
Problèmes d'allocation de ressources et bien-être de Nash

Résolution par négociation entre agents

Antoine Nongaillard – Philippe Mathieu – Patricia Everaere

*Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille
Bât. M3, 59655 Villeneuve d'Ascq, France
prenom.nom@lifl.fr*

RÉSUMÉ. Allouer m ressources entre n agents, de façon à optimiser leur bien-être, est un problème qui peut souvent être résolu de manière centralisée. Cependant, pour certaines fonctions de bien-être social, une résolution centralisée n'est pas envisageable. Par exemple, le bien-être de Nash est une fonction qui a d'indéniables qualités mais qui ne peut être optimisée de manière classique. De plus, de nombreuses applications reposent sur des hypothèses qui ne peuvent pas être prises en compte par ces techniques centralisées alors que d'autres méthodes le permettent, comme les approches multi-agents. Après une présentation du problème multi-agents d'allocation de ressources, nous mettons en évidence les difficultés liées aux techniques centralisées et distribuées existantes. Nous proposons une méthode s'appuyant sur la notion de transaction sociale que nous revendiquons être la seule méthode « anytime » capable de résoudre efficacement le problème d'allocation de Nash.

ABSTRACT. Solving the allocation of m resources between n agents is a problem which has been mainly studied in a centralized way. However, some welfare functions cannot be addressed by such approaches. The Nash welfare, which has interesting qualities cannot be solved in such a way. Moreover, many real problems rely on aspects that cannot be handled by centralized techniques whereas multiagent methods are efficient. After having presented the multiagent allocation problem, we show the difficulties of centralized and distributed approaches. We propose a solving method based on social transactions and we claim that our anytime solving method is the only one able to effectively address this problem of obvious practical interests.

MOTS-CLÉS : allocation de ressources, négociation, simulation, bien-être de Nash.

KEYWORDS: multiagent resource allocation, negotiation, simulation, Nash welfare.

1. Introduction

Les problèmes d'allocation de ressources se retrouvent souvent dans la vie courante au travers de très nombreuses applications, et suscitent donc un intérêt croissant. Leur but est de déterminer la meilleure manière de distribuer un ensemble de ressources aux membres d'une population afin d'optimiser un objectif donné. Cette apparente simplicité cache en réalité un problème très riche et complexe, dont la résolution se heurte à des problèmes de complexité calculatoire exponentielle. De nombreuses études ont été réalisées aussi bien de manière centralisée (Sandholm, 2002; Cramton *et al.*, 2006; Peters *et al.*, 2010) que distribuée (Sandholm, 1998; Chevaleyre *et al.*, 2006a; Endriss *et al.*, 2006; Chevaleyre *et al.*, 2010; Nongaillard *et al.*, 2010) sous des hypothèses et des objectifs très variés.

Dans cet article, nous nous intéressons en particulier au bien-être de Nash (Kaneko *et al.*, 1979; Moulin, 1988; Arrow *et al.*, 2002). Cette fonction de bien-être permet de prendre en compte à la fois la satisfaction moyenne de la société, mais aussi les inégalités au sein d'une population. Dans (Moulin, 2003), l'auteur montre que cette notion possède des propriétés intéressantes sur la distribution des ressources comme l'indépendance des agents non impliqués, le principe des transferts de Pigou-Dalton ou encore l'indépendance vis-à-vis des échelles de valeurs.

En dépit de ses qualités, cette notion a été rarement étudiée jusqu'à maintenant. Nous montrons dans cet article que les méthodes constructives mènent à l'énumération explicite de toutes les allocations possibles, et qu'elles ne sont donc pas utilisables pour résoudre un problème d'allocation de Nash en un temps raisonnable. En effet, un problème d'allocation de m ressources à n agents mène à n^m allocations différentes. Leur énumération explicite n'est donc pas envisageable. Il est nécessaire de concevoir des méthodes alternatives afin de trouver un global-optimum pour les problèmes d'allocation de Nash.

Après une description du contexte d'étude en section 2, la section 3 énumère les idées préconçues et les difficultés liées à la résolution des problèmes d'allocation de ressources, aussi bien de manière centralisée que distribuée. Enfin, la section 4 décrit la méthode de résolution que nous proposons pour résoudre efficacement les problèmes d'allocation de Nash de manière distribuée.

2. Définitions et notations

Un problème d'allocation de ressources est souvent défini à partir d'une population $\mathcal{P}$ de n agents et d'un ensemble $\mathcal{R}$ de m ressources. Chaque agent $i \in \mathcal{P}$ possède un panier R_i contenant les m_i ressources qu'il possède. L'objectif est de trouver comment distribuer les ressources de $\mathcal{R}$ entre les agents de $\mathcal{P}$ afin d'optimiser un objectif donné. De nombreuses notions de bien-être existent dans la littérature, mais dans cet article, nous cherchons à maximiser la valeur du bien-être de Nash.

Les problèmes d'allocation sont caractérisés par de nombreux paramètres qui influent sur leurs propriétés intrinsèques. La moindre différence dans les caractéristiques

de deux problèmes peut mener à des techniques de résolution efficaces fondamentalement différentes, comme par exemple considérer des ressources divisibles ou non. Les sections suivantes sont donc dédiées à la description de notre contexte de travail.

2.1. Allocations de ressources

La nature des ressources est une caractéristique essentielle qui modifie profondément les propriétés du problème. Dans cet article, nous ne nous intéressons qu'à des ressources à la fois uniques et atomiques. Cela signifie qu'un agent ne peut ni diviser ni consommer les ressources de son panier. Dans ce contexte, les allocations de ressources peuvent être définies et caractérisées de la manière suivante :

Définition 2.1 (Allocation de ressources). Soient une population de n agents $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}$ et un ensemble de m ressources $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_m\}$. Une allocation de ressources est une liste ordonnée de n paniers de ressources $R_i \subseteq \mathcal{R}$ décrivant les ressources possédées par chaque agent $i \in \mathcal{P}$:

$$A = [R_1, \dots, R_n], \quad 1, \dots, n \in \mathcal{P}, \quad A \in \mathcal{A},$$

$\mathcal{A}$ est l'ensemble des allocations possibles. D'après la nature des ressources que l'on choisit de considérer ici, une allocation vérifie également les propriétés suivantes :

$$\bigcup_{i \in \mathcal{P}} R_i = \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in \mathcal{P}} R_i = \emptyset.$$

Cette contrainte, peu restrictive, implique néanmoins que les ressources doivent être discrétisées. La gestion d'une ressource en quantité continue (comme de l'électricité par exemple) n'est ici pas prise en compte.

2.2. Les préférences des agents

Un autre paramètre important est la représentation des préférences de chaque agent. Un agent évalue sa satisfaction, aussi appelée son *bien-être individuel* (Sandholm, 1998), grâce à une fonction d'évaluation souvent basée sur divers éléments comme, par exemple, une fonction d'utilité ou un porte-monnaie.

Cependant, au lieu de considérer des porte-monnaie infinis comme dans beaucoup d'études de la littérature (par exemple (Chevalyre *et al.*, 2005)), nous avons choisi de restreindre la fonction d'évaluation à une *fonction d'utilité*. Ainsi, puisque l'argent n'est pas considéré, la satisfaction d'un agent dépend uniquement des ressources qu'il possède. Cette hypothèse peut sembler restrictive mais l'utilisation de paiements compensatoires infinis ne peut pas être considérée comme plausible. En effet, si un agent est aussi riche que nécessaire, n'importe quelle condition peut être satisfaite : toute perte d'utilité peut être compensée par de l'argent. Un tel contexte n'est pas réaliste selon nous.

Les préférences des agents peuvent être modélisées selon différentes représentations (Coste-Marquis *et al.*, 2004; Doyle, 2004; Chevairey *et al.*, 2006b; Bonzon *et al.*, 2009). Dans cet article, les agents expriment leurs préférences par une fonction d'utilité additive ce qui implique que l'utilité correspondante à la possession de plusieurs ressources est calculée par la somme de l'utilité de chacune.

Définition 2.2 (Utility function). Un agent évalue son bien-être individuel grâce à une fonction d'utilité additive $u_i : 2^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$. Si un agent $i \in \mathcal{P}$ possède un panier de ressources $R_i \subseteq \mathcal{R}$, son bien-être individuel peut être calculé par :

$$u_i(R_i) = \sum_{r \in R_i} u_i(r), \quad i \in \mathcal{P}, \quad R_i \subseteq \mathcal{R}.$$

Exemple 2.1. Soient une population de 3 agents $\mathcal{P} = \{ag1, ag2, ag3\}$ et un ensemble de 6 ressources $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_6\}$. Le tableau 1 décrit les préférences des agents : il contient les valeurs d'utilité associées à chaque ressource par chaque agent.

$u_i(r_j)$		Ensemble de ressources $\mathcal{R}$					
		r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
Population $\mathcal{P}$	$ag1$	10	7	10	9	2	1
	$ag2$	6	10	3	4	8	6
	$ag3$	1	2	1	2	1	3

Tableau 1. Exemple de préférences d'agents

Supposons que les ressources soient allouées de la manière suivante : $A = [\{r_4\}\{r_1, r_2, r_6\}\{r_3, r_5\}]$. L'agent $ag1$ ne possède que la ressource r_4 . L'agent $ag2$ possède les ressources r_1, r_2 et r_6 et l'agent $ag3$ possède alors les ressources r_3 et r_5 . D'après le tableau 1, le bien-être individuel de chaque agent peut être calculé de la manière suivante :

$$u_{ag1}(\{r_4\}) = 9$$

$$u_{ag2}(\{r_1, r_2, r_6\}) = 6 + 10 + 6 = 22$$

$$u_{ag3}(\{r_3, r_5\}) = 1 + 1 = 2$$

2.3. Intérêt du bien-être de Nash

La qualité d'une allocation de ressources est souvent évaluée globalement grâce à des notions de la théorie du choix social (Kaneko *et al.*, 1979; Moulin, 1988; Arrow *et al.*, 2002). Ces notions permettent l'évaluation du bien-être d'une population à partir du bien-être individuel des agents de cette population. Différentes notions existent dans la littérature. Le bien-être utilitaire est la notion sociale la plus utilisée. Elle mesure le bien-être moyen d'une population (par la somme des bien-être individuels). Le bien-être égalitaire mesure les inégalités au sein d'une population (en ne considérant que son agent ayant la plus faible satisfaction individuelle). Le *bien-être de Nash*

ou *produit de Nash* considère ces deux aspects à la fois. Il peut être vu comme un compromis entre les bien-être utilitaire et égalitaire. C'est celui sur lequel nous nous focalisons dans cet article.

Définition 2.3 (Le bien-être de Nash). Le bien-être de Nash associé à une allocation de ressources $A \in \mathcal{A}$ se calcule par le produit des bien-être individuels de tous les agents de la population :

$$sw_n(A) = \prod_{i \in \mathcal{P}} u_i(R_i), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Alors que les notions de bien-être utilitaire et égalitaire souffrent d'inconvénients liés à la répartition des ressources, le bien-être de Nash possède des propriétés remarquables. En effet, cette notion est indépendante des échelles de valeurs : modifier les échelles de valeurs des utilités ne modifie pas les comparaisons d'allocations par paire. Aucun agent ne peut être négligé : tous les agents obtiennent au moins une ressource (si $n \leq m$) pour éviter un bien-être individuel nul et donc un bien-être social nul. Cette notion a néanmoins ses limites : elle perd par exemple tout son sens dès que des valeurs d'utilité sont négatives.

Exemple 2.2. Soient une population $\mathcal{P} = \{ag1, ag2, ag3\}$ et un ensemble ressources $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_6\}$. Les préférences des agents sont décrites dans le tableau 1. On peut alors déterminer une allocation de ressources optimale selon trois fonctions de bien-être social différentes, comme décrit dans le tableau 2.

Fonction de bien-être social	Allocation optimale
Utilitaire	$[\{r_1, r_3, r_4\}, \{r_2, r_5, r_6\}, \{\}]$
Égalitaire	$[\{r_1\}, \{r_5\}, \{r_2, r_3, r_4, r_6\}]$
Nash	$[\{r_1, r_3\}, \{r_2, r_5\}, \{r_4, r_6\}]$

Tableau 2. Allocation optimale vs. fonction de bien-être

Le tableau 2 fournit les allocations optimales pour différents bien-être à partir des préférences décrites dans le tableau 1. Il met en évidence l'une des propriétés intéressantes du bien-être de Nash : la répartition équitable. Avec les autres notions de bien-être, certains agents peuvent être complètement négligés et n'obtenir aucune ressource comme dans le cas utilitaire. Dans le cas égalitaire, tous les agents obtiennent au moins une ressource mais il arrive qu'un agent récupère la majorité des ressources afin de compenser ses faibles préférences. Dans le cas du bien-être de Nash, aucun agent n'est négligé et les ressources ne sont pas drainées pour autant. Cette notion permet à la fois de maximiser le bien-être individuel moyen et de minimiser les inégalités entre les agents.

Le bien-être de Nash est donc une notion sociale évaluant différents aspects d'une allocation de ressources. Il a d'indéniables qualités et évite aussi certains inconvénients rencontrés par d'autres notions. Mais pourquoi cette notion si intéressante est-elle rarement utilisée en pratique ?

3. Un problème bien complexe

En dépit de nombreuses idées reçues, déterminer une allocation de ressources maximisant le bien-être de Nash est un problème très complexe. Cette section présente les différents pièges liés aux techniques de résolution centralisées d'abord, puis aux méthodes distribuées basées sur des négociations entre agents.

3.1. Idées reçues dans les techniques centralisées

Les problèmes d'allocation de ressources peuvent évidemment être résolus au moyen de techniques centralisées, mais leurs utilisations nécessitent des conditions particulières qui ne sont pas toujours satisfaites. Par exemple, une entité centrale omnisciente doit exister : elle doit connaître les paniers de ressources et les préférences des agents pour chercher une solution. Les enchères combinatoires (Bachrach *et al.*, 2008; Cramton *et al.*, 2006; Sandholm, 2002) remplissent ces conditions : le commissaire-priseur représente l'entité centrale qui connaît les ressources et les préférences des agents. En revanche, dans le cadre d'applications distribuées comme celles basées sur les réseaux pair-à-pair, ces hypothèses ne sont plus satisfaites. L'entité centrale omnisciente n'existe plus. En effet, un pair n'est même pas conscient de la taille de la population et rassembler les informations nécessaires n'est pas plausible ni même acceptable, en particulier dans le cadre de systèmes dynamiques.

Les techniques centralisées, qui visent à identifier une allocation des ressources maximisant le bien-être de Nash, fournissent des solutions optimales que nous appelons *optima globaux*.

Définition 3.1 (Global-Optimum). Une allocation de ressources $A \in \mathcal{A}$ est un global optimum si il n'existe pas d'autre allocation $A' \in \mathcal{A} (A \neq A')$ fournissant une plus grande valeur de bien-être social :

$$\nexists A' \in \mathcal{A}, \quad sw_n(A') > sw_n(A) \quad A, A' \in \mathcal{A}, \quad A \neq A'.$$

Les sections suivantes présentent quatre familles de techniques centralisées et leurs limites dans le cadre de la résolution de Nash.

3.1.1. . Algorithme exact

Un algorithme exact déterminant une allocation socialement optimale existe toujours. En effet, puisqu'il n'existe qu'un nombre fini d'allocations distinctes, leur énumération explicite est toujours possible. Un tel algorithme peut être écrit de manière très concise en Prolog (Colmerauer *et al.*, 1981) comme décrit dans l'algorithme 1. Cet algorithme permet de trouver l'allocation de ressources maximisant le bien-être de Nash au moyen d'une énumération explicite de toutes les allocations possibles.

Le nombre d'allocations différentes augmente exponentiellement en fonction du nombre de ressources et d'agents. Un tel algorithme devient vite inutilisable, même sur des jeux de données de taille modeste. En effet, depuis la naissance du système solaire

Algorithme 1. *Algorithme d'énumération explicite*

```

% détermination d'une allocation
alloc(_, [], []).
alloc(Ag, [R|Res], [[A,R]|L]) :- alloc(Ag, Res, L),
                                   member(A, Ag).

% bien-être individuel pour une allocation donnée

value(Ag, Alloc, T) :- util(Ag, U),
                      valueBis(U, Ag, Alloc, T).

valueBis(U, Ag, [], 0).
valueBis(U, Ag, [[Ag, Re]|Aff], T) :- !,
                                   valueBis(U, Ag, Aff, T1),
                                   member([Re, V], U),
                                   T is T1+V.
valueBis(U, Ag, [_|_]|Aff], T) :- valueBis(U, Ag, Aff, T).

% Produit de Nash pour une allocation donnée

nash([], Affect, 1).
nash([A|L], Affect, T) :- nash(L, Affect, T1),
                        value(A, Affect, V),
                        T is T1*V.

% détermination de la meilleure allocation

best(Alloc, R) :- ag(La),
                  res(Lr),
                  bagof(X, alloc(La, Lr, X), L),
                  bestBis(La, L, Alloc, R).

bestBis(La, [], [], 0).
bestBis(La, [X|L], X, V) :- bestBis(La, L, _, V2),
                           nash(La, X, V),
                           V>V2, !.
bestBis(La, [_|L], X, V) :- bestBis(La, L, X, V).

% exemple de données

ag([a,b]).
res([r1,r2,r3]).
util(a, [[r1,10],[r2,5],[r3,8]]).
util(b, [[r1,5],[r2,8],[r3,6]]).

% commandes de lancement

ag(La), res(Lr), alloc(La, Lr, Aff), nash(La, Aff, R).
best(X, R).

```

($4.6 \cdot 10^9$ années), à l'aide d'un ordinateur déterminant un million d'allocations par seconde, nous n'aurions résolu qu'un problème de Nash de 10 agents et 23 ressources.

Des techniques alternatives sont donc nécessaires pour trouver un global-optimum pour les problèmes d'allocation de Nash.

3.1.2. Limites de la programmation linéaire

Les méthodes de résolution basées sur la programmation linéaire décrivent le problème sous la forme d'un modèle mathématique. Puisque les ressources que l'on considère ne sont pas divisibles, notre modèle se base sur des variables booléennes x_{ir} décrivant la possession d'une ressource par un agent : $x_{ir} = 1$ si la ressource r appartient à l'agent i , $x_{ir} = 0$ sinon. Le problème de maximisation du bien-être de Nash peut ainsi être formulé de la manière suivante :

$$sw_n^* = \begin{cases} \max \prod_{i \in \mathcal{P}} \sum_{r \in \mathcal{R}} u_i(r) x_{ir} \\ \text{t.q : } \sum_{i \in \mathcal{P}} x_{ir} = 1 & r \in \mathcal{R} \\ x_{ir} \in \{0, 1\} & r \in \mathcal{R}, i \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

On peut voir que la fonction objectif de ce système n'a pas de propriétés intéressantes. En effet, cette fonction n'est ni concave, ni convexe, ni linéaire. Résoudre des problèmes quadratiques (limité à deux agents) est déjà une tâche complexe et les techniques d'optimisation classiques ne sont pas efficaces au-delà.

Afin de contourner ce problème, une idée répandue vise à transformer le produit en somme pour obtenir une expression plus facile à manipuler. L'idée la plus intuitive est d'utiliser une propriété de la fonction *logarithme* pour transformer la maximisation d'un produit en maximisant d'une somme de logarithme.

$$\log(a * b) = \log(a) + \log(b).$$

Malheureusement, cette transformation ne facilite pas la résolution du problème ! En effet, le logarithme n'est pas une fonction linéaire et il n'est pas plus aisé d'optimiser une somme de fonctions non-linéaires. Les outils d'optimisation les plus répandus comme CPLEX ou MATLAB ne sont pas efficaces. Cette transformation change donc un problème complexe en un autre tout aussi complexe.

3.1.3. Programmation dynamique

Puisque la programmation linéaire n'est pas efficace, certains se tournent vers les approches constructives. Le principe est d'utiliser une solution optimale d'un sous-problème comme base pour trouver une solution optimale au problème complet.

Dans le cadre des problèmes d'allocation de ressources, trois types de sous-problèmes sont envisageables. Le premier considère toute la population mais seulement une partie des ressources. Le second considère toutes les ressources mais seulement une partie de la population. Le troisième type de sous-problème considère à la

fois une partie des agents et une partie des ressources. Ne considérer qu'une partie de la population est discutable. En effet, si toutes les ressources sont allouées de manière optimale sur une partie de la population, son extension entraînera forcément la redistribution des ressources déjà allouées. Autrement, tout nouvel agent n'aurait aucune ressource et nuirait ainsi au bien-être de la société (un bien-être individuel nul). Pour toutes ces raisons, seul le premier type de sous-problème sera considéré dans la suite de cette section.

Un sous-problème d'allocation de ressources ne considère qu'un sous-ensemble de ressources $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$, qui est alloué de manière optimale entre les agents de la population $\mathcal{P}$. Ensuite, un nouvel ensemble de ressources $\rho \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'$ est ajouté au sous-problème et il faut alors adapter la solution optimale du sous-problème initial pour déterminer une solution optimale au problème élargi. Par exemple, une technique pourrait consister en l'utilisation de l'algorithme hongrois (Kuhn, 1955) pour allouer une ressource à chaque agent, avant d'allouer les ressources restantes aux agents leur attribuant la plus grande d'utilité. Malheureusement, l'efficacité d'une telle méthode dépendrait fortement des n premières ressources choisies pour être allouées aux agents.

Proposition 3.1 (Pas de méthode constructive). *Il n'est pas possible de déterminer un global-optimum du problème complet à partir d'une solution optimale d'un sous-problème.*

Démonstration. Prouvons cette proposition en construisant un contre-exemple générique. Considérons pour cela une population $\mathcal{P}$ de n agents, un ensemble $\mathcal{R}$ de m ressources et un sous-ensemble de ces ressources $\mathcal{R}' = \{r_1, \dots, r_{k-1}\} \subset \mathcal{R}$ tel que $n < k \leq m$. Les préférences des agents peuvent être définies en utilisant seulement trois coefficients $x, y, z \in \mathbb{N}$ tel que $x < y < z$ de la manière suivante :

$$u_i(r_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } n < j < k \text{ or } k < j \leq m \\ y & \text{if } i = j \text{ or } i = 1, j = n \\ z & \text{if } i = n, j = k \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une solution optimale A au sous-problème ne considérant que $k - 1$ ressources peut être construite de la manière suivante :

$$A = \begin{cases} r_j \in R_j & \text{if } 1 \leq j \leq n \\ r_j \in R_1 & \text{if } n < j < k \end{cases} \implies sw_n(A) = y^n.$$

Chaque agent obtient une ressource qu'il associe à une utilité y . Les ressources r_{n+1} à r_{k-1} n'influent pas sur le résultat puisqu'elles sont associées à des utilités nulles. Toute ressource r_j ($1 \leq j \leq n$) qui n'est pas associée à l'agent j n'apporte que x au bien-être individuel de son possesseur, ce qui mènera à une allocation dont la valeur de Nash sera plus faible.

Étendons maintenant le sous-problème en considérant une ressource supplémentaire à allouer $r_k \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'$.

Il faut donc trouver comment allouer les ressources de $\mathcal{R}^\sim = \mathcal{R}' \cup \{r_k\}$ à partir de la solution optimale A au sous-problème précédent. Notons A' , $A^\sim \in \mathcal{A}$ les deux seules allocations possibles :

$$\begin{cases} r_k \in R_n & \implies sw_n(A') = y^{n-1}(y+z) \\ r_k \in R_i, i \neq n & \implies sw_n(A^\sim) = y^{n-1}(x+y). \end{cases}$$

L'allocation $A^\sim$ est associée au plus grand bien-être de Nash (par la relation liant les coefficients $x < y < z$). Cependant, il existe toujours une meilleure allocation $A^{opt} \in \mathcal{A}$ tel que $sw_n(A^{opt}) = 2y^{n-1}z$:

$$A^{opt} = \begin{cases} r_j \in R_1, & \text{if } j = 1 \text{ or } n \leq j < k \\ r_j \in R_j, & \text{if } 1 < j < n \\ r_j \in R_n & \text{if } j = k. \end{cases}$$

Les relations entre ces trois coefficients nous amènent à déduire que :

$$sw_n(A^{opt}) > sw_n(A^\sim) > sw_n(A') > sw_n(A).$$

Par conséquent, nous pouvons toujours trouver un contre-exemple montrant qu'il n'est pas possible de trouver une solution socialement optimale à partir d'une allocation optimale d'un sous-problème. $\square$

Une autre solution serait d'utiliser un algorithme de *branch-and-bound*. Ces algorithmes peuvent être vus comme des arbres où les nœuds sont des solutions partielles alors que les feuilles sont des allocations complètes. Chaque branche correspond à l'allocation d'une ressource à un agent. À partir de la racine, le processus de résolution consiste à descendre dans l'arbre, en incluant les ressources petit à petit. Dans (Ramezani *et al.*, 2009), les auteurs utilisent une borne supérieure pour couper certaines branches. Cette borne supérieure est égale à la valeur du bien-être de Nash lorsque toutes les ressources restantes sont allouées à tous les agents. Même si cette valeur est effectivement une borne supérieure, sa valeur est si grande qu'elle ne permet pas de couper des branches en pratique. L'algorithme de *branch-and-bound* entraîne alors l'énumération explicite de toutes les allocations.

Exemple 3.1. Considérons 3 agents et 6 ressources. Supposons que tous les agents associent à toutes les ressources une utilité de 2. À la racine de l'arbre, aucune ressource n'a encore été allouée, elles appartiennent donc virtuellement à tous.

$$[\{r_1 \dots r_6\}\{r_1 \dots r_6\}\{r_1 \dots r_6\}] \Rightarrow \overline{sw_n} = 12 \times 12 \times 12 = 1728$$

Descendons dans l'arbre des allocations possibles, en allouant une ressource à la fois. Si d'abord r_1 est allouée à ag_1 , seules les autres ressources r_2 à r_6 appartiennent virtuellement à tous. On obtient la borne supérieure :

$$r_1 \in ag_1 \longrightarrow [\{r_1 \dots r_6\}\{r_2 \dots r_6\}\{r_2 \dots r_6\}] \Rightarrow \overline{sw_n} = 12 \times 10 \times 10 = 1200$$

Si r_2 et r_3 sont respectivement allouée à ag_3 et ag_1 , nous obtenons les bornes supérieures suivantes :

$$r_2 \in ag_3 \longrightarrow [\{r_1, r_3 \dots r_6\} \{r_3 \dots r_6\} \{r_2 \dots r_6\}] \Rightarrow \overline{sw_n} = 10 \times 8 \times 10 = 800$$

$$r_3 \in ag_1 \longrightarrow [\{r_1, r_3 \dots r_6\} \{r_4 \dots r_6\} \{r_2, r_4 \dots r_6\}] \Rightarrow \overline{sw_n} = 10 \times 6 \times 8 = 480$$

On peut voir que les valeurs des bornes supérieures entre deux niveaux de l'arbre sont si différentes qu'en pratique, elles ne permettent pas de couper des branches. Un tel algorithme mènera donc à l'énumération explicite de toutes les allocations. Notons que plus la valeur d'utilité moyenne est grande (valant ici 2), plus la différence entre les bornes supérieures de niveaux de l'arbre est importante.

Puisqu'il n'y a pas de critère de branchement efficace dans ce contexte, ces algorithmes ne représentent pas une approche convaincante pour résoudre des problèmes d'allocation de Nash.

La proposition 3.1 a ainsi des conséquences importantes sur la conception d'algorithmes de résolution. Notons que cette proposition est aussi valide dans le contexte de société égalitaire mais pas dans le cadre de société utilitaire.

3.1.4. Efficacité des heuristiques

Puisque ni les algorithmes exacts, ni les techniques d'optimisation classiques ne semblent efficaces, des heuristiques doivent être conçues pour estimer le bien-être de Nash optimal. Nous avons utilisé différentes techniques et conçu plusieurs heuristiques que nous avons comparé au sein d'un tournoi pour déterminer celle donnant les meilleurs résultats. Puisque le produit de Nash est un compromis entre l'augmentation du bien-être individuel moyen et la diminution des inégalités, les heuristiques que nous avons conçu accordent plus ou moins d'importance à ces deux aspects.

Nous avons conçu 6 heuristiques différentes. La première heuristique se focalise uniquement sur la satisfaction moyenne des agents et alloue chaque ressource à l'agent lui associant la plus grande utilité. La seconde ne considère que les inégalités entre les agents. Ils sont considérés séquentiellement par un mécanisme de *round-robin* où la meilleure ressource restante leur est allouée. La troisième heuristique prend en compte ces deux aspects par des étapes successives. D'abord, chaque ressource est allouée à l'agent lui associant la plus grande utilité. Ensuite, on vérifie que chaque agent possède au moins une ressource, et si besoin est, on prend la ressource maximisant le produit local des bien-être individuels. Les deux heuristiques suivantes sont basées sur l'algorithme hongrois (Kuhn, 1955) qui peut résoudre un problème d'allocation de x ressources entre x agents de manière optimale. La quatrième heuristique vise à maximiser la satisfaction moyenne alors que la cinquième vise à maximiser la richesse de l'agent le plus pauvre. La sixième et dernière heuristique est basée sur du *branch-and-bound*. Elle est basée sur l'allocation des ressources libres à tous les agents comme décrit dans la section 3.1.3.

L'efficacité de ces heuristiques a été comparée dans un tournoi. Chaque duel a été répétée 10 000 fois sur différentes instances. Ce tournoi met en évidence le fait qu'une

heuristique efficace doit prendre en compte aussi bien la richesse moyenne que les inégalités entre les agents. L'heuristique la plus efficace est la troisième heuristique décrite dans cette section. Cette heuristique est décrite dans l'algorithme 2.

Algorithme 2. *Heuristique d'estimation du bien-être de Nash optimal*

Entrées : Population $\mathcal{P}$, Ressources $\mathcal{R}$

Sorties : Estimation de sw_n^*

// Première étape centrée sur le bien-être individuel moyen

pour tous les $r \in \mathcal{R}$ faire

$i \leftarrow \arg \max_{i \in \mathcal{P}} u_i(r)$; // détermine l'agent qui estime le plus r

 Ajouter r à $A(i)$; // alloue r à l'agent i

// Seconde étape centrée sur les inégalités

pour $i \in \mathcal{P}$ s.t. $m_i = 0$ faire

$val \leftarrow 0$; // cherche où prendre une ressource

pour $j \in \mathcal{P}$ s.t. $m_j > 1$ faire

$r' \leftarrow \arg \max_{r' \in R_j} (u_i(r') \times u_j(R_j \setminus \{r'\}))$;

si $val < u_i(r')u_j(R_j \setminus \{r'\})$ alors

$val \leftarrow u_i(r')u_j(R_j \setminus \{r'\})$;

$r \leftarrow r'$;

 Ajouter r à $A(i)$; // ré-alloue r à l'agent i

retourner $sw_u(A)$;

3.2. Idées reçues dans les méthodes distribuées

Puisque les techniques centralisées habituelles ne permettent pas la résolution des problèmes d'allocation de Nash, nous nous penchons dans cette section sur les méthodes distribuées. À notre connaissance, seules des approches basées sur des agents ont été étudiées, et c'est également à ces approches que nous avons choisi de nous intéresser.

3.2.1. Caractéristiques des méthodes « agents »

Selon ces méthodes distribuées, des agents autonomes négocient les ressources de leur panier au moyen de transactions qui modifient l'allocation de ressources. En effet, tout au long du processus de négociation, l'allocation de ressources initiale évolue transaction après transaction jusqu'à une allocation optimale.

Les méthodes « agents » partent d'une allocation initiale, qui évolue au travers de transactions successives entre agents, alors que les techniques centralisées distribuent directement les ressources. Pour atteindre un optimum grâce à ce type de méthodes distribuées, il faut donc qu'il existe une suite de transactions entre agents qui permette

de faire évoluer l'allocation de ressources jusqu'à cet optimum. Selon les transactions autorisées dans la méthode distribuée, un chemin menant de l'allocation initiale à un global-optimum peut ne pas exister.

Exemple 3.2. Soient une population de deux agents $\mathcal{P} = \{ag1, ag2\}$ et un ensemble de trois ressources $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$. Les préférences des agents sont décrites dans le tableau 3.

$u_i(r_j)$		Ensemble de ressources $\mathcal{R}$		
		r_1	r_2	r_3
Population $\mathcal{P}$	$ag1$	5	5	1
	$ag2$	1	1	5

Tableau 3. Caractéristique des méthodes distribuées – Préférences des agents

L'allocation de ressources initiale est $A = [\{r_1\}\{r_2, r_3\}]$. Autrement dit, l'agent $ag1$ possède r_1 alors que l'agent $ag2$ possède r_2 et r_3 . La valeur initiale du bien-être de Nash est $sw_n(A) = 30$. Il est relativement facile de déterminer une allocation optimale $A' = [\{r_1, r_2\}\{r_3\}]$ et la valeur sociale associée : $sw_n(A') = 50$.

Or, il n'existe pas de chemin d'échange (une ressource contre une autre) permettant d'atteindre la solution optimale alors qu'un chemin de dons (une ressource sans contrepartie) existe. En effet, l'utilisation exclusive d'échanges ne permet pas de modifier le nombre initial de ressources par agent. Ainsi, selon le type de transaction autorisé, le global-optimum peut ne pas être atteignable.

Méthodes centralisées et distribuées n'amènent pas aux mêmes types d'optimum. Les méthodes centralisées utilisent une notion d'optimum absolu alors que les méthodes distribuées utilisent une notion d'optimum réaliste basée sur les transactions.

Définition 3.2 (Δ -optimum). Une allocation de ressources $A \in \mathcal{A}$ est un Δ -optimum si aucun chemin de transactions, appartenant à l'ensemble des transactions autorisées Δ , ne mène à une allocation associée à un plus grand bien-être de Nash.

$$\forall A' \in \mathcal{A}, \quad \nexists \delta \quad sw_n(A') > sw_n(A) \quad \delta \in \Delta, A \in \mathcal{A}.$$

Un Δ -optimum est la meilleure allocation atteignable selon les transactions autorisées. Cet optimum ne peut donc jamais être associé à un plus grand bien-être de Nash qu'un global-optimum, alors que l'inverse est généralement vrai. Dans l'exemple 3.2, l'allocation A est un Δ -optimum lorsque seules les transactions « échange » (une ressource échangée contre une autre) sont autorisées, mais cette allocation n'est pas un global-optimum.

Un Δ -optimum ne peut être déterminé par des techniques centralisées pour des raisons de calculabilité. En effet, à chaque étape du chemin, le nombre de transactions possibles peut être extrêmement grand selon Δ . Par exemple, si seuls les dons sont autorisés, alors $n \times m$ transactions sont possibles à chaque étape du chemin menant au global-optimum.

Notons que les méthodes « agents » doivent satisfaire certaines caractéristiques afin d'être utilisables en pratique. En effet, ces méthodes fournissent des chemins de transactions menant jusqu'à une allocation Δ -optimale. Chaque transaction est déterminée par une négociation entre agents et le processus de négociation (c'est-à-dire les négociations successives) doit cesser lorsque la population atteint une allocation Δ -optimale. Or, comme les agents sont autonomes, ils doivent à un moment donné arrêter de négocier, afin de laisser le système dans une allocation de ressources optimale. L'allocation atteinte à la fin du processus de négociation peut être vue comme un phénomène émergent. Les agents doivent ainsi être capables de déterminer localement si une transaction est profitable ou non. Leurs décisions doivent reposer sur un *critère d'acceptabilité* garantissant la convergence du processus de négociation (choisi de manière appropriée) et surtout l'arrêt de toute modification une fois le Δ -optimum obtenu.

3.2.2. Transactions : complexité et restrictions

Différentes classes de transaction existent dans la littérature (Sandholm, 1998), les restreignant plus ou moins. La transaction la plus générique est appelée *transaction multilatérale* et peut impliquer autant d'agents et de ressources que nécessaire :

Définition 3.3 (Transaction). Une transaction est un couple d'allocation $\delta = (A, A')$ telle que $A, A' \in \mathcal{A}$ et $A \neq A'$. Ce couple décrit l'évolution de l'allocation initiale A en une autre A' . Notons $\mathcal{P}_\delta$ l'ensemble des n_δ agents qui prennent part à la transaction δ .

Cette définition est largement utilisée dans la littérature et plus particulièrement dans le cadre d'études théoriques (par exemple (Endriss *et al.*, 2006; Chevaleyre *et al.*, 2010)). Cependant, cette définition est basée sur la notion d'allocation qui est une notion globale.

Seules quelques études ont été menées sur les transactions multilatérales. Certains auteurs les ont étudiées d'un point de vue théorique (Endriss *et al.*, 2005) et ont établi des bornes sur la longueur des chemins de transactions selon différents scénarios. Dans (Hemaissia *et al.*, 2007), les auteurs proposent un protocole de négociation pour simuler des transactions multilatérales. En pratique, ces transactions ne sont pas utilisées pour des raisons de calculabilité. En effet, déterminer une transaction multilatérale acceptable est une tâche complexe, due à la taille exponentielle de l'espace des possibilités.

Proposition 3.2 (Complexité des transactions multilatérales). Soit δ une transaction multilatérale impliquant n_δ agents dans laquelle m' ressources sont offertes. Le nombre total de transactions multilatérales est : $\#\delta = (n_\delta)^{m'}$ avec $m' = \sum_{i \in \mathcal{P}_\delta} m_i$.

Démonstration. Une transaction multilatérale δ , impliquant n_δ participants qui peuvent offrir jusqu'à leur panier complet, peut être vue comme un sous-problème d'allocation de ressources $(\mathcal{P}', \mathcal{R}')$. La population est restreinte à l'ensemble des par-

ticipants $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_\delta$ et l'ensemble des ressources à allouer correspond à l'union des paniers des participants $\mathcal{R}' = \bigcup_{i \in \mathcal{P}_\delta} R_i$. Le nombre de transactions multilatérales correspond donc au nombre total d'allocations possibles du sous-problème. $\square$

Puisqu'il n'existe pas de technique fiable pour identifier efficacement les transactions multilatérales, nous choisissons de ne considérer que les transactions bilatérales dans cet article, comme c'est le cas dans la majorité des études réalisées. Cependant, même si cette restriction diminue la complexité liée à l'identification des transactions acceptables, elle empêche également d'atteindre une allocation optimale.

Proposition 3.3 (Limite sur le nombre de participants). *Limiter le nombre d'agents pouvant être impliqués dans une même transaction peut empêcher le processus de négociation d'atteindre une allocation optimale.*

Corollaire 3.4. *Une transaction impliquant tous les agents d'une population peut être nécessaire pour qu'un processus de négociation atteigne une allocation socialement optimale.*

Démonstration. Prouvons cette propriété en concevant un contre-exemple. Soient une population $\mathcal{P} = \{ag1, ag2, ag3\}$ et un ensemble de ressources $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$. Nous supposons que les agents n'acceptent que des transactions augmentant leur bien-être individuel. Leurs préférences sont décrites dans le tableau 4.

$u_i(r_j)$		Ensemble de ressources $\mathcal{R}$		
		r_1	r_2	r_3
Population $\mathcal{P}$	$ag1$	2	1	5
	$ag2$	5	2	1
	$ag3$	1	5	2

Tableau 4. *Limite sur le nombre de participants – Préférences des agents*

Supposons l'allocation initiale $A = [\{r_1\}\{r_2\}\{r_3\}]$ avec $sw_n(A) = 8$. Aucune transaction n'impliquant qu'un sous-ensemble de la population ne mène à une meilleure allocation de ressources. En effet, les dons (une ressource donnée sans contrepartie) laissent toujours un des agents sans ressources (et donc à un bien-être individuel nul), et tous les échanges (une ressource contre une autre) mènent toujours à la diminution du bien-être individuel d'au moins un des participants. Or cette allocation initiale n'est pas un global-optimum puisqu'il existe $A' = [\{r_3\}\{r_1\}\{r_2\}]$ qui est associée à un plus grand bien-être de Nash $sw_n(A') = 125$.

La seule et unique manière d'atteindre l'optimum correspond à trois dons simultanés. En effet, si les trois agents donnent simultanément leur ressource à un des partenaires, ils augmentent tous les trois leur bien-être individuel. Par conséquent, limiter le nombre d'agents impliqués dans une même transaction peut empêcher le processus de négociation d'atteindre un global-optimum. $\square$

Restreindre le nombre de participants à une transaction reste un moyen efficace pour diminuer la complexité. Malheureusement, cela ne suffit pas. La détermination d'une transaction bilatérale acceptable reste une tâche délicate dont la complexité dépend du nombre de ressources que les participants peuvent offrir.

Corollaire 3.5 (Complexité des transactions bilatérales). *Considérons deux agents $i, j \in \mathcal{P}$ qui possèdent respectivement m_i et m_j ressources. Le nombre total de transactions bilatérales possible entre les agents i et j est :*

$$\#\delta_i^j = 2^{m_i} \times 2^{m_j} - 1.$$

Démonstration. Cette formule est obtenue par une application directe de la proposition 3.2 avec $n_\delta = 2$, $\mathcal{P}_\delta = \{i, j\}$, et $m = m_i + m_j$. $\square$

Limiter la taille des offres faites par les agents (le nombre de ressources que les participants peuvent offrir) est un moyen de simplifier l'identification de transactions bilatérales acceptables. On peut cependant se demander quel est l'effet d'une telle restriction sur l'efficacité des négociations.

Proposition 3.6 (Limite sur les offres des participants). *Restreindre la taille des offres des participants durant une transaction peut empêcher le processus de négociation d'atteindre un global-optimum.*

Corollaire 3.7 (Décomposition d'une transaction de Nash). *Les transactions ne peuvent pas toujours être décomposées en une séquence de transactions acceptables de moindre cardinalité.*

Démonstration. Soient $\mathcal{P} = \{ag1, ag2\}$ une population de deux agents et $\mathcal{R} = \{r_1, r_2\}$ un ensemble de ressources. Les préférences des agents sont décrites dans le tableau 5.

$u_i(r_j)$		Ensemble de ressources $\mathcal{R}$	
		r_1	r_2
Population $\mathcal{P}$	ag1	1	7
	ag2	7	1

Tableau 5. *Limite sur les offres des participants – Préférences des agents*

L'allocation de ressources initiale est $A = [\{r_1\}\{r_2\}]$ et vaut $sw_n(A) = 1$. Il existe un échange acceptable pour les deux agents (leurs bien-être individuels respectifs augmentent). Cet échange mène à une allocation $A' = [\{r_2\}\{r_1\}]$ qui vaut $sw_n(A') = 49$.

Cette transaction acceptable ne peut en revanche pas être décomposée en une séquence de transactions acceptables de moindre cardinalité (impliquant chacune moins de ressources). En effet, la seule décomposition possible est une séquence de deux

dons. Or, aucun don n'est acceptable puisqu'il laisserait un agent sans aucune ressource. Par conséquent, une transaction acceptable ne peut pas toujours être décomposée en une séquence de transactions acceptables de moindre cardinalité. $\square$

La première conséquence de cette proposition est évidente. Les transactions de grande cardinalité ne peuvent être décomposées en une séquence de transactions de moindre cardinalité, et donc en une séquence de dons. Elles sont essentielles pour garantir l'atteinte d'une allocation optimale.

Les types de transaction autorisés durant les négociations, noté Δ , définissent la politique de négociation. Les agents peuvent par exemple être autorisés à offrir une ou plusieurs ressources lors d'une même transaction. La politique de négociation basée uniquement sur des « dons » (une ressource sans contrepartie) sera notée « $\langle 1, 0 \rangle$ » alors que celle basée uniquement sur des « échanges » (une ressource contre une autre) sera notée « $\langle 1, 1 \rangle$ ». Un seul type de transaction est autorisé selon ces politiques de négociation. Une politique de négociation selon laquelle les agents peuvent respectivement offrir jusqu'à n et m ressources sera notée « up to $\langle n, m \rangle$ ».

$$\text{« up to } \langle n, m \rangle \text{ »} \Leftrightarrow \Delta = \{ \langle x, y \rangle \mid x \leq n, y \leq m \}.$$

Proposition 3.8 (Complexité des politiques de négociation). *Si les deux agents $i, j \in \mathcal{P}$ peuvent offrir respectivement jusqu'à u et v ressources ($u \leq m_i, v \leq m_j$), le nombre de transactions bilatérales possible entre eux deux est :*

$$\#\delta_i^j = \left(\sum_{x=0}^u C_{m_i}^x \right) \left(\sum_{x=0}^v C_{m_j}^x \right).$$

Démonstration. Une politique de négociation est basée sur la taille des offres qu'un agent peut faire. Si un agent peut offrir « jusqu'à trois ressources », il peut offrir n'importe quel sous-ensemble de son panier contenant au plus trois ressources. $C_{m_i}^k$ est le nombre d'offres possibles contenant exactement k ressources que peut faire un agent possédant m_i ressources. Une simple somme permet de déterminer le nombre total d'offres qu'un agent peut faire. Une fois ce nombre calculé pour chacun des deux agents, déterminer le nombre de transactions possibles est alors trivial. $\square$

Exemple 3.3. Considérons deux agents $i, j \in \mathcal{P}$ impliqués dans une négociation initiée par l'agent i . Ces agents possèdent respectivement 10 et 20 ressources dans leur panier. Déterminons alors le nombre de transactions possibles selon différentes stratégies de négociation.

$$\Delta = \{ \langle 1, 0 \rangle \} \Rightarrow \#\delta_i^j = 10$$

$$\Delta = \{ \langle 1, 1 \rangle \} \Rightarrow \#\delta_i^j = 200$$

$$\Delta = \{ \langle x, y \rangle \mid x \leq 2, y \leq 2 \} \Rightarrow \#\delta_i^j = 40500$$

Lorsque seuls les dons de l’initiateur sont autorisés, 10 dons sont possibles puisque l’initiateur ne possède que 10 ressources. Lorsque seuls les échanges sont autorisés, les deux participants peuvent offrir une unique ressource ce qui rend 200 transactions différentes possibles. Lorsque les participants peuvent offrir jusqu’à deux ressources, le nombre de transactions possibles explose jusqu’à 40 500. Cet exemple met en évidence que, selon le type de transaction autorisé, une négociation peut très vite prendre un temps considérable. Restreindre la cardinalité des transactions est ainsi essentiel pour garantir l’exécution en temps raisonnable de la méthode.

3.2.3. Rationalité individuelle et efficacité

Dans les méthodes distribuées, les agents sont souvent autonomes. L’allocation initiale évolue petit à petit grâce à des transactions locales entre les agents. Au lieu d’avoir une entité centrale qui décide comment allouer les ressources, la décision est distribuée entre les agents. Chaque agent doit alors déterminer localement quelles transactions sont profitables. La prise de décision des agents est basée sur un *critère d’acceptabilité*.

Dans la littérature ((Sandholm, 1998) par exemple), le critère le plus utilisé est la *rationalité individuelle* : ce critère ne considère que le bien-être individuel de l’agent.

Définition 3.4 (Agent rationnel). Un agent est dit « rationnel » si et seulement si il n’accepte que les transactions augmentant son bien-être individuel. Un agent rationnel $i \in \mathcal{P}$ acceptera donc toute transaction $\delta(A, A')$ satisfaisant la condition suivante :

$$u_i(R'_i) > u_i(R_i), i \in \mathcal{P}, \quad R_i, R'_i \subseteq \mathcal{R},$$

où R_i et R'_i sont respectivement les paniers de ressources de l’agent i dans les allocations A et A' .

Ce critère d’acceptabilité n’est basé que sur des informations personnelles et peut donc être calculé de manière locale. Cependant, un critère d’acceptabilité basé uniquement sur le bien-être individuel de l’agent est inefficace pour atteindre une allocation socialement optimale. En effet, seules peu de transactions rationnelles peuvent être appliquées en général, et la population reste dans une situation sous optimale.

Exemple 3.4. Soient une population $\mathcal{P} = \{ag1, ag2\}$ et un ensemble de ressources $\mathcal{R} = \{r_1, r_2\}$. Le tableau 6 décrit les préférences des agents.

$u_i(r_j)$		Ensemble des ressources $\mathcal{R}$	
		r_1	r_2
Population $\mathcal{P}$	$ag1$	1	4
	$ag2$	10	5

Tableau 6. Rationalité individuelle – Préférences des agents

L’allocation de ressources initiale est $A = [\{r_1\}\{r_2\}]$ et vaut $sw_n(A) = 5$. À partir de cette allocation, aucune transaction rationnelle n’est possible. En effet, au-

cun don n'est rationnel puisqu'un agent donnant une ressource diminuera son bien-être individuel. Pareillement, le seul échange possible diminuerait le bien-être individuel de l'agent $ag1$ qui passerait de 5 à 4. Or, une meilleure allocation existe : $A' = [\{r_2\}\{r_1\}]$ valant $sw_n(A') = 40$. Ce global-optimum ne peut pas être atteint par des agents individuellement rationnels.

Ainsi, les processus de négociation entre agents individuellement rationnels peuvent se terminer prématurément sur des allocations sous-optimales.

3.2.4. Processus de négociation et graphe d'acointances

La plupart des études réalisées jusqu'à présent sur les problèmes d'allocation de ressources ne considère pas de restrictions dans les communications entre les agents (par exemple (Chevaleyre *et al.*, 2006a; Endriss *et al.*, 2006)). Un agent peut donc négocier avec tous les autres agents de la population. Cette hypothèse ne nous semble pas très réaliste car ce n'est pas le cas dans bien des applications. Par exemple, dans le cas d'un réseau pair-à-pair, un pair ne connaît pas tous les autres pairs du réseau. Dans un réseau social sur Internet, une personne ne connaît qu'un nombre limité d'autres membres. Dans de tels cas, les agents ne sont même pas conscients de la taille du système complet et ne disposent que d'informations locales.

Ces aspects ne sont souvent pas pris en compte lorsqu'on parle de problèmes d'allocation. Dans (Chevaleyre *et al.*, 2007), les auteurs ont étudié l'élimination de l'envie au sein d'une population d'agents. Ils ont établi des résultats sur la convergence et la complexité des problèmes d'allocation sur graphes, sans donner les moyens d'atteindre les solutions optimales. Les problèmes d'allocation de tâches ont été étudiés sans que les capacités de communication des agents ne soient restreintes (de Weerd *et al.*, 2007). Seul le cas des sociétés utilitaires a été résolu au moyen d'algorithmes exponentiels. D'autres auteurs se sont focalisés sur des questions topologiques, où le comportement des agents et les performances des systèmes complexes ont été étudiés (Dekker, 2007). Puisque peu d'études ont considéré des restrictions sur les communications des agents, certains pourraient remettre en cause l'importance de telles restrictions.

Proposition 3.9 (Impact du graphe d'acointances). *Indépendamment de la fonction objectif considérée, un graphe d'acointances restreint peut empêcher un processus de négociation d'atteindre un global-optimum.*

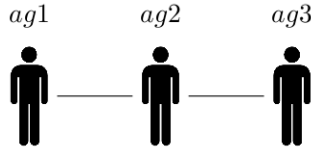
Démonstration. Soient une population $\mathcal{P} = \{ag1, ag2, ag3\}$ et un ensemble de ressources $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$. Les préférences des agents sont décrites dans le tableau 7.

Le graphe d'acointances décrivant les capacités de communication des agents est représenté dans la figure 1. Les nœuds représentent les agents et les liens entre les agents représentent les possibilités de communication. Selon la topologie de ce graphe, l'agent $ag2$ peut communiquer avec les agents $ag1$ et $ag3$, tandis que ces

$u_i(r_j)$		Ensemble de ressources $\mathcal{R}$		
		r_1	r_2	r_3
Population $\mathcal{P}$	$ag1$	3	1	9
	$ag2$	1	4	1
	$ag3$	10	2	3

Tableau 7. Impact du graphe d'accointances – Préférences des agents

derniers ne peuvent pas communiquer entre eux. L'allocation de ressources initiale est $A = [\{r_1\}\{r_2\}\{r_3\}]$ et vaut $sw_n(A) = 36$.

**Figure 1.** Exemple de graphe d'accointances

Seulement deux échanges sont possibles. Soit les agents $ag1$ et $ag2$ échangent les ressources r_1 et r_2 , soit les agents $ag2$ et $ag3$ échangent les ressources r_2 et r_3 . Ces deux échanges provoquent une diminution du bien-être individuel d'au moins un des participants. Aucun échange n'est donc acceptable ici.

Cette allocation A n'est cependant pas un global-optimum. En effet, l'échange des ressources r_1 et r_3 entre les agents $ag1$ et $ag3$ mènerait à une meilleure allocation $A' = [\{r_3\}\{r_2\}\{r_1\}]$ valant $sw_n(A') = 360$. La topologie du graphe d'accointances (décrit figure 1) a suffisamment restreint les communications entre les agents, pour empêcher le processus de négociation d'atteindre un global-optimum. $\square$

Dès que le graphe d'accointances est restreint, l'ordre dans lequel les agents négocient devient important.

Proposition 3.10 (Ordre des négociations). *Indépendamment de la fonction objectif considérée, l'ordre selon lequel les agents négocient empêche un processus de négociation d'atteindre un global-optimum.*

Démonstration. Soient une population $\mathcal{P} = \{ag1, ag2, ag3\}$ et un ensemble de ressources $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$. Les préférences des agents sont décrites dans le tableau 8.

Le réseau d'accointances décrivant les capacités de communication des agents est représenté dans la figure 1. L'allocation de ressources initiale est $A = [\{r_1\}\{r_2\}\{r_3\}]$ et vaut $sw_n(A) = 6$. Supposons maintenant que l'agent $ag2$ initie une négociation. D'après la topologie du graphe d'accointances, deux partenaires sont possibles. Selon le choix de l'initiateur, le processus de négociation peut terminer sur une allocation

sous-optimale. En effet, si l'agent $ag2$ négocie d'abord avec l'agent $ag1$, l'allocation atteinte est $A' = [\{r_2\}\{r_1\}\{r_3\}]$ et vaut $sw_n(A') = 50$. En revanche, si l'agent $ag3$ est choisi, l'allocation atteinte est $A^\sim = [\{r_1\}\{r_3\}\{r_2\}]$ et vaut $sw_n(A^\sim) = 126$.

$u_i(r_j)$		Ensemble des ressources $\mathcal{R}$		
		r_1	r_2	r_3
Population $\mathcal{P}$	$ag1$	2	10	4
	$ag2$	5	3	9
	$ag3$	2	7	1

Tableau 8. *Ordre des négociations – Préférences des agents*

Par conséquent, l'ordre selon lequel les agents négocient devient un paramètre important à prendre en compte lorsque le graphe d'accointances est restreint. $\square$

Dans cette section, nous avons montré qu'il était important de prendre en compte la topologie du graphe d'accointances car cela intervient dans de très nombreuses applications. Ces restrictions de communication correspondent sans doute plus au monde réel mais ont des conséquences importantes sur l'efficacité des processus de négociation. Elles peuvent d'ailleurs empêcher les processus de négociation d'atteindre un global-optimum. De plus, nous avons également montré que l'ordre dans lequel les agents négocient peut mener à des solutions sous-optimales. En dépit de leurs impacts respectifs, ces paramètres ont été rarement pris en compte jusqu'à présent.

4. Notre approche distribuée

La section précédente était dédiée aux idées préconçues sur les problèmes d'allocations de Nash, sur les techniques centralisées, sur la conception d'heuristiques et sur les négociations distribuées. Cette section décrit la solution distribuée que nous proposons, basée sur des agents autonomes qui négocient et font émerger une solution au problème d'allocation de Nash. Nous décrivons d'abord le paramétrage des négociations, et présentons ensuite une étude expérimentale pour étayer notre proposition.

4.1. Paramétrages des négociations

Puisque les transactions bilatérales sont les plus calculables en pratique, nous avons choisi de ne considérer qu'elles. Elles peuvent être modélisées en utilisant le nombre de ressources que chaque agent peut offrir.

Définition 4.1 (Transactions bilatérales). Une transaction bilatérale entre deux agents $i, j \in \mathcal{P}$, notée δ_i^j , est initiée par l'agent i qui choisit un partenaire j . C'est une paire $\delta_i^j(u, v) = (\rho_i, \rho_j)$ où l'initiateur i offre un ensemble ρ_i de u ressources ($\rho_i \subseteq R_i$) alors que le partenaire j offre un ensemble ρ_j de v ressources ($\rho_j \subseteq R_j$).

4.1.1. Le critère de sociabilité

Comme décrit dans la section 3.2.3, le critère de décision est essentiel afin de garantir la convergence des processus de négociation. Un agent utilise ce critère afin de déterminer quelles sont les transactions profitables. Le critère le plus utilisé, la *ratio-nalité individuelle*, mène le plus souvent les processus de négociation à des solutions très sous-optimales. Nous proposons ici un nouveau critère plus flexible, qui devrait mener à des solutions socialement meilleures.

Définition 4.2 (Transaction sociale). Une transaction sociale δ , changeant l'allocation initiale A en une nouvelle A' , est une transaction menant à une amélioration du bien-être de la société :

$$sw_n(A') > sw_n(A), \quad A, A' \in \mathcal{A}.$$

Le critère social est centré sur la notion de bien-être social, qui est une notion globale. Sa valeur ne peut être déterminée que grâce à la valeur du bien-être individuel de tous les agents. Les agents devraient connaître le panier de ressources et les préférences de tous les agents de la population, afin de calculer la valeur du bien-être social. Ces conditions ne peuvent être satisfaites puisque les agents ne disposent que d'informations locales. La valeur du bien-être social n'est pas essentielle : en effet, connaître son évolution est suffisant pour savoir si une transaction pénalise ou non la société. De tels calculs peuvent alors être réduits à un contexte local, au niveau d'un agent. En effet, si on ne considère que les deux agents impliqués dans une transaction, l'évolution de la valeur sociale peut être calculée de manière locale.

$$\begin{aligned} & sw_n(A) < sw_n(A') \\ \Rightarrow & \prod_{k \in \mathcal{P}} u_k(R_k) < \prod_{k \in \mathcal{P}} u_k(R'_k) \\ \Rightarrow & u_i(R_i)u_j(R_j) \prod_{k \in \mathcal{P} \setminus \{i,j\}} u_k(R_k) < u_i(R'_i)u_j(R'_j) \prod_{k \in \mathcal{P} \setminus \{i,j\}} u_k(R'_k) \\ \Rightarrow & u_i(R_i)u_j(R_j) < u_i(R'_i)u_j(R'_j) \end{aligned}$$

C'est l'un des points forts de notre approche que de pouvoir ramener ce critère global à un calcul local. C'est la condition nécessaire garantissant que les agents n'ont pas à être omniscients.

4.1.2. Réseau d'acointances

Notre méthode permet de prendre en compte les notions de voisinage et de réseau d'acointances. Le voisinage N_i d'un agent $i \in \mathcal{P}$ est un sous-ensemble de la population $\mathcal{P}$ avec laquelle il est capable de communiquer. Le graphe d'acointances est le réseau de relations formé par l'agrégation du voisinage de tous les agents. Ce réseau décrit les capacités de communication des agents. Dans un tel graphe, les nœuds représentent les agents et les liens entre les agents symbolisent les possibilités de communication.

Différentes topologies peuvent ainsi être considérées : les *graphes structurés* où tous les agents ont le même nombre de voisins (grilles ou graphes complets) et les *graphes aléatoires* (classique (Erdős *et al.*, 1959) et petit-monde (Albert *et al.*, 2002)) où la topologie est irrégulière.

4.1.3. *Le comportement des agents*

Le comportement d'un agent le définit d'un point de vue externe, c'est-à-dire qu'il décrit la manière dont l'agent interagit avec les autres. Une transaction bilatérale est une combinaison d'offres venant de différents participants. Lorsqu'un agent initie une négociation, il sélectionne un partenaire dans son voisinage, fait des offres et en reçoit, puis vérifie leur acceptabilité selon son propre critère. Si une transaction est acceptable pour les deux participants, alors elle est appliquée. Sinon, les agents doivent décider qui doit modifier son offre d'après son comportement et la négociation continue. L'ordre dans lequel ces actions sont effectuées (si elles le sont) constitue un comportement.

Plusieurs comportements ont été implémentés et testés mais seul le plus efficace est décrit dans cet article (c'est-à-dire celui menant aux meilleures solutions d'un point de vue social). Nos simulations montrent que les agents doivent être capables de modifier leurs offres et de changer de partenaire durant la négociation. Il faut en effet que les agents soient capables de faire des concessions et de proposer différentes offres à différents partenaires si c'est nécessaire. Un tel comportement nécessite plus de temps de calcul que lorsque les agents refusent de modifier leurs offres, mais il permet aux processus de négociation d'atteindre de meilleures solutions. L'ordre dans lequel les différentes actions sont effectuées affecte également l'efficacité des négociations. Trois niveaux de priorité doivent être distingués : sur les partenaires, sur les offres de l'initiateur et sur celles du partenaire. Nos expériences montrent que le comportement décrit par l'algorithme 3 est le plus efficace. Dans cet algorithme, TEST D'ACCEPTABILITÉ dénote le test que doit faire l'agent pour déterminer si une transaction est acceptable ou non selon son propre critère. Le test peut être formellement formulé selon la définition 3.4 si l'agent est individuellement rationnel ou selon la définition 4.2 si l'agent est sociable.

Selon la politique de négociation (c'est-à-dire le type de transaction autorisé), chaque agent peut offrir jusqu'à un certain nombre de ressources. Il commence par constituer la liste des offres qu'il peut faire. Ensuite, il trie cette liste selon ses préférences afin de toujours proposer ce qui a le moins de valeur pour lui en premier lieu. Un agent agissant suivant le comportement décrit dans l'algorithme 3, peut changer de partenaire et d'offre durant la négociation. Il propose son offre à ses voisins avant de faire des concessions et d'en proposer une autre.

Algorithme 3. Recherche d'une transaction bilatérale acceptable**Entrées :** Agent initiateur i

```

// génère la liste des offres possibles selon sa politique
 $\mathcal{L}_i \leftarrow \text{génère}(\Delta, R_i)$ ;
// ordonne la liste d'offres pour offrir d'abord ce qui a le
// moins de valeur
Trie  $\mathcal{L}_i$  selon  $u_i$ ;
// mélange le voisinage pour éviter un biais de sélection
Mélange  $N_i$ ;
// Évolution de l'offre de l'initiateur en dernier recours
pour tous les  $\rho_i \in \mathcal{L}_i$  faire
    // Changement du partenaire impliqué s'il ne peut
    // répondre de manière acceptable à l'offre de
    // l'initiateur
    pour tous les  $j \in N_i$  faire
        // Modification prioritaire de l'offre du partenaire
        pour tous les  $\rho_j \in \mathcal{L}_j$  faire
            // Création d'une transaction
             $\delta \leftarrow (\rho_i, \rho_j)$ ;
            si TEST D'ACCEPTABILITÉ alors
                Application de la transaction  $\delta$ ;
                Fin de la négociation ;

```

4.2. Évaluation de notre méthode basée sur les agents**4.2.1. Le protocole d'évaluation**

Durant ces expérimentations, différents aspects des processus de négociation ont été évalués principalement grâce à deux paramètres.

Le premier paramètre est la *cardinalité des transactions*. Identifier une transaction bilatérale acceptable peut devenir une tâche coûteuse et complexe selon le nombre de ressources que les agents peuvent offrir en une fois (comme décrit dans la section 3.2.2). Afin de favoriser l'implémentation de notre approche, une limite sur la taille des offres nous paraît essentielle. Le but est de déterminer si l'utilisation de transactions de large cardinalité est inévitable pour atteindre des solutions socialement intéressantes.

Le second paramètre utilisé est l'*efficacité sociale*, qui mesure l'écart entre le global-optimum (fourni par la meilleure heuristique décrite dans la section 3.1.4) et la solution obtenue par négociation entre agents selon différents paramétrages. Le but est de déterminer quel est le meilleur moyen de négocier et d'atteindre une solution socialement optimale en un temps raisonnable.

Les simulations ont été menées sur des populations de 50 agents où 250 ressources étaient disponibles ($n = 50, m = 250$). Deux types de graphes structurés (des réseaux complets et des grilles) et deux types de graphes aléatoires (Erdős-Rényi et petit-mondes) ont été utilisés. Un grand nombre de simulations a été effectué : nous avons généré 10 graphes de chaque classe, 10 ensembles de préférences d'agents par graphe, et 100 négociations pour chacun des couples graphe-préférences à partir d'allocations initiales différentes. Deux critères d'acceptabilité ont été évalués durant les simulations : la rationalité individuelle et la sociabilité. Les ressources sont distribuées de manière aléatoire. De même, les utilités des agents ont été générées de manière aléatoire dans l'intervalle de valeurs $\{1..m\}$. Durant un processus de négociation, l'agent initiateur est choisi de manière aléatoire et la distribution du tour de parole est uniforme : aucun agent ne peut parler deux fois si les autres agents n'ont pas parlé au moins une fois. Lorsque personne ne peut plus trouver de transaction acceptable, le processus de négociation s'arrête.

4.2.2. La cardinalité des transactions

Le premier paramètre à évaluer est la cardinalité des transactions. Une transaction bilatérale $\delta_i^j \langle u, v \rangle$ entre deux agents $i, j \in \mathcal{P}$ est caractérisée par la taille des offres faites u et v . Les figures 2 et 3 montrent l'évolution du bien-être de Nash durant le processus de négociation selon la cardinalité des transactions. Ces courbes sont des moyennes obtenues sur les 100 processus de négociation de même paramétrage, qui ont été menés à partir d'allocations initiales différentes.

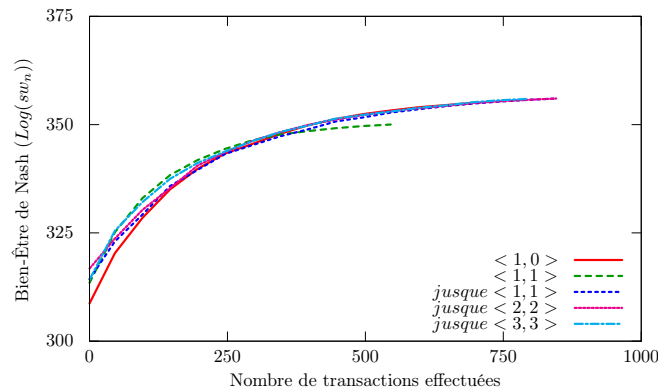


Figure 2. Efficacité des négociations vs. transaction effectuée en fonction de la cardinalité

La figure 3 montre que les processus de négociation basés sur des dons (*ie* transactions $\langle 1, 0 \rangle$) nécessitent moins de temps et de transactions. Plus les transactions autorisées sont larges, plus les processus de négociation prennent de temps. Cependant, selon la figure 2 représentant le nombre de transactions effectuées, les transactions plus larges n'améliorent pas significativement la qualité des solutions. Les négociations reposant sur des échanges (*ie* transactions $\langle 1, 1 \rangle$) se finissent après un faible nombre de

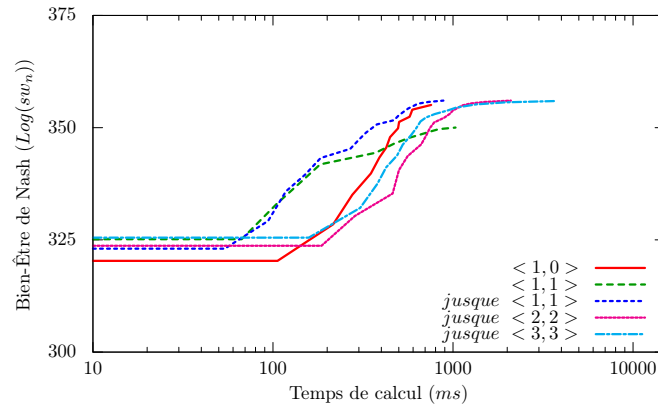


Figure 3. Efficacité des négociations vs. temps de calcul en fonction de la cardinalité

transactions mais atteignent également des solutions beaucoup moins intéressantes. Les autres processus de négociation se terminent après des séquences de transactions de longueur similaire. L'expérience montre que l'utilisation de larges transactions bilatérales n'améliore pas significativement les solutions, et donc ne justifie pas les importants surcoûts engendrés.

4.2.3. L'efficacité des négociations

L'efficacité des négociations doit être évaluée. Nous proposons de le faire ici par comparaison avec les heuristiques centralisées présentées précédemment (section 3.1.4). Le tableau 9 montre l'efficacité des processus de négociation selon le type de graphe d'acointances, le critère d'acceptabilité et la cardinalité des transactions. Ce tableau montre que certaines valeurs de bien-être peuvent être supérieures à 100 %. Puisque les heuristiques ne donnent qu'une estimation du bien-être de Nash, une efficacité supérieure à 100 % signifie que le processus de négociation mène à des allocations plus intéressantes que celles fournies par les heuristiques.

Réseaux d'acointances	Rationalité individuelle		Sociabilité			
	$\langle 1, 1 \rangle$	up to $\langle 2, 2 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	up to $\langle 1, 1 \rangle$	up to $\langle 2, 2 \rangle$
Complet	99.9	100.1	101.6	100.1	101.7	101.7
Grille	97.0	97.5	99.6	98.2	99.7	99.7
Erdős-Rényi	99.6	99.8	101.4	99.9	101.6	101.6
Petit-monde	97.2	98.0	100.2	98.9	100.4	100.4

Tableau 9. Efficacité des négociations de Nash (%) selon les réseaux d'acointances

Les négociations rationnelles aboutissent à des allocations socialement plus faibles que les négociations sociales, ce qui indique une répartition plus inéquitable des ressources dans la population. La variation entre les valeurs sociales atteintes est égale-

ment plus importante, montrant le manque de flexibilité des négociations entre agents individuellement rationnels. Par ailleurs, que les négociations soient rationnelles ou sociales, les politiques de négociation basées sur $\Delta = \{\langle u, v \rangle | u \leq 1, v \leq 1\}$ et sur $\Delta = \{\langle u, v \rangle | u \leq 2, v \leq 2\}$ mènent aux mêmes résultats. En conséquence, autoriser les dons et les échanges est suffisant pour atteindre des allocations efficaces. En revanche, les négociations basées sur des échanges uniquement (sans autoriser les dons) mènent à des allocations socialement très faibles. En effet, la répartition initiale des ressources est plus difficile à modifier, et les négociations finissent rapidement dans des optima locaux. De plus, dans ce cas, l'écart type est beaucoup plus élevé.

Les processus de négociation basés sur des grilles mènent à des allocations plus faibles. La connectivité moyenne des réseaux d'acointances est une caractéristique importante, affectant l'efficacité des négociations. Les capacités de communication des agents sont trop restreintes pour permettre une circulation efficace des ressources, et empêchent l'atteinte de solutions optimales. La comparaison entre les résultats obtenus sur des graphes Erdős-Rényi et sur des petits-mondes indique qu'un grand nombre d'agents ayant un petit voisinage pénalise beaucoup les processus de négociation. En effet, par définition, sur un graphe Erdős-Rényi la probabilité de liens entre deux agents est uniforme alors qu'elle dépend de la taille du voisinage dans le cas d'un petit-monde. Il y a alors beaucoup d'agents avec peu de voisins dans un petit-monde qui pénalisent le processus de négociation.

Les expérimentations que nous avons menées nous permettent de clarifier les politiques les plus efficaces pour atteindre un bien-être global satisfaisant. Les négociations entre agents sociaux mènent à des allocations plus intéressantes que celles atteintes par des agents rationnels. Autoriser à la fois les dons et les échanges (*ie* $\Delta = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$) peut être considéré comme la meilleure politique de négociation. Restreindre encore plus la cardinalité des transactions autorisées n'est pas efficace mais l'utilisation de transactions plus larges n'améliore pas significativement le résultat alors que le coût explose. Cependant, l'utilisation des transactions bilatérales n'est pas suffisante pour garantir l'atteinte d'un optimum global, mais mène tout de même à des allocations socialement très proches.

5. Conclusion

Parmi les nombreuses possibilités permettant d'évaluer le bien-être d'une société vis-à-vis d'une allocation de ressources en satisfaisant les préférences des agents, nous nous sommes intéressés dans cet article au bien-être de Nash. En effet, cette évaluation représente un bon compromis entre satisfaction individuelle des agents et satisfaction globale de la société. Malgré ses bonnes propriétés, le bien-être de Nash est rarement utilisé en pratique pour des raisons de calculabilité. Nous avons présenté dans cet article les idées reçues les plus répandues sur le problème d'allocation de Nash. Nous avons montré l'inefficacité des techniques d'optimisation classiques et l'impossibilité de décomposer le problème en sous-problèmes solubles. La seule solution pratique pour tenter d'approcher l'optimal est donc une approche centrée individus de type

multi-agent. La seconde partie décrit la méthode que nous proposons afin de résoudre efficacement le problème d'allocation de Nash, en utilisant des négociations entre agents. Nous avons spécifié les paramètres à utiliser afin d'obtenir une séquence de transactions menant à des solutions proches de l'optimum. N'importe quel type de réseau d'acointances peut être considéré, et le critère de décision des agents n'est basé que sur des informations locales. De telles hypothèses correspondent à un contexte bien plus réaliste que celui utilisé habituellement. Nous fournissons également le comportement, le critère d'acceptabilité, et le type de transaction à utiliser pour atteindre des allocations Δ -optimales.

Une des limites de ces travaux vient du fait qu'il n'est pour l'instant pas possible de garantir qu'un processus de négociation converge vers un optimum global, et ce même si le réseau d'acointances est complet. Il pourrait alors être intéressant d'identifier les restrictions à imposer sur l'expression des préférences des agents afin de garantir l'atteinte d'une allocation optimale, au moins sur un réseau d'acointances complet. Au lieu d'avoir des agents infiniment riches, nous avons choisi de ne pas considérer d'argent dans notre système. Il nous semble intéressant de lever cette limitation, sans pour autant tomber dans les travers des études que nous critiquons. Chaque agent devra donc avoir un porte-monnaie fini et pourra utiliser de l'argent pour compenser une transaction qui ne lui semblerait pas satisfaisante.

6. Bibliographie

- Albert R., Barabási A., « Statistical Mechanics of Complex Networks », *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, n° 1, p. 47-97, 2002.
- Arrow K., Sen A., Suzumura K., *Handbook of social choice and welfare*, vol. 1, Elsevier, 2002.
- Bachrach Y., Rosenschein J., « Sequential auctions for the allocation of resources with complementarities », *Proceedings of the international joint conference on autonomous agents and multiagent systems*, p. 1103-1110, 2008.
- Bonzon E., Lagasquie-Schiex M., Lang J., Zanuttini B., « Compact Preference Representation and Boolean Games », *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, vol. 18, n° 1, p. 1-35, 2009.
- Chevaleyre Y., Endriss U., Lang J., Maudet N., « Negotiating over Small Bundles of Resources », *AAMAS'05 - Autonomous Agents and multiagent systems*, ACM Press, EU, The Netherlands, Utrecht, p. 296-302, July, 2005.
- Chevaleyre Y., Dunne P., Endriss U., Lang J., Lemaitre M., Maudet N., Padget J., Phelps S., Rodriguez-Aguilar J., Sousa P., « Issues in Multiagent Resource Allocation », *Informatica*, vol. 30, n° 1, p. 3, 2006a.
- Chevaleyre Y., Endriss U., Lang J., « Expressive Power of Weighted Propositional Formulas for Cardinal Preference Modelling », *Proceedings of Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, p. 145-152, 2006b.
- Chevaleyre Y., Endriss U., Maudet N., « Allocating goods on a graph to eliminate envy », *Proceedings of the national conference on artificial intelligence*, vol. 22(1), p. 700-705, 2007.

- Chevaleyre Y., Endriss U., Maudet N., « Simple negotiation schemes for agents with simple preferences : Sufficiency, necessity and maximality », *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, vol. 20, n° 2, p. 234-259, 2010.
- Colmerauer A., Kanoui H., Van Caneghem M., « Last Steps Towards an Ultimate PROLOG », *IJCAI*, p. 947-948, 1981.
- Coste-Marquis S., Lang J., Liberatore P., Marquis P., « Expressive Power and Succinctness of Propositional Languages for Preference Representation », *Proceedings of Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, p. 203-212, 2004.
- Cramton P., Shoham Y., Steinberg R., *Combinatorial auctions*, MIT Press, 2006.
- de Weerd M., Zhang Y., Klos T., « Distributed task allocation in social networks », *Proceedings of the international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems*, p. 1-8, 2007.
- Dekker A., « Studying Organisational Topology with Simple Computational Models », *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, vol. 10, n° 4, p. 6, 2007.
- Doyle J., « Prospects for preferences », *Computational Intelligence*, vol. 20, n° 2, p. 111-136, 2004.
- Endriss U., Maudet N., « On the Communication Complexity of Multilateral Trading : Extended Report », *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, vol. 11, p. 01-107, 2005.
- Endriss U., Maudet N., Sadri F., Toni F., « Negotiating Socially Optimal Allocations of Resources », *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 25, p. 315-348, 2006.
- Erdős P., Rényi A., « On Random Graphs », *Publicationes Mathematicae*, vol. 6, p. 290-297, 1959.
- Hemaissia M., El Fallah Seghrouchni A., Labreuche C., Mattioli J., « A Multilateral Multi-Issue Negotiation Protocol », *Proceedings of the international joint conference on autonomous agents and multiagent systems*, p. 1-8, 2007.
- Kaneko M., Nakamura K., « The Nash social welfare function », *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, vol. 47, n° 2, p. 423-435, 1979.
- Kuhn H., « The Hungarian method for the assignment problem », *Naval research logistics quarterly*, vol. 2, n° 1-2, p. 83-97, 1955.
- Moulin H., *Axioms of cooperative decision making*, Cambridge University, 1988.
- Moulin H., *Fair division and Collective Welfare*, MIT press, 2003.
- Nongaillard A., Mathieu P., Everaere P., « Nash Welfare Allocation Problems : Concrete Issues », *Proceedings of IEEE/WIC/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology*, IEEE Computer Society, p. 32-39, 2010.
- Peters H., Vermeulen D., « WPO, COV and IIA bargaining solutions for non-convex bargaining problems », *International Journal of Game Theory*, vol. 1, p. 1-34, 2010.
- Ramezani S., Endriss U., « Nash social welfare in multiagent resource allocation », *Proceedings of the International Workshop on Agent-Mediated Electronic Commerce*, 2009.
- Sandholm T., « Contract Types for Satisficing Task Allocation : I Theoretical Results », *AAAI Spring Symposium : Satisficing Models*, vol. 99, p. 68-75, 1998.
- Sandholm T., « Algorithm for optimal winner determination in combinatorial auctions », *Artificial Intelligence*, vol. 135, n° 1-2, p. 1-54, 2002.