = \{a_1, a_2, a_3\}$ et un ensemble de ressources $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$. Les préférences des agents sont définies comme suit :

$u_{a_i}(r_j)$		$\mathcal{R}$: r_1	r_2	r_3
$\mathcal{P}$	a_1	3	1	9
	a_2	1	4	1
	a_3	10	2	3

Le graphe d'accointances décrivant les capacités de communication de chacun des agents est définit de la manière suivante :



D'après la topologie du réseau d'accointances, l'agent a_2 peut communiquer avec les agents a_1 et a_3, alors qu'ils ne peuvent communiquer qu'avec l'agent a_2. L'allocation initiale est $A = \big[\{r_1\}\{r_2\}\{r_3\}\big]$ et vaut $sw_n(A) = 36$.

Deux échanges de ressources sont possibles. Les agents a_1 et a_2 peuvent s'échanger r_1 et r_2, ou bien les agents a_2 et a_3 peuvent s'échanger les ressources r_2 et r_3. Ces deux échanges entraînent une diminution de l'utilité d'au moins un participant. Ainsi, aucun échange acceptable n'est possible.

Cependant, l'allocation A n'est pas optimale puisque un échange des ressources r_1 et r_3 entre les agents a_1 et a_3 ménerait à une meilleure allocation $A' = \big[\{r_3\}\{r_2\}\{r_1\}\big]$, valant $sw_n(A') = 360$. Ainsi, en raison des restrictions topologiques du réseau d'accointances, le processus de négociation ne peut atteindre un optimum global. $\square$

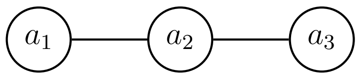
Restreindre les capacités de communication des agents a également des conséquences indirectes sur les négociations. Alors que l'ordre dans lequel les agents négocient n'a pas grande importance quand les communications ne sont pas restreintes, cet ordre devient un paramètre essentiel lorsque l'on considère le réseau d'accointances.

Proposition 5 (Ordre des négociations)**.** *L'ordre dans lequel les agents négocient entre eux peut empêcher l'atteinte d'une allocation de ressources optimales.*

Démonstration. Cette proposition peut être prouvée par un contre-exemple. Soient une population $\mathcal{P} = \{a_1, a_2, a_3\}$ et un ensemble de ressources $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$. Les préférences des agents sont définies comme suit :

$u_{a_i}(r_j)$		$\mathcal{R}$: r_1	r_2	r_3
$\mathcal{P}$	a_1	2	10	4
	a_2	5	3	9
	a_3	2	7	1

Les capacités de communication des agents sont définies par le graphe d'accointances suivant :



L'allocation de ressources initiale est $A = \big[\{r_1\}\{r_2\}\{r_3\}\big]$ et vaut $sw_n(A) = 6$.

Supposons que l'agent a_2 initie une négociation. D'après le graphe d'accointances, deux partenaires sont possibles et selon le partenaire choisi, le processus de négociation peut finir sur une allocation sous-optimale. En effet, si l'agent a_2 négocie d'abord avec l'agent a_1, l'allocation atteinte est $A' = \big[\{r_2\}\{r_1\}\{r_3\}\big]$ qui vaut $sw_n(A') = 50$, alors que si l'agent a_3 est choisi, l'allocation atteinte est $A'' = \big[\{r_1\}\{r_3\}\{r_2\}\big]$ et vaut $sw_n(A'') = 126$.

Par conséquent, l'ordre des négociations devient un paramètre important qu'il faut prendre en compte lorsque les capacités de communication des agents sont restreintes. $\square$

Dans cette section, nous avons montré qu'il est important de considérer un réseau d'accointances entre les agents, comme c'est le cas dans de nombreuses applications. Ces restrictions représentent des hypothèses de travail plus plausibles, mais qui ont un impact important sur l'efficacité des négociations. Les caractéristiques du réseau d'accointances et l'ordre dans lequel les agents négocient peuvent empêcher l'atteinte d'une allocation optimale. En dépit de leurs impacts significatifs, ces deux paramètres n'ont pas été considérés jusqu'à présent.

3 Notre approche distribuée

Dans la section précédente, nous avons présenté les idées reçues concernant les problèmes d'allocation de ressources de Nash. Nous présentons maintenant le paramétrage du comportement des agents afin qu'ils puissent résoudre efficacement ce problème par négociations.

3.1 Les transactions bilatérales

Puisque les transactions bilatérales ont un plus faible coût computationnel, et donc sont les plus à même d'être utilisées en pratique, nous avons choisi de nous restreindre à des transactions bilatérales. Elles peuvent être modélisées de manière générique par le nombre de ressources que chacun des agents peut offrir.

Définition 6 (Transaction bilatérale)**.** Une transaction bilatérale entre deux agents $a_i, a_2 \in \mathcal{P}$, notée $\delta_{a_i}^{a_j}$, est initiée par l'agent a_i qui implique un partenaire a_j. C'est un couple $\delta_{a_i}^{a_j}\langle u, v\rangle = (\rho_{a_i}^{\delta}, \rho_{a_j}^{\delta})$, où l'initiateur a_i offre un ensemble $\rho_{a_i}^{\delta}$ de u ressources ($\rho_{a_i}^{\delta} \subseteq \mathcal{R}_{a_i}$) et son partenaire a_j propose un ensemble $\rho_{a_j}^{\delta}$ de v ressources ($\rho_{a_j}^{\delta} \subseteq \mathcal{R}_{a_j}$).

3.2 La sociabilité

Le critère d'acceptabilité est indispensable dans la conception d'un processus de négociation fini. Il permet aux agents de distinguer les transactions profitables des autres mais aussi au système de s'arrêter. Le critère le plus utilisé, la *rationalité individuelle*, n'est pas efficace et mène à des solutions éloignées de l'optimum. Nous proposons un nouveau critère plus flexible.

Définition 7 (Transactions sociales)**.** Une transaction sociale δ, qui change une allocation initiale A en une nouvelle A', est une transaction qui augmente le bien-être de la société.

$$\begin{aligned} sw_n(A) &< sw_n(A'), A, A' \in \mathcal{A} \\ \iff \prod_{a_k \in \mathcal{P}} u_{a_k}(\mathcal{R}_{a_k}) &< \prod_{a_k \in \mathcal{P}} u_{a_k}(\mathcal{R}'_{a_k}) \\ \iff u_{a_i}(\mathcal{R}_{a_i}) u_{a_j}(\mathcal{R}_{a_j}) &< u_{a_i}(\mathcal{R}'_{a_i}) u_{a_j}(\mathcal{R}'_{a_j}) \end{aligned}$$

Le critère d'acceptabilité social est basé sur la notion sociale considérée, qui est globale. Sa valeur ne peut être déterminée que grâce à l'utilité de tous les agents. Tous les agents devraient alors être omniscient. Mais le calcul de la valeur de bien-être n'est pas indispensable, connaître son évolution est suffisant pour savoir si une transaction est profitable ou non. De tels calculs peuvent être réalisés de manière locale, si les participants considèrent le reste de la population comme constant.

3.3 Le réseau d'accointances

Les méthodes de résolution basées sur des systèmes multi-agents peuvent considérer des notions de *voisinage* et de *graphe d'accointances*.

Définition 8 (Voisinage)**.** Le voisinage d'un agent $a_i \in \mathcal{P}$, noté $\mathcal{N}_{a_i}$, est un sous-ensemble de la population $\mathcal{P}$ avec qui il est possible de communiquer.

Un graphe de relations, également appelé réseau d'accointances, est une union du voisinage de tous les agents. Il décrit les possibilités de communication au sein d'une population. Dans un tel graphe, les nœuds représentent les agents, et un lien entre deux nœuds signifie que les agents correspondants sont capable de communiquer. Différentes classes de réseaux peuvent être considérées : les graphes *complets*, les graphes *structurés* (e.g. les grilles) où tous les agents ont le même nombre de voisins, et les graphes *aléatoires* (Erdős-Rényi , petits-mondes) où la topologie est irrégulière.

3.4 Le comportement des agents

Lorsqu'un initiateur fait une offre à son partenaire et qu'elle est refusée, il peut soit interrompre la négociation, soit changer de partenaire, soit changer son offre. Combiner ces alternatives permet de concevoir différents comportements comme *frivole* ou *fixé* si l'agent peut ou non proposer une offre à plusieurs voisins, *flexible* ou *têtu* si l'agent peut ou non modifier son offre, … D'après nos expérimentations, le comportement menant les processus de négociation aux meilleurs résultats est celui combinant flexibilité et frivolité.

3.5 Efficacité des négociations

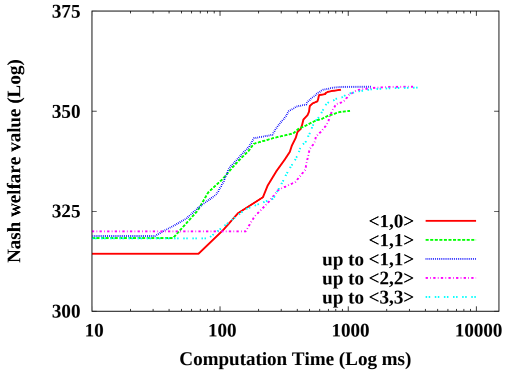


FIGURE 1 – Efficacité des négociations vs. temps de calcul en fonction de la cardinalité

Le premier paramètre à évaluer est la cardinalité des transactions. Une transaction bilatérale $\delta_{a_i}^{a_j}\langle u, v\rangle$ entre deux agents $a_i, a_j \in \mathcal{P}$ est caractérisée par la taille des offres faites u et v. Les expériences sont basées sur une population de 50 agents qui négocient 250 ressources. Les différentes politiques de négociation utilisées sont caractérisées par les cardinalités des offres des participants. La politique de négociation notée “up to $\langle 2, 2\rangle$” signifie que chaque agent peut offrir jusqu'à deux ressources durant dans la même transaction. Les fonctions d'utilité ainsi que les allocations initiales sont générées aléatoirement. Les figures 1 et 2 montrent l'évolution du bien-être de Nash durant le processus de négociation selon la cardinalité des transactions.

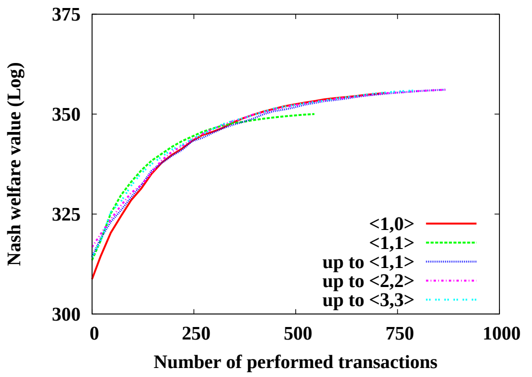


FIGURE 2 – Efficacité des négociations vs. transaction effectuée en fonction de la cardinalité

La figure 1 montre que les processus de négociation basés sur des dons (i.e. transactions $\langle 1, 0\rangle$) nécessitent moins de temps et de transactions. Plus les transactions autorisées sont larges, plus les processus de négociation prennent de temps. Cependant, selon la figure 2 représentant le nombre de transactions effectuées, les transactions plus larges n'améliorent pas significativement la qualité des solutions. Les négociations reposant sur des échanges (i.e. transactions $\langle 1, 1\rangle$) se finissent après un faible nombre de transactions mais atteignent également des solutions beaucoup moins intéressantes. Les autres processus de négociation se terminent après des séquences de transactions de longueur similaire. L'utilisation de larges transactions bilatérales n'améliore pas significativement les solutions, et donc ne justifie pas les importants surcoûts engendrés.

L'efficacité des négociations doit également être évaluée, au moyen d'une comparaison avec l'estimation faite par des techniques centralisées. Le tableau 1 montre l'efficacité des processus de négociation selon le type de graphe d'accointances [7] ainsi que l'écart type observé. Ce tableau montre que certaines valeurs de bien-être peuvent être supérieures à 100%. Puisque les heuristiques ne donnent qu'une estimation du bien-être de Nash, une efficacité supérieure à 100% signifie que le processus de négociation mène à des allocations plus intéressantes que celles fournies par les heuristiques.

Les négociations rationnelles aboutissent à des allocations socialement plus faibles que les négociations sociales et ont un écart-type plus important, ce qui indique une répartition plus inéquitable des ressources dans la population. Par ailleurs, que les négociations soient rationnelles ou sociales, les politiques de négociation basées sur $\mathcal{T} = \{\langle u, v\rangle | u \leq 1, v \leq 1\}$ et sur $\mathcal{T} = \{\langle u, v\rangle | u \leq 2, v \leq 2\}$ mènent aux mêmes résultats. En conséquence, autoriser les dons et les échanges est suffisant pour atteindre des allocations efficaces. En revanche, les négociations basées sur des échanges uniquement (sans autoriser les dons) mènent à des allocations socialement très faibles. En effet, la répartition initiale des ressources ne pouvant pas être modifiée, les négociations finissent rapidement dans des optima locaux. De plus, dans ce cas, l'écart-type est beaucoup plus élevé.

Les processus de négociation basés sur des grilles mènent à des allocations plus faibles. La connectivité moyenne des réseaux d'accointances est une caractéristique importante, affectant l'efficacité des négociations. Les capacités de communication des agents sont trop restreintes pour permettre une circulation efficace des ressources, et empêche donc l'atteinte de solutions optimales. La comparaison entre les résultats obtenus sur des graphes Erdős-Rényi

TABLE 1 – Efficacité des négociations (%) et écart-type selon le type de graphe

Social graph	Rational				Social							
kind	$\langle 1,1\rangle$		up to $\langle 2,2\rangle$		$\langle 1,0\rangle$		$\langle 1,1\rangle$		up to $\langle 1,1\rangle$		up to $\langle 2,2\rangle$	
Complet	99.9	0.33	100.1	0.27	101.6	0.06	100.1	0.31	101.7	0.02	101.7	0.02
Grille	97.0	0.44	97.5	0.40	99.6	0.14	98.2	0.37	99.7	0.14	99.7	0.14
Erdős-Rényi	99.6	0.33	99.8	0.28	101.4	0.6	99.9	0.32	101.6	0.2	101.6	0.2
Petit-monde	97.2	0.46	98.0	0.38	100.2	0.13	98.9	0.37	100.40	0.12	100.4	0.12

et sur des petits-mondes indique qu'un grand nombre d'agents ayant un petit voisinage pénalise beaucoup les processus de négociation.

Les expérimentations que nous avons mené nous permettent donc de clarifier les politiques les plus efficaces pour atteindre un bien-être global satisfaisant. Les négociations entre agents sociaux mènent à des allocations plus intéressantes que celles atteintes par des agents rationnels. Autoriser à la fois les dons et les échanges (i.e. $\mathcal{T} = \{\langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$) peut être considéré comme la meilleure politique de négociation. Restreindre encore plus la cardinalité des transactions autorisées n'est pas efficace alors que l'utilisation de transactions plus larges n'améliore pas significativement le résultat alors que le coût explose. Cependant, l'utilisation des transactions bilatérales n'est pas suffisante pour garantir l'atteinte d'un optimum global, mais mène tout de même à des allocations socialement très proches.

3.6 Conclusion

Parmi les nombreuses possibilités permettant d'évaluer le bien-être d'une société vis-à-vis d'une allocation de ressources en connaissant les préférences des agents, nous nous sommes intéressés dans cet article au bien-être de Nash. En effet, cette évaluation représente un bon compromis entre satisfaction individuelle des agents et satisfaction globale de la société. Malgré ses bonnes propriétés, le bien-être de Nash est rarement utilisé en pratique pour des raisons de calculabilité. Nous avons présenté dans cet article les idées reçues les plus répandues sur le problème d'allocation de Nash. Nous avons montré l'inefficacité des techniques d'optimisation classiques et l'impossibilité de décomposer le problème en sous-problèmes solubles. La seule solution pratique pour tenter d'approcher l'optimal est donc une approche centrée individus de type multi-agents. La seconde partie décrit la méthode que nous proposons afin de résoudre efficacement le problème d'allocation de Nash, en utilisant des négociations entre agents. Nous avons spécifié les paramètres à utiliser afin d'obtenir une séquence de transactions menant à des solutions proches de l'optimum. N'importe quel type de réseau d'accointances peut être considéré, et le critère de décision des agents n'est basé que sur des informations locales. De telles hypothèses correspondent à un contexte bien plus réaliste que celui utilisé habituellement. Nous fournissons également le comportement, le critère d'acceptabilité, et le type de transaction à utiliser pour atteindre des allocations $\mathcal{T}$-optimales.

Références

[1] Y. Chevaleyre, P. Dunne, U. Endriss, J. Lang, M. Lemaitre, N. Maudet, J. Padget, S. Phelps, J. Rodriguez-Aguilar, and P. Sousa. Issues in Multiagent Resource Allocation. *Informatica*, 30(1) :3, 2006.

[2] Y. Chevaleyre, U. Endriss, and N. Maudet. Allocating goods on a graph to eliminate envy. In *AAAI'2007*, volume 22(1), pages 700–705, 2007.

[3] M. de Weerdt, Y. Zhang, and T. Klos. Distributed task allocation in social networks. In *AAMAS'2007*, pages 1–8, 2007.

[4] U. Endriss, N. Maudet, F. Sadri, and F. Toni. Negotiating Socially Optimal Allocations of Resources. *JAIR*, 25 :315–348, 2006.

[5] M. Hemaissia, A. El Fallah Seghrouchni, C. Labreuche, and J. Mattioli. A Multilateral Multi-Issue Negotiation Protocol. In *AAMAS'07*, pages 1–8, 2007.

[6] H. Moulin. *Fair Division and Collective Welfare*. MIT Press, 2004.

[7] A. Nongaillard. *An Agent Based Approach for Distributed Resource Allocations*. PhD thesis, Université Lille 1 and Concordia University, 2009.

[8] A. Nongaillard, P. Mathieu, and B. Jaumard. A realistic approach to solve the nash welfare. In *PAAMS'2009*, volume 55, pages 374–382, 2009.

[9] S. Ramezani and U. Endriss. Nash Social Welfare in Multiagent Resource Allocation. In *AMEC'09*, 2009.

[10] T. Sandholm. Contract Types for Satisficing Task Allocation : I Theoretical Results. In *AAAI Spring Symposium : Satisficing Models*, volume 99, pages 68–75, 1998.

[11] T. Sandholm. Algorithm for optimal winner determination in combinatorial auctions. *Artificial Intelligence*, 135(1-2) :1–54, 2002.