Contribution à l'étude des opérateurs de fusion : manipulabilité et fusion disjonctive

THÈSE

soutenue le 7 décembre 2006

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université d'Artois

Spécialité Informatique

par

Patricia Everaere

Composition du jury

Jérôme Lang	CR CNRS (HdR), rapporteur
Torsten Schaub	Professeur à l'Université de Potsdam, rapporteur
Salem Benferhat	Professeur à l'Université d'Artois, examinateur
Isabelle Bloch	Professeur à l'ENST de Paris, examinateur
Eric Grégoire	Professeur à l'Université d'Artois, examinateur
Anthony Hunter	Professeur à l'University College London, examinateur
Sébastien Konieczny	CR CNRS, co-directeur de thèse
Pierre Marquis	Professeur à l'Université d'Artois, co-directeur de thèse

CENTRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE DE LENS – CNRS FRE 2499
Université d'Artois, rue Jean Souvraz, S.P. 18 F-62307, Lens Cedex France
Secrétariat : Tél.: +33 (0)3 21 79 17 23 – Fax : +33 (0)3 21 79 17 70
http://www.cril.univ-artois.fr

Mis en page avec mr-sia-CRIL (B. Mazure, CRIL) et thloria (D. Roegel, LORIA).

Remerciements

Je voudrais remercier mes deux directeurs de thèse, Pierre Marquis et Sébastien Konieczny. Les remercier pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant de me suivre au cours de ces trois années, mais surtout pour les qualités humaines et scientifiques dont ils font preuve. Je pense avoir eu beaucoup de chance d'être entourée par deux personnes aussi intelligentes, intéressantes, disponibles et honnêtes.

Grâce à eux, j'ai beaucoup appris durant ces trois années, sur le plan scientifique, bien sûr, mais aussi sur le plan personnel. Cette aventure m'a permis de découvrir le monde de la recherche et de relever un défi. Et finalement, c'est de cela dont je suis la plus fière, et c'est aussi pour cela que je voudrais les remercier.

Je voudrais également remercier les rapporteurs, Jérôme Lang et Torsten Schaub, d'avoir accepté de me sacrifier une partie de leur temps si précieux, et de leurs remarques pertinentes et utiles. Merci également aux membres du jury, Éric Grégoire, Salem Benferhat, Isabelle Bloch et Anthony Hunter pour leur présence à la soutenance, et d'avoir si spontanément accepté cette responsabilité.

Je voudrais également remercier l'Université d'Artois et l'Université de Lille I de m'avoir permis de progresser plus rapidement dans mes recherches en m'accordant une décharge de service. Je profite de cette occasion pour saluer mes anciens collègues de l'IUT de Lens, département informatique, où j'ai rencontré des gens très attachants. Ce sont eux en premier qui m'ont donné envie de me lancer ce défi, et qui ont eu confiance en mes capacités. En particulier, merci à Assef, Sylvie, Olivier et Gilles pour leur aide lors de mes premiers pas en latex, leurs encouragements et leur amitié. Merci à Bertrand, Daniel, Sylvain et Jean-Luc pour leur aide, et merci à tout ceux que je ne cite pas...

Enfin, un grand merci à Alain pour son soutien inconditionnel...

A Alain, Marie et Romane,
avec tout mon amour...

Table des matières

Introduction

1 Contexte et motivation

Nous sommes tous soumis, dans notre vie quotidienne, au problème de la fusion d'informations. Cela fait même partie de notre façon de fonctionner, de réfléchir, de nous informer, de nous forger une opinion, et finalement contribue à notre manière de prendre des décisions. Lorsque nous confrontons différents points de vue sur un événement (télévision, radio, journaux, internet...), nous arrivons souvent à nous forger une opinion de cet événement, sur son déroulement, ses implications. Rarement l'être humain se contente d'une seule et unique source d'information, mais au contraire, il s'assure par la multiplicité des sources et leurs variétés que la vision qu'il a d'une situation est la plus proche possible de la réalité. Ainsi, lorsque nous cherchons une réponse à une question, nous ne prenons pas toujours pour argent comptant ce que nous dit un seul livre, un seul site internet ou une seule personne, mais au contraire, nous cherchons le maximum d'informations sur le sujet qui nous intéresse, afin d'en faire une synthèse. C'est en particulier le cas lorsque l'opinion à se faire fonde une décision délicate (e.g. dois-je vraiment subir une intervention chirurgicale ?). Cette aptitude humaine, naturelle, est en fait la capacité de fusionner les informations, c'est-à-dire de se forger, à partir de sources d'information parfois diverses ou contradictoires, une opinion cohérente sur la réalité. Lorsque nos choix dépendent de l'avis d'un groupe auquel nous participons, par exemple si un groupe d'amis doit décider du film que le groupe ira voir, du restaurant où tous iront manger, ou de la destination d'un week-end en commun, se pose le problème de la fusion de préférences. Chacun a des préférences sur une situation et l'opération de fusion doit déterminer les préférences du groupe de manière à satisfaire au mieux chacun de ses membres. Dans ce cas, les buts des agents peuvent être contradictoires.

La fusion d'informations provenant de différentes sources est une problématique importante en informatique, en particulier dans le domaine des bases de données, de l'intelligence artificielle, de la décision multi-critère. Selon le domaine d'application, les informations fournies par les différentes sources peuvent être de natures différentes, observations ou mesures, connaissances expertes, états épistémiques, préférences. La qualité des informations peut varier d'une source à une autre et celles-ci peuvent être incomplètes, incertaines, imprécises, contradictoires. De plus, le degré de fiabilité des sources peut varier. Dans tous les cas, il s'agit d'extraire le maximum d'informations provenant de chacune des sources sans pour autant produire des incohérences. Malheureusement, l'aptitude humaine à pouvoir réaliser une synthèse cohérente de données hétérogènes n'est pas partagée par les machines : comment gérer les contradictions ? Comment représenter l'information, en particulier lorsqu'elle est issue de sources différentes, qui ne partagent pas nécessairement le même formalisme et les mêmes conventions ? Comment traiter des données incertaines ou incomplètes, qu'une observation ultérieure peut radicalement modifier ? L'esprit humain parvient avec une étonnante facilité à réaliser ce que la machine peine à faire, même imparfaitement.

La fusion d'informations est devenue un champ de recherches important du traitement de l'information, dans des domaines très différents où les informations à fusionner, les objectifs, les méthodes, et donc la terminologie, peuvent varier beaucoup, malgré de nombreuses analogies [BE01]. Cette problématique est au coeur d'une recherche très active en intelligence artificielle, même si la diversité des domaines d'application, et la diversité des sources d'information, compliquent la vision globale que l'on peut avoir du problème. De très nombreuses applications nécessitent l'estimation de certaines grandeurs à partir d'informations, parfois contradictoires et hétérogènes, issues de plusieurs sources. Cette problématique de fusion d'informations, relativement récente, fait l'objet d'un intérêt croissant du fait de la multiplication des systèmes informatiques déployés où une partie de l'information disponible est fournie par des capteurs et de l'augmentation considérable des moyens informatiques. Le but de la fusion d'informations est en général d'apporter une aide pour la prise de décision, en substituant à une vision parcellaire et hétérogène, parfois même contradictoire, de la réalité une vision globale, cohérente et homogène. On peut notamment distinguer trois principaux types d'applications :

– la fusion multi-capteurs, consistant à combiner des observations issues de différents capteurs (instruments de mesure, images, sons, capteurs virtuels, etc.). Les domaines d'applications où se pose classiquement ce type de problèmes sont la télédétection, l'imagerie médicale, la robotique, etc.,
– la gestion de bases de données distribuées : une requête soumises à plusieurs bases de données fournit typiquement des résultats en partie contradictoires, de précision et de pertinence variable, qu'il s'agit de combiner,
– la combinaison d'avis d'experts.

Concernant la fusion multi-capteurs, un premier problème est celui de la classification des données. Par exemple, en détection d'images, la classification d'images satellite consiste à affecter chaque pixel d'une image à une classe particulière (végétation, cultures, rivières ?). Dans un souci d'amélioration de la classification, il convient d'utiliser toutes les informations disponibles afin de pouvoir, en fusionnant ces différentes informations, prendre la meilleure décision possible quant à la nature exacte du pixel (on peut par exemple faire appel aux différentes bandes spectrales d'une image, aux données exogènes relatives au contexte géographique de la région étudiée telles que la carte des routes, des rivières, des villes, les altitudes, l'orientation des pentes...). Dans le domaine militaire, la fusion d'informations est également apparue afin de gérer des quantités très importantes de données multi-sources, et des méthodes de fusion ont été adaptées et développées pour la classification des données. En effet, on se trouve confronté dans de nombreuses applications à un grand nombre de données imparfaites, ce qui pose souvent problème pour les classifier.

Même lorsque le problème de la classification ne se pose pas, la fusion de données reste au centre de nombreuses applications. Une application de la fusion de données en imagerie médicale est la neuroimagerie. Cette technique médicale donne accès à la localisation et à la dynamique des sources d'activité cérébrale et est aujourd'hui un des outils majeurs d'investigation des processus cognitifs. L'Imagerie par Résonance Magnétique nucléaire (IRM) d'une part, et l'électroencéphalographie (EEG) d'autre part, sont deux méthodes de prospections très complémentaires, explorant chacune une échelle spécifique d'organisation spatiale et temporelle de l'activation cérébrale. La fusion d'informations issues de l'IRM et de l'EEG consiste à exploiter la complémentarité de ces deux modalités d'imagerie dans le but de caractériser au mieux les réseaux de populations de neurones impliqués dans un traitement d'information cérébral.

Dans le domaine des bases de données, le problème de la fusion se pose également : le but est alors de déterminer une seule base de données cohérente à partir de plusieurs. En fait, deux problèmes se posent à des niveaux différents dans ce cadre. Il faut d'abord régler le problème de l'hétérogénéité des différentes bases de données. De nombreux travaux portent sur cet aspect et cherchent à déterminer un schéma global à partir des schémas locaux [BL86, Sub94, Kim95]. Une seconde difficulté peut apparaître, une fois réglé celui du schéma global, qui est la possible non cohérence des données : il faut alors trouver un moyen de rétablir la cohérence. [Sub94] suppose l'existence d'un médiateur capable de résoudre de tels conflits. Cholvy, dans [Cho95], propose par exemple d'utiliser la confiance que l'on peut accorder aux bases en fonction des sujets, et utilise cette confiance pour obtenir des informations cohérentes.

Une autre application de la fusion d'informations apparaît dans les systèmes multi-agents, lorsque les agents doivent prendre une décision collective ou déterminer quelles sont les croyances du groupe d'agents, ou le domaine de la robotique, lorqu'un agent autonome doit prendre une décision à partir de données contradictoires fournies par plusieurs capteurs. Dans les jeux virtuels se pose également le problème de l'état des croyances d'agents non humains face à des données diverses sur leur environnement. Enfin, dans les systèmes experts, on cherche à combiner les connaissances d'un groupe d'experts sur les différents aspects d'un problème, par exemple pour établir un diagnostic.

On retrouve également la problématique de la fusion dans d'autres domaines que l'informatique. Par exemple en économie, dans la recherche d'un partage équitable de marchandises, et également en Théorie du Choix Social, domaine dont le but est d'établir un moyen équitable et sûr d'élaborer les préférences d'une société à partir des préférences individuelles de ses membres. Ce dernier cas est certainement celui qui a été le plus anciennement étudié, puisque la détermination des préférences d'une société humaine est à la base de la démocratie et existait sans doute bien avant. Ainsi depuis longtemps, on cherche un moyen de prendre des décisions en se basant sur l'agrégation des préférences de chaque personne de la société, en général à l'aide d'un opérateur d'agrégation simple tel que le vote.

La difficulté de la fusion d'informations est liée à l'imperfection (incomplétude, imprécision, incertitude) de l'information apportée par chacune des sources, à l'hétérogénéité de ces informations, à la fiabilité (connue ou inconnue) des différentes sources, ainsi qu'à la nature de leur dépendance éventuelle. La résolution de ce type de problème nécessite donc le recours à des outils puissants de modélisation et de gestion des informations incertaines et imprécises. Quatre théories ont notamment été proposées pour la modélisation et le traitement de telles données : la théorie des probabilités, la théorie des possibilités, et la théorie des fonctions de croyance, la logique propositionnelle (inférence non monotone).

Dans les formalismes associés à ces théories, les informations peuvent être représentées par des strates ordinales (ou par des fonctions κ), par des bases possibilistes, par des diagrammes de causalité (réseaux bayésiens), par des fonctions de croyance.... De telles représentations complexes permettent de représenter l'incertitude liée aux informations.

2 Contribution

Parmi les différentes approches de la fusion multi-sources, les approches logiques ont suscité un intérêt croissant ces dernières années, en particulier celles qui s'inscrivent dans le cadre de la logique propositionnelle. Les opérateurs de fusion propositionnelle visent à déterminer les croyances, ou les buts, d'un groupe d'agents à partir des croyances, ou des buts, de chacun d'entre eux, exprimés sous la forme de formules propositionnelles. Les opérateurs de fusion de croyances et les opérateurs de fusion de buts sont très semblables, bien que les notions de croyances et de buts soient très différents. Typiquement, on peut utiliser des opérateurs de fusion de croyances pour fusionner des buts, et les propriétés qu'on attend de ces opérateurs sont très proches. Notre travail se situe dans le cadre propositionnel : nous nous sommes intéressés au cas où les croyances, les buts, de chaque agent s'expriment par un ensemble de formules propositionnelles. Pourquoi s'intéresser à ce cadre pour la fusion ? Tout d'abord parce que ce cadre, le plus simple possible, peut se révéler être suffisant dans de nombreuses applications. Ensuite, la logique propositionnelle est à la base de la plupart des autres approches possibles ; plus précisément, la plupart des autres approches sont des généralisations du cadre de la logique propositionnelle et on peut retrouver ce cadre comme un cas particulier de telles approches. Etudier d'abord la problématique de la fusion dans le cadre de la logique propositionnelle avant de considérer des formalismes plus complexes semble être une approche raisonnable. Enfin, le cadre de la logique propositionnelle est déjà riche et complexe et l'étude de la fusion propositionnelle un travail suffisamment ambitieux pour motiver que l'on s'en préoccupe pour elle-même.

Considérons l'exemple suivant de fusion de buts pour illustrer notre propos. Dans cet exemple, on peut représenter les buts de chaque personne comme une formule de la logique propositionnelle, puis déterminer les buts du groupe, à l'aide d'un opérateur de fusion :

Exemple 1. *Trois amis, Marie, Alain et Pierre veulent planifier leurs vacances ensemble. Ils ont à décider s'ils préfèrent aller à la montagne, à la mer, ou ne pas partir, et aussi déterminer s'ils partent durant une longue ou une courte période. Les buts de Marie sont d'aller à la fois à la mer et à la montagne s'ils partent pour une longue période, sinon elle préfère aller à la montagne seulement ou ne pas partir. Les buts d'Alain sont d'aller à la mer pour une longue période ou à la montagne pour une courte période. Enfin, Pierre veut seulement aller à la mer pour une longue période ou ne pas partir. La question est de savoir ce que doit décider le groupe pour ses vacances : mer, montagne ? longtemps ou pas ?*

Lorsque l'on est confronté à un problème de fusion de buts ou de croyances et que ce problème peut s'exprimer dans un cadre propositionnel, la question essentielle est de déterminer quel opérateur de fusion propositionnelle choisir parmi tous ceux existants. Habituellement, deux critères principaux sont utilisés pour faire ce choix :

Rationalité : Une exigence principale pour adhérer à une méthode de fusion est qu'elle possède les propriétés attendues de ce qu'intuitivement signifie « fusionner ». Cette attente conduit à définir des propriétés souhaitables (des postulats) pour un « bon » opérateur de fusion. On peut par exemple attendre d'un opérateur qu'il soit équitable (i.e. qu'il ne favorise aucun agent particulier), ou qu'il détermine un résultat cohérent. Dans le cas de la fusion de buts, on peut espérer que l'opérateur minimise l'insatisfaction individuelle en cherchant un compromis entre les buts des agents, ou au contraire qu'il cherche à satisfaire un maximum d'agents. En revanche, dans le cas de la fusion de croyances, une attente peut être que l'opérateur de fusion sélectionne des croyances parmi celles des agents, puisqu'il est souvent raisonnable de supposer que l'un d'entre eux a une vision juste de l'état réel du monde. Une fois déterminé l'ensemble des propriétés souhaitables, il est simple de choisir le ou les opérateurs les plus rationnels, c'est-à-dire qui satisfont le plus de ces postulats.

Complexité algorithmique : Lorsque l'on est à la recherche un opérateur de fusion pour un système multi-agents autonome, une attente naturelle est l'efficacité algorithmique. En effet, le problème de la fusion est de ce point de vue difficile et il est donc important pour les applications de choisir des opérateurs de faible complexité.

La plupart des opérateurs de fusion existants ont été étudiés par rapport à ces deux critères dans de nombreux travaux. Pour la rationalité, on peut se reporter à [Rev97, LS98, LM99, Kon00, KP02a, KLM02] et pour la complexité algorithmique, voir [KLM02, Neb98]. Ces travaux ont montré que les opérateurs à sélection de modèles[1] ont souvent une complexité combinatoire plus faible (l'inférence est typiquement Θ_2^p-complète ou Δ_2^p-complète) que les opérateurs à sélection de formules (l'inférence peut être Π_2^p-complète) [KLM02, Neb98]. Les opérateurs à sélection de modèles satisfont aussi typiquement plus de postulats de rationalité que les opérateurs à sélection de formules (voir [KP02a, Kon00]).

Notre thèse est que la comparaison des différents opérateurs de fusion ne peut être conduite en suivant ces deux seuls critères. En effet, il nous apparaît important de considérer un autre aspect : la manipulabilité de l'opérateur. Il est naturellement attendu des agents participant à un processus de fusion qu'ils fournissent sincèrement leurs croyances/buts. Une question ouverte est de déterminer dans quelle mesure les opérateurs de fusion propositionnelle permettent de répondre à cette attente, c'est-à-dire, comment peut-on être sûr en participant à un processus de fusion que l'on n'a pas intérêt à mentir, pour obtenir

[1] Une distinction entre opérateurs à sélection de modèles, qui sélectionnent certaines interprétations qui sont les « plus proches » des bases représentant les croyances/buts des agents, et opérateurs à sélection de formules, qui choisissent certaines formules dans l'union des bases est souvent faite [KLM02].

une base fusionnée résultante qui répond mieux à ce que l'on espère ? Une première contribution de cette thèse est de tenter de donner des réponses à ces interrogations. Nous avons proposé une définition de la *manipulation* dans le cadre de la fusion propositionnelle et évalué la manipulabilité des opérateurs de fusion existants. Le principal résultat de notre étude est que la non-manipulabilité est difficile à obtenir pour les opérateurs de fusion propositionnelle. Ce résultat peut sembler relativement attendu puisque, en théorie du choix social, un théorème (le théorème de Gibbard-Sattertwhaite), établit que dans le cas général, on ne peut pas agréger des préférences de façon non manipulable [Gib73, Sat75, Mou88]. Cependant, il existe de nombreuses restrictions permettant de garantir la non-manipulabilité de l'agrégation de préférences, donc on pourrait s'attendre à ce que la spécificité de le fusion propositionnelle et la possibilité de considérer des cas restreints, permettent d'atteindre la non-manipulabilité dans le cadre de la fusion de bases. En fait, nous montrons dans ce travail que, malheureusement, même dans avec des hypothèses très spécifiques, la plupart des opérateurs de fusion de bases de croyances/buts de la littérature sont manipulables.

Pour certaines applications particulières, certains de ces trois critères (rationalité, complexité, et manipulabilité) peuvent être plus pertinents que d'autres et cela peut conduire à définir et choisir différents opérateurs de fusion comme les meilleurs selon le contexte.

Quand on évalue les opérateurs de fusion propositionnelle existants par rapport à ces trois critères considérés conjointement, il apparaît qu'aucun opérateur de fusion n'est optimal (i.e. totalement rationnel au sens des postulats **(IC)**, en temps polynomial et non manipulable). Une deuxième contribution de cette thèse est de définir des opérateurs de fusion offrant de meilleurs compromis pour les trois critères que les opérateurs existants. Nous avons ainsi défini deux nouvelles familles d'opérateurs de fusion propositionnelle, les avons évalués par rapport à ces critères et montré qu'ils constituent des alternatives intéressantes aux opérateurs existants. Ces deux familles d'opérateurs de fusion sélectionnent les modèles de la base fusionnée parmi la disjonction des bases participants au processus de fusion : ce sont des *opérateurs de fusion disjonctive*. Cette attente est relativement naturelle dans le cas de la fusion de croyances, puisqu'elle correspond à l'idée qu'au moins un des agents possède une vision juste de l'état du monde. En effet, il est souvent raisonnable de penser que le monde réel fait partie des mondes choisis par au moins un des agents. Par exemple, si plusieurs médecins se penchent sur le cas d'un patient et que leurs croyances sont contradictoires, on peut penser que l'un d'entre eux a établi le bon diagnostic. En revanche, si l'on fusionne des buts, cette attente peut sembler moins importante, puisqu'il est assez naturel que chacun fasse des compromis par rapport à ses désirs. Si un premier agent désire $a \wedge b$ et qu'un second désire $\neg a \wedge \neg b$, il est raisonnable de penser qu'une solution optimale est de choisir $a \wedge \neg b$ ou $\neg a \wedge b$. Les opérateurs à sélection de formules sont des opérateurs de fusion disjonctives, puisqu'ils sélectionnent des ensembles maximaux cohérents dans l'union des bases de croyances. En revanche, les opérateurs à sélection de modèles ne sont en général pas des opérateurs de fusion disjonctives.

La première famille que nous avons introduite est composée des *opérateurs à quota*. Les opérateurs à quota correspondent à une idée simple : tout monde est un modèle du résultat du processus de fusion s'il satisfait « suffisamment » de bases du profil. « Suffisamment » peut signifier « au moins k » (un entier fixé, quota absolu), ou « au moins $k\%$ » (un quota relatif), ou finalement « autant que possible », et chaque interprétation induit une famille d'opérateurs de fusion spécifique. Nous avons montré que ces opérateurs ont de bonnes propriétés logiques, ont une complexité combinatoire faible et sont non manipulables.

Les opérateurs à quota peuvent néanmoins souffrir d'un faible pouvoir de discrimination. En effet, selon la valeur fixée au quota, le résultat de la fusion peut être proche d'une simple disjonction, ce qui est pauvre du point de vue de la capacité inférentielle. C'est en partie pourquoi nous avons introduit une seconde famille d'opérateurs de fusion : les opérateurs *Gmin*. Chaque opérateur *Gmin* est paramétré par une pseudo-distance et chacun d'entre eux a la propriété de raffiner les opérateurs à quota (c'est-à-dire qu'ils préservent plus d'information). Ces opérateurs sont, comme les opérateurs à sélection de modèles, plus rationnels que les opérateurs de fusion à sélection de formules, mais ils choisissent, comme ces derniers, leurs modèles dans la disjonction des bases de croyances. Nous avons donc montré que les opérateurs *Gmin* offrent une alternative intéressante aux opérateurs à sélection de formules.

3 Plan du mémoire

Cette thèse est organisée en trois parties principales. Après avoir , dans le paragraphe 3, posé les notations utilisées et précisé quelques conventions formelles suivies tout au long de cet écrit, la première partie fournit une synthèse des travaux existants centrés sur la fusion et le vote.

La deuxième partie présente la première contribution de cette thèse. Elle consiste en une étude de la manipulabilité de la plupart des opérateurs de fusion propositionnelle de la littérature, incluant les opérateurs à sélection de modèles et les opérateurs à sélection de formules. Pour chaque opérateur considéré, nous avons déterminé s'il est manipulable dans le cas général, et si, le cas échéant, la manipulabilité peut être évitée sous certaines restrictions du processus de fusion (comme le nombre d'agents et la présence de contraintes d'intégrité) ou des stratégies autorisées pour les agents.

La troisième partie présente la seconde contribution de cette thèse. Cette partie est consacrée à la présentation et à l'étude de deux familles d'opérateurs de fusion au travers de trois critères d'évaluation (rationalité, complexité et manipulabilité). Nous y montrons que les opérateurs à quota et les opérateurs *Gmin* sont des opérateurs disjonctifs qui représentent de bons compromis pour ces critères par rapport aux opérateurs existants.

Enfin, en conclusion, nous discutons les résultats obtenus, les mettons en perspective et présentons les suites envisagées à cette thèse.

Notations

4 Logique propositionnelle

Un langage propositionnel $\mathcal{L}$ est défini inductivement comme le pour petit ensemble (pour l'inclusion ensembliste) de mots définis à partir d'un ensemble fini (et non vide) de variables propositionnelles $\mathcal{P}$ et d'un ensemble de connecteurs C comme suit :

– $\forall x \in \mathcal{P}, x \in \mathcal{L}$,
– si c d'arité n est dans C et $x_1, \ldots, x_n$ sont dans $\mathcal{L}$, alors $cx_1 \ldots x_n$ est dans $\mathcal{L}$.

Tout élément de $\mathcal{L}$ est appelé proposition ou formule. Nous considérons ici un langage propositionnel « classique », c'est-à-dire construit à partir des connecteurs :

– $\top$, la constante booléenne toujours vraie et $\bot$, la constante booléenne toujours fausse,
– $\neg$ (négation) d'arité 1,
– $\wedge$ (conjonction), $\vee$ (disjonction), $\rightarrow$ (implication matérielle) et $\Leftrightarrow$ (équivalence) d'arité 2.

On peut associer une sémantique à tout élément de $\mathcal{L}$. Une interprétation (ou monde) ω de $\mathcal{L}$ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$. Elle peut être représentée par un vecteur sur $\{0, 1\}$ en supposant qu'un ordre strict total est spécifié sur $\mathcal{P}$. Pour éviter de manipuler des notations trop lourdes, on identifie chaque monde ω avec le terme canonique sur $\mathcal{P}$ dont ω est l'unique modèle. Par exemple, si $\mathcal{P} = \{a, b\}$ et $\omega(a) = 1$, $\omega(b) = 0$, ω est identifié au terme $a \wedge \neg b$, ou encore au vecteur 10. L'ensemble de toutes les interprétations est noté $\mathcal{W}$.

La sémantique $[|\phi|](\omega)$ d'une formule ϕ de $\mathcal{L}$ dans l'interprétation ω est un élément de $\{0, 1\}$ défini inductivement par :

– Si $\phi \in \mathcal{P}$, $[|\phi|](\omega) = \omega(\phi)$,
– Si $\phi = cx_1 \ldots x_n$, $[|\phi|](\omega) = c_F([|x_1|](\omega), \ldots, [|x_n|](\omega))$, où c_F est l'unique application de $[0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$ dans $[0, 1]$ associée à c.

Une interprétation ω est un modèle d'une formule $\phi \in \mathcal{L}$ si et seulement si elle la rend vraie au sens fonctionnel usuel, c'est-à-dire si et seulement si $[|\phi|](\omega) = 1$. Dans le cas contraire, ω est un contre-modèle de ϕ.

$[\phi]$ représente l'ensemble de modèles de la formule ϕ, i.e. $[\phi] = \{\omega \in \mathcal{W} \mid \omega \models \phi\}$.

Une formule ϕ de $\mathcal{L}$ est cohérente si et seulement si $[\phi] \neq \emptyset$. ϕ est une conséquence logique d'une formule ψ, noté $\psi \models \phi$, si et seulement si $[\psi] \subseteq [\phi]$. Deux formules sont logiquement équivalentes ($\equiv$) si elles partagent les mêmes modèles.

5 Fusion propositionnelle

Une base de croyances/buts K représente l'ensemble de croyances/buts d'un agent. C'est un ensemble fini de formules propositionnelles, interprétées conjonctivement. Lorsque $K = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ est une base de croyances/buts, $\widehat{K}$ représente la base singleton contenant la conjonction $\bigwedge K = \{\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n\}$ de toutes les formules de K. On dit qu'une base de croyances/buts est cohérente si $\bigwedge K$ est cohérente. Dans ce cas, on note $\omega \models K$ pour $\omega \models \bigwedge K$. Une base de croyances/buts est dite complète si elle a exactement un modèle. Si ω est ce modèle, on note $K = K_\omega$. Dans la suite, on utilise le terme « base » pour une base de croyances ou de buts, indifféremment. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des bases.

Exemple 2. *Soit $\mathcal{P} = \{a, b\}$. Alors $K = \{a, a \rightarrow b\}$ est un exemple de base. Elle est complète car elle a un seul modèle $a \wedge b$.*

Un profil de croyances/buts E dénote le groupe d'agents impliqués dans le processus de fusion. C'est un multi-ensemble non vide de bases de croyances/buts $E = \{K_1, \dots, K_n\}$ (puisque deux agents peuvent exhiber des bases identiques). Dans la suite, on utilise le terme profil pour profil de croyances ou de buts, indifféremment. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des profils.

$\bigwedge E$ représente la conjonction des bases de $E = \{K_1, \dots, K_n\}$, i.e. $\bigwedge E = \bigwedge K_1 \wedge \dots \wedge \bigwedge K_n$, et on note $\bigvee E$ la disjonction des bases de E, i.e. $\bigvee E = \bigwedge K_1 \vee \dots \vee \bigwedge K_n$.

Un profil E est dit cohérent si et seulement si $\bigwedge E$ est cohérent. On note alors $\omega \models E$ pour $\omega \models \bigwedge E$. L'union multi-ensembliste est noté $\sqcup$ et la relation d'inclusion multi-ensembliste est notée $\sqsubseteq$.

Exemple 3. *Soit $\mathcal{P} = \{a, b\}$. On considère deux bases de croyances $K_1 = \{a, a \rightarrow b\}$ et $K_2 = \{\neg a \vee b\}$, et les profils $E_1 = \{K_1, K_2\}$ et $E_2 = \{K_1, K_2, K_1\}$.*

On a : $\bigwedge E_1 = (a \wedge (a \rightarrow b)) \wedge (\neg a \vee b) \equiv a \wedge b$, donc E_1 est cohérent. On a aussi : $\bigvee E_1 = (a \wedge (a \rightarrow b)) \vee (\neg a \vee b) \equiv \neg a \vee b$.

$E_1 \sqcup E_2 = \{K_1, K_2, K_1, K_2, K_1\}$ et $E_1 \sqsubseteq E_2$.

Le cardinal d'un ensemble fini (ou d'un multi-ensemble fini) A est noté $\#(A)$. $\subseteq$ représente l'inclusion ensembliste et $\subset$ l'inclusion ensembliste stricte, i.e. $A \subset B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $A \neq B$.

Une contrainte d'intégrité est une formule cohérente de $\mathcal{L}$ que la base fusionnée doit satisfaire (elle peut représenter des lois physiques, des normes, etc.). Elle est indépendante du profil. On note en général cette contrainte μ.

Un opérateur de fusion est une application Δ qui associe à tout couple (E, μ) de $\mathcal{E} \times \mathcal{L}$ une base K de $\mathcal{K}$. Le résultat de la fusion des bases d'un profil E (ou fusion d'un profil E) avec l'opérateur de fusion $\triangle$, sous la contrainte d'intégrité μ, est noté $\triangle_\mu(E)$ plutôt que $\Delta(E, \mu)$ et est appelé la base fusionnée .

Si E_1 et E_2 sont deux profils de croyances, on dit que E_1 et E_2 sont équivalents, noté $E_1 \equiv E_2$ si et seulement si il existe une bijection f de $E_1 = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ dans $E_2 = \{K'_1, K'_2, \dots, K'_n\}$ telle que $f(K_i) \Leftrightarrow K'_i$. Cela signifie qu'à l'équivalence logique près et à la permutation près, on a le même profil. On peut envisager d'autres définitions de cette équivalence entre profil (voir [Rev97] par exemple), mais celle-ci semble la plus naturelle.

6 Ordre et pré-ordre

Un pré-ordre $\leq$ sur $\mathcal{W}$ est une relation réflexive et transitive. Un pré-ordre sur $\mathcal{W}$ est total si $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}$, $\omega \leq \omega'$ ou $\omega' \leq \omega$. Un pré-ordre sur $\mathcal{W}$ est total si $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}$, $\omega \leq \omega'$ ou $\omega' \leq \omega$. Un ordre strict $<$ sur $\mathcal{W}$ est une relation irréflexive, transitive et asymétrique (on ne peut avoir en même temps $\omega < \omega'$ et $\omega' < \omega$).

Soit $\leq$ un pré-ordre sur $\mathcal{W}$. On peut définir un ordre correspondant $<$ sur $\mathcal{W}$ par $\omega < \omega'$ si et seulement si $\omega \leq \omega'$ et $\omega' \not\leq \omega$, et la relation d'équivalence sur $\mathcal{W}$ induite par $\leq$ (indifférence) $\simeq$ est donnée par $\omega \simeq \omega'$ si et seulement si $\omega \leq \omega'$ et $\omega' \leq \omega$. On écrit $\omega \in \min(A, \leq)$ si et seulement si $\omega \in A$ et $\nexists \omega' \in A$ s.t. $\omega' < \omega$.

7 Complexité algorithmique

On suppose le lecteur familier avec les classes P=Δ_0^p=Σ_0^p=Π_2^p, NP=Σ_1^p et coNP=Π_1^p et on considère les classes suivantes situées au premier et deuxième niveaux de la hiérarchie polynomiale (voir [Pap94, Neb98] pour une introduction à la théorie de la complexité) :

- $\mathsf{BH(2)}$ (connu aussi comme DP) est la classe de tous les langages L tels que $L = L_1 \cap L_2$, où L_1 est dans NP et L_2 dans coNP. Un problème complet canonique de la classe $\mathsf{BH(2)}$ est le problème $\mathsf{SAT\text{-}UNSAT}$: étant données deux formules propositionnelles φ et ψ, a t'on φ est cohérent et ψ est incohérent ?
- $\mathsf{BH(3)}$ est la classe de tous les langages L tels que $L = L_1 \cup L_2$, où L_1 est dans $\mathsf{BH(2)}$ et L_2 dans NP. Un problème complet canonique de la classe $\mathsf{BH(3)}$ est : étant données trois formules propositionnelles φ, ψ et γ, a t'on φ est cohérent et (ψ est cohérent ou γ est incohérent) ?
- $\mathsf{coBH(3)}$ est la classe de tous les langages L tels que $\overline{L} \in \mathsf{BH(3)}$. Un problème complet canonique de la classe $\mathsf{coBH(3)}$ est : étant données trois formules propositionnelles φ, ψ et γ, a t'on φ est incohérent ou (ψ est incohérent et γ est cohérent) ?
- $\Delta_2^p = \mathsf{P}^{\mathsf{NP}}$ est la classe de tous les langages qui peuvent être reconnus en temps polynomial par une machine de Turing déterministe munie d'un oracle NP, où un oracle NP résout n'importe quelle instance d'un problème NP en une unité de temps. Un problème canonique complet pour Δ_2^p est le problème $\mathsf{MAX\text{-}SAT\text{-}ASG_{odd}}$: étant données une formule propositionnelle φ sous forme normale conjonctive (ou un ensemble de clauses) sur les variables propositionnelles $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la fonction de poids W définie sur les interprétations $\alpha : \{p_1, \ldots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $W(\alpha) = \Sigma_i \alpha(p_i) 2^{i-1}$, est-ce-que l'interprétation de poids maximal qui satisfait φ est paire ?
- $\Theta_2^p = \Delta_2^p[\mathcal{O}(log\, n)]$ est la classe de tous les langages qui peuvent être reconnus en temps polynomial par une machine de Turing déterministe utilisant un nombre d'appels à un oracle NP borné par une fonction logarithmique de la taille de l'entrée. Θ_2^p contient les classes de la hiérarchie booléenne BH et coBH, qui sont les classes de problèmes qu'on peut résoudre avec un nombre d'appels constants à un oracle. Un problème canonique complet est le problème $\mathsf{PARITY\text{-}SAT}$: étant donnée une suite de formules propositionnelles $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ telles que $\varphi_i \notin \mathsf{SAT}$ implique $\varphi_{i+1} \notin \mathsf{SAT}$, l'indice maximal i telle que φ_i est satisfiable est-il pair ?
- $\Sigma_2^p = \mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$ est la classe de tous les langages qui peuvent reconnus en temps polynomial par une machine de Turing non déterministe munie d'un oracle NP, où un oracle NP résout n'importe quelle instance d'un problème NP en une unité de temps. Le problème complet canonique de Σ_2^p est le problème **2-QBF**, c'est-à-dire le problème de décider si la formule booléenne quantifiée suivante est vraie :
$$\exists p \forall q, \phi(p, q).$$
- $\Pi_2^p = co\Sigma_2^p$ est la classe de tous les langages L tels que $\overline{L} \in \Sigma_2^p$. Le problème complet canonique de Π_2^p est le problème $\overline{\textbf{2-QBF}}$.

On a évidemment les inclusions suivantes :

$$\mathsf{BH(2)} \subseteq \mathsf{BH(3)} \subseteq \Theta_2^p \subseteq \Delta_2^p \subseteq \Sigma_2^p.$$

et

$$\mathsf{coBH(3)} \subseteq \Theta_2^p \subseteq \Delta_2^p \subseteq \Pi_2^p.$$

Nous présentons ici le seul problème auquel nous nous sommes intéressés du point de vue de la complexité, celui de l'inférence pour les bases fusionnées. Soit $\triangle$ un opérateur de fusion propositionnelle, on considère le problème de décision suivant FUSION($\triangle$) :

- **Entrée :** un triplet $\langle E, \mu, \alpha \rangle$ où $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ est un profil, $\mu \in \mathcal{L}$ est une contrainte d'intégrité, et $\alpha \in \mathcal{L}$ est une formule.

– **Question :** A-t-on $\triangle_\mu(E) \models \alpha$?

Première partie

Généralités sur l’agrégation

Chapitre 1

Fusion

La problématique de la fusion propositionnelle est multi-forme à cause de la variété des informations possibles à fusionner. Si l'on veut fusionner les croyances propositionnelles de divers agents sur l'état du monde réel, il peut sembler important que le résultat fasse partie des croyances d'au moins un agent. Si l'on veut fusionner des buts propositionnels, alors on peut attendre qu'un compromis soit trouvé entre les désirs de chacun et ne pas nécessairement choisir le résultat parmi les buts des agents. Eventuellement, on peut être conduit à considérer des relations de plausibilité sur les croyances de chaque agent, lui permettant de représenter la confiance qu'il a en chaque monde. On attend alors des méthodes de fusion qu'elles agrègent à la fois les informations et les relations de plausibilité, afin de déterminer comment le groupe d'agents considérés perçoit le monde réel. On peut encore prendre en compte une relation de confiance entre les sources, qui indique la fiabilité de chacune, et permet de régler certains conflits.

L'objectif de cette partie est de donner un aperçu des travaux existants dans le domaine de la fusion d'informations. Elle est organisée en deux principales parties : tout d'abord, nous nous intéressons aux opérateurs de fusion dans le cadre propositionnel, puis à ceux définis dans des cadres plus complexes, c'est-à-dire les opérateurs de fusion de bases pondérées. Compte tenu de la diversité des cadres où la problématique de la fusion est considérée, cette présentation ne se veut nullement exhaustive.

1.1 Fusion de bases propositionnelles

Dans le cadre propositionnel « standard », on considère un ensemble de sources d'informations qui ont toute la même fiabilité. Chaque source d'information est appelé base, elle définit les croyances ou les buts d'un agent et est représentée par un ensemble fini de formules propositionnelles cohérentes, ou de façon équivalente par l'ensembles des modèles de la conjonction de ces formules. L'ensemble des bases de croyances/buts est appelé profil, c'est un multi-ensemble fini qui représente les croyances ou les buts du groupe d'agents. L'objectif d'un processus de fusion est de déterminer quelles sont les croyances/buts du groupe d'agents, à partir de leurs croyances/buts individuels.

Deux approches simples sont possibles pour définir une base fusionnée $\Delta_\mu(E)$ d'un profil E sous la contrainte μ dans le cas propositionnel, selon que l'on considère des pré-ordres entre interprétations ou non. Dans le cas où aucun pré-ordre n'est utilisé, on peut définir la base fusionnée de deux manières, qui dépendent de la présence ou de l'absence de conflits entre les sources, précisément :

– par une conjonction :

$$\Delta_\mu^C(E) = \bigwedge(E) \wedge \mu$$

– par une disjonction :

$$\Delta_\mu^D(E) = (\bigvee(E)) \wedge \mu$$

La première approche est appropriée lorsque les bases ne sont pas conflictuelles, c'est-à-dire si $\bigwedge(E) \wedge \mu$ est cohérent ; et la seconde approche dans le cas contraire. Cependant, même si la disjonction permet de garantir la cohérence de la base fusionnée (dès qu'au moins une base K_i est cohérente), cette approche est souvent trop prudente. C'est pour remédier à ce problème que des alternatives intermédiaires (c'est-à-dire « entre la conjonction et la disjonction ») ont été proposées. Elles sont en général basées sur la sélection de certains sous-ensembles cohérents maximaux de E, qui sont maximaux soit pour l'inclusion, soit pour la cardinalité.

Une autre approche consiste à associer des pré-ordres entre interprétations aux profils E. Les modèles de la base fusionnée sont alors les modèles de μ minimaux pour le pré-ordre, c'est-à-dire ceux qui sont « les plus proches » de E. Un moyen simple d'associé un pré-ordre entre interprétations à un profil est d'utiliser une distance d entre interprétations, précisément :

1. on classe l'ensemble des interprétations pour chaque base propositionnelle K_i en utilisant une « distance » $d(\omega, K_i)$.
2. on classe l'ensemble des interprétations pour l'ensemble des bases propositionnelles, en calculant la « distance » globale entre chaque interprétation et le profil : $d(\omega, E)$.
3. on sélectionne les interprétations qui sont des éléments minimaux pour l'ordre induit entre interprétations par cette « distance » globale, ce sont les modèles de la base fusionnée.

Bien sûr, si tous les agents sont d'accord sur certaines croyances/buts, c'est-à-dire si le profil est cohérent, on peut raisonnablement penser que la fusion doit être simplement les croyances/buts sur lesquelles tous les agent s'accordent (la conjonction des bases du profil). Le problème n'est plus si simple si le profil n'est pas cohérent, autrement dit si certaines croyances/buts sont conjointement contradictoires. Comment sélectionner une méthode particulière ? Pour pouvoir comparer ces méthodes entre elles, il est nécessaire de réfléchir aux propriétés souhaitables du processus de fusion. Dans ce but, nous rappelons tout d'abord brièvement les postulats de rationalité mis en place par Konieczny et Pino-Perez [KP99, KP02a] parce leurs travaux généralisent les précédentes propositions de Revesz [Rev93, Rev97], Liberatore et Schaerf [LS98], ou Lin et Mendelzon [LM99]. Les postulats proposés ont pour objectif de « capturer » les opérateurs de fusion ayant un comportement attendu. Après avoir rappelé ces postulats, nous présentons les deux principales familles d'opérateurs de fusion propositionnelle de la littérature. La première famille, appelée « opérateurs à sélection de modèles » (en anglais *model-based operators*), est définie par un processus de sélection de certaines interprétations. La seconde famille, appelée « opérateurs à sélection de formules » (en anglais *formula-based operators*), est caractérisée par un processus de sélection de certaines formules. Nous donnons également quelques exemples d'opérateurs de fusion contrainte de chaque famille. Enfin, la dernière partie de cette section présente des opérateurs de fusion propositionnelle définis par deux étapes d'agrégation, les opérateurs DA^2, qui permettent à la fois de prendre en compte de façon non triviale les bases de croyances incohérentes (ce qui n'est pas le cas des opérateurs à sélection de modèles), et la redondance d'information (ce qui n'est pas le cas des opérateurs à sélection de formules).

1.1.1 Caractérisation logique des opérateurs de fusion contrainte

Les travaux existants sur les propriétés logiques des opérateurs de fusion s'appuient sur le cadre AGM [AGM85, Gär88], une caractérisation logique des opérateurs de révision. La révision consiste à déterminer l'état de croyances d'un agent après avoir pris connaissance d'une information nouvelle, considérée comme plus fiable (on parle de primauté de la nouvelle information). Bien que ce problème semble a priori différent de celui de la fusion de connaissances, Konieczny et Pino-Perez ont montré que les opérateurs de fusion contraintes qu'ils ont proposés permettent de capturer la révision, en considérant que la nouvelle information par laquelle on veut réviser est une contrainte d'intégrité. De manière générale, les postulats proposés tentent de garantir à l'opérateur de fusion considéré un comportement compatible avec la fusion. Dans ce cadre, on dispose de diverses sources d'informations (le profil), d'une contrainte d'intégrité (une formule cohérente que le résultat de la fusion doit respecter et qui peut représenter des lois, des normes, ou autre, indépendante du processus de fusion), et on veut déterminer la base fusionnée correspondante, c'est-à-dire le résultat de la mise en commun des diverses informations sous la contrainte d'intégrité donnée. Les postulats retenus décrivent des propriétés que doit vérifier la base fusionnée, afin d'assurer par exemple l'équité entre les sources, qui est importante dans l'idée de la fusion, mais aussi d'autres propriétés souhaitables :

Définition 1 (opérateurs de fusion contrainte)**.** [KP02a] Soient $\triangle$ un opérateur de fusion propositionnelle, E, E_1, E_2 des profils, K_1, K_2 deux bases et μ, μ_1, μ_2 des formules. $\triangle$ est un *opérateur de fusion contrainte* si et seulement si il satisfait les postulats suivants :

(IC0) $\triangle_\mu(E) \models \mu$.

(IC1) Si μ est cohérent, alors $\triangle_\mu(E)$ est cohérent.

(IC2) Si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent, alors $\triangle_\mu(E) \equiv \bigwedge E \wedge \mu$.

(IC3) Si $E_1 \equiv E_2$ and $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\triangle_{\mu_1}(E_1) \equiv \triangle_{\mu_2}(E_2)$.

(IC4) Si $K_1 \models \mu$ et $K_2 \models \mu$, alors $\triangle_\mu(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1$ est cohérent si et seulement si $\triangle_\mu(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2$ est cohérent.

(IC5) $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2) \models \triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2)$.

(IC6) Si $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2)$ est cohérent, alors $\triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2) \models \triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2)$

(IC7) $\triangle_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$.

(IC8) Si $\triangle_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\triangle_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \triangle_{\mu_1}(E)$.

Le postulat **(IC0)** assure que le résultat de la fusion satisfait les contraintes d'intégrité. **(IC1)** demande que le résultat de la fusion soit cohérent si les contraintes d'intégrité le sont. Le troisième postulat, **(IC2)**, représente une attente assez naturelle pour la fusion : en l'absence de contradiction entre les croyances des agents, le résultat de la fusion est simplement la conjonction des bases des agents, avec la contrainte d'intégrité. **(IC3)** assure « l'indépendance » du processus de fusion par rapport à la syntaxe : si deux profils sont équivalents, ainsi que les contraintes, on est en droit d'attendre du processus de fusion que les deux bases fusionnées soient équivalentes également. **(IC4)** correspond à un principe d'équité : un opérateur de fusion doit avoir un comportement symétrique entre deux bases lors de leur fusion, il ne doit en privilégier aucune. Notons que ce postulat peut difficilement être étendu à plus de deux bases, puisque, à partir de trois bases, des « synergies » peuvent apparaître entre les bases. Le postulat **(IC5)** exprime l'idée suivante : si un monde fait partie des alternatives choisies indépendamment par un groupe E_1 et par un groupe E_2, alors il doit aussi faire partie des alternatives choisies par le groupe formé par E_1 et E_2 conjointement. En ajoutant le postulat **(IC6)** au postulat **(IC5)**, on obtient que les si elles existent, les alternatives choisies indépendamment par un groupe E_1 et par un groupe E_2, sont exactement les alternatives choisies par le groupe formé par E_1 et E_2 conjointement. **(IC7)** garantit qu'un monde faisant partie des alternatives choisies par un groupe E suivant la contrainte μ_1 et qui est cohérent avec une contrainte μ_2 fera aussi partie des alternatives choisies par le groupe E suivant les contraintes $\mu_1 \wedge \mu_2$ (cela traduit une notion de proximité : si un monde est suffisamment « proche » de E pour être choisi et fait partie des modèles de μ_2, il doit rester suffisamment proche de E avec la contrainte $\mu_1 \wedge \mu_2$. En d'autres termes, le choix des mondes ne dépend que de la proximité au profil). En ajoutant le postulat **(IC8)** au postulat **(IC7)**, on obtient que les si elles existent, les alternatives choisies par un groupe E cohérentes avec μ_2 sont exactement les alternatives choisies par le groupe E en suivant les contraintes $\mu_1 \wedge \mu_2$.

On peut également définir un postulat supplémentaire, le postulat de disjonction **(Disj)**, qui assure que les modèles de la base fusionnée sont choisis parmi les modèles de la disjonction des bases du profil, c'est-à-dire parmi les modèles d'au moins une base du profil :

(Disj) Si $(\bigvee E) \wedge \mu$ est cohérent, alors $\triangle_\mu(E) \models (\bigvee E) \wedge \mu$.

Les opérateurs de fusion vérifiant cette propriété sont des *opérateurs de fusion disjonctive*.

Parmi les opérateurs de fusion contraintes, deux familles peuvent être distinguées : les opérateurs majoritaires, dont le but est de satisfaire au mieux le groupe dans son ensemble, et les opérateurs d'arbitrage, qui tente de diminuer l'insatisfaction individuelle de chaque agent du groupe.

Un opérateur de fusion contrainte est un *opérateur de fusion contrainte majoritaire* s'il satisfait **(Maj)** :

(Maj) [KP02a] $\exists n \ \triangle_\mu\,(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}) \models \triangle_\mu(E_2)$.

Ce postulat exprime l'idée que si une croyance est partagée par un nombre suffisant de membres du groupe, alors elle doit faire partie des croyances du groupe.

Un opérateur de fusion contrainte est un *opérateur de fusion contrainte d'arbitrage* s'il satisfait **(Arb)** :

(Arb) [KP02a] $\left.\begin{array}{l} \triangle_{\mu_1}(K_1) \equiv \triangle_{\mu_2}(K_2) \\ \triangle_{\mu_1 \Leftrightarrow \neg\mu_2}(\{K_1, K_2\}) \equiv (\mu_1 \Leftrightarrow \neg\mu_2) \\ \mu_1 \not\models \mu_2 \\ \mu_2 \not\models \mu_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle_{\mu_1 \vee \mu_2}(\{K_1, K_2\}) \equiv \triangle_{\mu_1}(K_1)$.

L'intuition derrière cette propriété est plus simple à appréhender quand elle est exprimée en terme de conditions sur les mondes. L'idée derrière ce postulat est que si les résultats de la fusion de deux bases sous deux contraintes μ_1 et μ_2 sont équivalentes et si, de plus, les alternatives préférées par le groupe formé des deux bases sous une seule des deux contraintes sont exactement cette contrainte, alors les alternatives préférées du groupe sous l'union des deux contraintes doivent être les alternatives préférées d'un groupe sous une seule contrainte.

Ces propriétés logiques peuvent être associées à un théorème de représentation, qui fait correspondre à chaque opérateur vérifiant ces propriétés logiques une fonction, qui associe à chaque profil un pré-ordre sur les interprétations. Un tel théorème fournit une caractérisation constructive des opérateurs de fusion contrainte. Avant de donner ce théorème, nous avons besoin de définir la notion d' *assignement syncrétique* :

Définition 2 (assignement syncrétique)**.** [KP02a] Un *assignement syncrétique* est une fonction qui associe à chaque profil E un pré-ordre $\leq_E$ sur les interprétations telle que pour tous profils E, E_1, E_2 et pour toutes bases K, K' on a :

1. Si $\omega \models E$ et $\omega' \models E$, alors $\omega \simeq_E \omega'$
2. Si $\omega \models E$ et $\omega' \not\models E$, alors $\omega <_E \omega'$
3. Si $E_1 \equiv E_2$, alors $\leq_{E_1} = \leq_{E_2}$
4. $\forall \omega \models K, \exists \omega' \models K', \omega' \leq_{\{K,K'\}} \omega$
5. Si $\omega \leq_{E_1} \omega'$ et $\omega \leq_{E_2} \omega'$, alors $\omega \leq_{E_1 \sqcup E_2} \omega'$
6. Si $\omega <_{E_1} \omega'$ et $\omega <_{E_2} \omega'$, alors $\omega <_{E_1 \sqcup E_2} \omega'$

La première condition impose que deux modèles d'un même profil sont équivalents par rapport au pré-ordre associé à ce profil. La seconde condition dit qu'un modèle d'un profil est strictement préféré pour le pré-ordre associé à un contre-modèle. La troisième condition est une forme « d'indépendance par rapport à la syntaxe » : si deux profils sont équivalents, alors les pré-ordres associés sont identiques.

La quatrième condition porte sur le pré-ordre associé à un profil constitué de deux bases : pour tout modèle de l'une des bases, il existe un modèle de l'autre base qui est au moins aussi bon pour le pré-ordre associé à l'union des deux bases (aucune des deux bases n'est favorisée).

La cinquième condition est liée à l'idée suivante : si une interprétation est préférée à une autre pour les pré-ordres associés à deux profils E_1 et E_2, alors cette interprétation doit également être préférée pour le pré-ordre associé à $E_1 \sqcup E_2$, et la sixième condition est un renforcement de la cinquième condition pour des préférences strictes. Ces conditions peuvent être considérées comme des traductions de la condition de Pareto en Théorie du Choix Social.

On peut à présent énoncer le théorème de représentation suivant :

Proposition 1. *[KP02a] Un opérateur Δ est un opérateur de fusion contrainte si et seulement si il existe un assignement syncrétique qui associe à chaque profil E un pré-ordre total $\leq_E$ tel que :*

$$[\Delta_\mu(E)] = min([\mu], \leq_E).$$

On peut étendre cette représentation aux opérateurs majoritaires et d'arbitrage.

Définition 3 (assignement syncrétique majoritaire)**.** [KP02a] Un *assignement syncrétique majoritaire* est un assignement syncrétique qui vérifie la condition suivante :

7. Si $\omega <_{E_2} \omega'$, alors $\exists n$ tel que $\omega <_{E_1 \sqcup E_2^n} \omega'$.

où E_2^n représente $\overbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}^{n}$.

Cette condition indique que si l'on répète un profil E_2 suffisamment, alors les préférences strictes de E_2 seront respectées.

Définition 4 (assignement syncrétique juste)**.** [KP02a] Un *assignement syncrétique juste* est un assignement syncrétique qui vérifie la condition suivante :

8. $\left.\begin{array}{l} \omega <_{E_1} \omega_1 \\ \omega <_{E_2} \omega_2 \\ \omega_1 \simeq_{E_1 \sqcup E_2} \omega_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega <_{E_1 \sqcup E_2} \omega_1$

Cette condition dit que ce sont les choix médians qui sont préférés pour le groupe.

Ainsi, on a :

Proposition 2. *[KP02a] Un opérateur Δ est un opérateur de fusion contrainte majoritaire (resp. d'arbitrage) si et seulement si il existe un assignement syncrétique majoritaire (resp. juste) qui associe à chaque profil E un pré-ordre total $\leq_E$ tel que :*

$$[\Delta_\mu(E)] = min([\mu], \leq_E).$$

1.1.2 Opérateurs de fusion à sélection de modèles

Dans cette partie, nous présentons une première grande famille d'opérateurs de fusion existants, les opérateurs de fusion à sélection de modèles, basés sur la sélection de certaines interprétations de la contrainte d'intégrité, les plus « proches » du profil. La proximité est définie usuellement grâce à une notion de distance et une fonction d'agrégation [Rev97, KP98, KP99, LM99, LS98].

Un travail très complet sur une généralisation de ces opérateurs est [KLM04] ; on peut déduire des résultats fournis dans [KLM04] des résultats de complexité et les propriétés logiques satisfait par la plupart des opérateurs à sélection de modèles (et également de certains opérateurs à sélection de formules). Nous reviendrons sur ce travail dans la suite (cf paragraphe 1.1.4).

Caractérisation des modèles de la fusion

On définit tout d'abord la notion de proximité entre interprétations à l'aide d'une pseudo-distance :

Définition 5 ((pseudo-)distances)**.**
– Une *pseudo-distance* entre interprétations est une fonction totale $d : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^+$ t.q. pour tout $\omega, \omega', \omega'' \in \mathcal{W}$: $d(\omega, \omega') = d(\omega', \omega)$, et $d(\omega, \omega') = 0$ si et seulement si $\omega = \omega'$.
– Une *distance* entre interprétations est une pseudo-distance qui satisfait l'inégalité triangulaire : $\forall \omega, \omega', \omega'' \in \mathcal{W}$, $d(\omega, \omega') \leq d(\omega, \omega'') + d(\omega'', \omega')$.

Deux distances entre interprétations couramment utilisées sont les distances de Dalal [Dal88], notée d_H, qui est la distance de Hamming entre les interprétations (le nombre de variables propositionnelles de valuations différentes entre les deux interprétations) ; et la distance drastique, notée d_D, qui est sans doute la plus simple pseudo-distance que l'on peut définir : elle donne 0 si les deux interprétations sont identiques et 1 sinon.

Exemple 4. *Soient $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$, et trois interprétations $\omega_1 = a \wedge b \wedge c$, $\omega_2 = a \wedge b \wedge \neg c$ et $\omega_3 = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$. Alors :*
– $d_D(\omega_1, \omega_2) = d_D(\omega_1, \omega_3) = d_D(\omega_2, \omega_3) = 1$.
– $d_H(\omega_1, \omega_2) = 1$, $d_H(\omega_1, \omega_3) = 3$, *et* $d_H(\omega_2, \omega_3) = 2$.

Définition 6 (fonction d'agrégation)**.** [KLM04] Une *fonction d'agrégation* f est une fonction totale associant un nombre réel non négatif à tout tuple fini de nombres réels non négatifs et t.q. pour tout $x_1, \ldots, x_n, x, y \in \mathbb{R}^+$:
– si $x \leq y$, alors $f(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n) \leq f(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)$. *(croissance)*
– $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n = 0$. *(minimalité)*
– $f(x) = x$. *(identité)*

Des fonctions d'agrégation couramment utilisées sont le Max [Rev97, KP02a], la somme Σ [Rev97, LM99, KP99], ou le leximax $GMax$ [KP99, KP02a].

Exemple 5. *Considérons les entiers $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 1$. Alors :*
– $Max(x_1, x_2, x_3) = 2$
– $\Sigma(x_1, x_2, x_3) = 0 + 2 + 1 = 3$
– $GMax(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0)$

Présentée ainsi, le leximax n'est pas une fonction d'agrégation au sens de la définition 6, puisque le résultat est un vecteur, pas un réel. En fait, une transformation simple permet de passer de façon unique de ce vecteur à un réel, et permet donc de considérer le leximax comme une fonction d'agrégation. Cette transformation est la suivante : on définit M comme un majorant strict des x_i (c'est-à-dire que pour tout vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i < M$), et on pose $q(i) = M^{n-i}$. Alors, l'ordre induit sur les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ par l'ordre des réels $\Sigma_i q(i) x_{\sigma(i)}$ (avec σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \ldots x_{\sigma(n)}$) est exactement l'ordre lexicographique (voir le paragraphe 1.1.4).

La distance entre interprétations choisie induit une « distance »[2] entre une interprétation et une base, ce qui donne une « distance » entre une interprétation et un profil, en utilisant une fonction d'agrégation. Cette dernière distance donne la notion recherchée de proximité au multi-ensemble E, noté $\leq_E$ (un pré-ordre sur $\mathcal{W}$ induit par E).

[2] Terme abusif puisque ce n'est pas une distance du point de vue mathématique. Nous ferons cet abus dans la suite et utiliserons le terme distance (sans utiliser de guillemets, pour alléger l'écriture)

Définition 7 (opérateurs de fusion à sélection de modèles)**.** Soient d une pseudo-distance entre interprétations et f une fonction d'agrégation. L'*opérateur à sélection de modèles* noté $\triangle_{\mu}^{d,f}(E)$ de la fusion du profil E étant donné la contrainte d'intégrité μ est définie par :

$$[\triangle_{\mu}^{d,f}(E)] = \min([\mu], \leq_E) = \{\omega \in [\mu] \mid \nexists \omega' \in [\mu],\ \omega' <_E \omega\}$$

où :

- $\omega \leq_E \omega'$ si et seulement si $d(\omega, E) \leq d(\omega', E)$, avec
- $d(\omega, E) = f_{\{K \in E\}}(d(\omega, K))$, et
- $d(\omega, K) = min_{\omega' \models K} d(\omega, \omega')$.

On peut observer que $d^f(\omega, E)$ serait une notation plus correcte que $d(\omega, E)$; cependant, pour éviter l'emploi de notation trop lourde et comme il n'y a pas d'ambiguïté dans le choix de f dans la suite, on préfère la notation plus simple $d(\omega, E)$.

Revenons à l'exemple donné en introduction pour illustrer le comportement de certains opérateurs de fusion à sélection de modèles :

Exemple 6. *On considère l'ensemble $\mathcal{P}$ avec trois variables propositionnelles l(longue période), p(lage) et m(ontagne), prises dans cet ordre. Les buts des trois agents sont donnés par les bases K_1, K_2, K_3 telles que : $[K_1] = \{000, 001, 111\}$ (les souhaits de Marie), $[K_2] = \{001, 110\}$ (souhaits d'Alain) et $[K_3] = \{000, 110\}$ (souhaits de Pierre). Il n'y a pas de contrainte d'intégrité ($\mu \equiv \top$).*

On a $[\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{000, 001, 110\}$. Le tableau 1.1 donne les détails des calculs. La première colonne donne tous les mondes possibles. La colonne K_i ($i = 1 \ldots 3$) donne pour chaque monde ω la valeur de la « distance » entre ω et K_i, $d_H(\omega, K_i)$. Finalement, la colonne la plus à droite donne pour chaque monde ω la valeur de la « distance » entre ω et le profil $E = \{K_1, K_2, K_3\}$ avec la fonction d'agrégation somme, $d_H^{\Sigma}(\omega, \{K_1, K_2, K_3\})$. Les mondes ω pour lesquels $d_H^{\Sigma}(\omega, \{K_1, K_2, K_3\})$ est minimal (en gras) sont les modèles de la base fusionnée $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})$.

ω	K_1	K_2	K_3	$\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})$
000	0	1	0	**1**
001	0	0	1	**1**
010	1	1	1	3
011	1	1	2	4
100	1	1	1	3
101	1	1	2	4
110	1	0	0	**1**
111	0	1	1	2

TAB. 1.1 – Fusion avec $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}$.

D'autre part, on a $[\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{000, 001, 110\}$. Le tableau 1.2 donne les détails des calculs. On retrouve les mêmes colonnes que dans le tableau 1.1, mais ici la colonne la plus à droite donne pour chaque monde ω la valeur de la « distance » entre ω et le profil $E = \{K_1, K_2, K_3\}$ avec la fonction d'agrégation $GMax$, $d_H^{GMax}(\omega, \{K_1, K_2, K_3\})$. Les mondes ω pour lesquels $d_H^{GMax}(\omega, \{K_1, K_2, K_3\})$ est minimal (en gras) sont les modèles de la base fusionnée $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1, K_2, K_3\})$.

Enfin, on a $[\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{000, 001, 010, 100, 110, 111\}$. Le tableau 1.3 donne les détails des calculs. On retrouve les mêmes colonnes que dans le tableau 1.1, mais ici la colonne la plus à droite donne pour chaque monde ω la valeur de la « distance » entre ω et le profil $E = \{K_1, K_2, K_3\}$ avec la fonction d'agrégation Max, $d_H^{Max}(\omega, \{K_1, K_2, K_3\})$. Les mondes ω pour lesquels

ω	K_1	K_2	K_3	$\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1,K_2,K_3\})$
000	0	1	0	$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})$
001	0	0	1	$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})$
010	1	1	1	$(1,1,1)$
011	1	1	2	$(2,1,1)$
100	1	1	1	$(1,1,1)$
101	1	1	2	$(2,1,1)$
110	1	0	0	$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})$
111	0	1	1	$(1,1,0)$

TAB. 1.2 – Fusion avec $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$.

ω	K_1	K_2	K_3	$\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\{K_1,K_2,K_3\})$
000	0	1	0	$\mathbf{1}$
001	0	0	1	$\mathbf{1}$
010	1	1	1	$\mathbf{1}$
011	1	1	2	2
100	1	1	1	$\mathbf{1}$
101	1	1	2	2
110	1	0	0	$\mathbf{1}$
111	0	1	1	$\mathbf{1}$

TAB. 1.3 – Fusion avec $\Delta_{\mu}^{d_H,Max}$.

$d_H^{Max}(\omega,\{K_1,K_2,K_3\})$ *est minimal (en gras) sont les modèles de la base fusionnée* $\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K_1,K_2,K_3\})$.

On peut constater sur cet exemple que l'opérateur de fusion avec la fonction d'agrégation $GMax$ *est un raffinement de l'opérateur de fusion avec la fonction d'agrégation* Max.

En considérant la distance drastique, seules deux fonctions d'agrégation sont à considérer, puisque $d_D^{\Sigma}(\omega,\{K_1,K_2,K_3\}) \equiv d_D^{GMax}(\omega,\{K_1,K_2,K_3\})$. *Les résultats complets sont groupés dans un unique tableau 1.4.*

ω	K_1	K_2	K_3	$\Delta_{\top}^{d_D,Max}(\{K_1,K_2,K_3\})$	$\Delta_{\top}^{d_D,GMax}(\{K_1,K_2,K_3\})$
000	0	1	0	$\mathbf{1}$	$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})$
001	0	0	1	$\mathbf{1}$	$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})$
010	1	1	1	$\mathbf{1}$	$(1,1,1)$
011	1	1	1	$\mathbf{1}$	$(1,1,1)$
100	1	1	1	$\mathbf{1}$	$(1,1,1)$
101	1	1	1	$\mathbf{1}$	$(1,1,1)$
110	1	0	0	$\mathbf{1}$	$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})$
111	0	1	1	$\mathbf{1}$	$(1,1,0)$

TAB. 1.4 – Fusion basée sur d_D.

On sait (voir le théorème de représentation -proposition 1-) que l'on peut associer à tout opérateur de fusion contrainte une fonction (un assignement syncrétique), qui associe à chaque profil un pré-ordre entre interprétations. Une question ouverte est de déterminer si les pré-ordres ainsi construits sont tous basés sur des distances entre interprétations.

Propriétés logiques et complexité

On peut extraire de [KLM04, KP02a] les propriétés logiques et la complexité algorithmique de la plupart des opérateurs à sélection de modèles. Nous rappelons ici la les résultats concernant les opérateurs à sélection de modèles. Pour les propriétés logiques, on a tout d'abord un résultat général :

Proposition 3. *[KLM04] Les opérateurs $\Delta_\mu^{d,f}$ satisfont les propriétés* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC7)** *et* **(IC8)**. *Ils ne satisfont pas en général les autres postulats.*

On obtient les résultats suivants en précisant la fonction d'agrégation utilisée :

Proposition 4. *[KP02a]*
- *Les opérateurs $\Delta_\mu^{d,Max}$ satisfont les propriétés* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)**, **(IC8)** *et* **(Arb)**. *Ils ne satisfont pas* **(IC1)**, **(IC6)**, **(Maj)** *et* **(Disj)** *en général.*
- *Les opérateurs $\Delta_\mu^{d,\Sigma}$ sont des opérateurs de fusion contrainte majoritaires. Ils ne satisfont pas* **(Disj)**.
- *Les opérateurs $\Delta_\mu^{d,GMax}$ sont des opérateurs de fusion contrainte d'arbitrage. Ils ne satisfont pas* **(Disj)**.

On peut également s'intéresser à la complexité algorithmique de ces opérateurs.

Proposition 5.
- *Si d et f sont calculables en temps polynomial,* FUSION$(\Delta_\mu^{d,f})$ *est dans Δ_2^p.*
- *Si d et f sont calculables en temps polynomial et sont polynomialement bornés,* FUSION$(\Delta_\mu^{d,f})$ *est dans Θ_2^p.*

En précisant les fonctions d'agrégation et les distances utilisées, on obtient des résultats plus précis de complétude :

Proposition 6.
- FUSION$(\Delta_\mu^{d_D,Max})$ *est $BH(2)$-complet.*
- FUSION$(\Delta_\mu^{d_H,Max})$ *est Θ_2^p-complet.*

Proposition 7.
- FUSION$(\Delta_\mu^{d_D,GMax})$ *est Θ_2^p-complet.*
- FUSION$(\Delta_\mu^{d_H,GMax})$ *est Δ_2^p-complet.*

Proposition 8. FUSION $(\Delta_\mu^{d_H,\Sigma})$ *est Θ_2^p-complet.*

Les résultats de ces propositions découlent directement du fait que les opérateurs $\Delta_\mu^{d,f}$, $\Delta_\mu^{d_D,Max}$, $\Delta_\mu^{d_H,Max}$, $\Delta_\mu^{d_D,GMax}$, $\Delta_\mu^{d_H,GMax}$ et $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ coïncident respectivement avec les opérateurs de fusion DA^2 $\triangle_\mu^{d,\oplus,f}$, $\triangle_\mu^{d_D,\oplus,Max}$, $\triangle_\mu^{d_H,\oplus,Max}$, $\triangle_\mu^{d_D,\oplus,lex}$, $\triangle_\mu^{d_H,\oplus,lex}$ et $\triangle_\mu^{d_H,\oplus,\Sigma}$ lorsque chaque base est un singleton (voir [KLM04]), et de la proposition 14 de [KLM04], voir la section suivante (paragraphe 1.1.4).

1.1.3 Opérateurs de fusion à sélection de formules

Une autre famille importante d'opérateurs de fusion est composée des opérateurs appelé usuellement « opérateurs de fusion à sélection de formules » ou « opérateurs de fusion syntaxiques ». Pour ces opérateurs, la forme syntaxique des bases en jeu peut influencer le résultat du processus de fusion : remplacer une base $K = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ par une base (logiquement équivalente) $\widehat{K} = \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ peut conduire à changer la base fusionnée correspondante (alors que ce n'est pas le cas des opérateurs à sélection de modèles).

Premiers opérateurs

Les premiers opérateurs que nous présentons sont des opérateurs opérant sur les formules de façon assez simple. Le premier de ces opérateurs de fusion est appelé opérateur de fusion par intersection totale. Pour cet opérateur, le résultat de la fusion est simplement équivalent à la conjonction des bases du profil et de la contrainte si cohérent et à la contrainte sinon :

Définition 8. [Kon99] Soient $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un profil, μ une contrainte. L'opérateur de *fusion par intersection totale*, noté Δ^{fm}, est défini par :

$$\Delta^{fm}_{\mu}(E) \equiv \begin{cases} \bigwedge E \wedge \mu & \text{si cohérent,} \\ \mu & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cet opérateur correspond avec l'opérateur de révision *full meet base revision* [Neb98]. Le second opérateur, appelé opérateur de fusion basique, fournit comme résultat la conjonction des bases du profil et de la contrainte si cohérent, sinon, la conjonction de la disjonction des bases et de la contrainte si cohérent, sinon, la contrainte :

Définition 9. [Kon99] Soient $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un profil, μ une contrainte. L'opérateur de *fusion basique, noté Δ^b, est défini par :*

$$\Delta^{b}_{\mu}(E) \equiv \begin{cases} \bigwedge K_i \wedge \mu & \textit{si cohérent, sinon,} \\ \bigvee K_i \wedge \mu & \textit{si cohérent,} \\ \mu & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Opérateurs de combinaison

Baral, Kraus, Minker et Subrahmanian dans [BKM91, BKMS92] ont proposé d'autres opérateurs à sélection de formules, appelés *opérateurs de combinaison*. Ces opérateurs sont basés sur la sélection de sous-ensembles cohérents de formules dans l'union des bases du profil E. Différents opérateurs sont obtenus en faisant varier les critères de sélection. Le résultat du processus de fusion est l'ensemble des conséquences qui peuvent être inférées de tous les sous-ensembles sélectionnés.

Définition 10 (sous-ensemble maximal cohérent)**.** Soient K une base et μ une contrainte d'intégrité. $\textsc{maxcons}(K, \mu)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles maximaux (par rapport à l'inclusion) cohérents (notés MAXCONS) de $K \cup \{\mu\}$ qui contiennent μ, i.e. $\textsc{maxcons}(K, \mu)$ est l'ensemble de tous les ensembles M cohérents qui satisfont :
- $M \subseteq K \cup \{\mu\}$, et
- $\mu \in M$, et
- si $M \subset M' \subseteq K \cup \{\mu\}$, alors M' n'est pas cohérent.

Exemple 7. *Considérons l'ensemble (incohérent) de formules $K = \{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, a \wedge \neg c\}$ et la contrainte $\mu = \top$. Il y a deux éléments dans l'ensemble $\textsc{maxcons}(K, \top)$ (autrement dit deux ensembles maximaux cohérents) : $\{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, \top\}$ et $\{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, a \wedge \neg c, \top\}$.*

Si à présent, on considère la contrainte $\mu = c$, le résultat est modifié. $\textsc{maxcons}(K, c)$ contient : $\{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, c\}$ et $\{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, c\}$.

Lorsque la maximisation doit être considérée par rapport à la cardinalité (au lieu de l'inclusion), on utilise la notation $\textsc{maxcons}_{card}(K, \mu)$, c'est-à-dire :

Définition 11. Soient K une base et μ une contrainte d'intégrité. $\textsc{maxcons}_{card}(K, \mu)$ est l'ensemble de tous les ensembles M cohérents qui satisfont :

– $M \subseteq K \cup \{\mu\}$, et
– $\mu \in M$, et
– si $\#(M') > \#(M)$ et $M' \subseteq K \cup \{\mu\}$, alors M' n'est pas cohérent.

Exemple 8. *Considérons le même ensemble de formules $K = \{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, a \wedge \neg c\}$ que précédemment et la contrainte $\mu = \top$. Il y a un seul élément dans l'ensemble* $\text{MAXCONS}_{card}(K, \top)$ *:* $\{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, a \wedge \neg c, \top\}$.

Si à présent, on considère la contrainte $\mu = c$, le résultat est modifié. $\text{MAXCONS}(K, c)$ *contient :* $\{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, c\}$ *et* $\{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, c\}$.

Pour tout profil E et contrainte d'intégrité μ, on pose

$$\text{MAXCONS}(E, \mu) = \text{MAXCONS}(\bigcup_{K_i \in E} K_i, \mu)$$

L'union classique entre ensembles (et non l'union multi-ensembliste) est utilisée ici.

Exemple 9. *Considérons les bases $K_1 = \{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c\}$, $K_2 = \{a \wedge \neg b, a \wedge \neg c\}$ et la contrainte $\mu = \top$. Alors pour $E = \{K_1, K_2\}$, il y a deux éléments dans l'ensemble* $\text{MAXCONS}(E, \top)$ *:* $\{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, \top\}$ *et* $\{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, a \wedge \neg c, \top\}$.

Si à présent, on considère la contrainte $\mu = c$, on obtient deux autres maximaux cohérents : $\{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, c\}$ *et* $\{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, c\}$.

Concernant les maximaux cohérents pour la cardinalité, on a $\text{MAXCONS}_{card}(E, \top) = \{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, a \wedge \neg c, \top\}$ *; et* $\text{MAXCONS}_{card}(E, c) = \{\{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, c\}, \{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, c\}\}$.

Les *opérateurs à sélection de formules* suivants ont été définis dans [BKM91, BKMS92] et reformulés dans [Kon00] :

Définition 12 (opérateurs de combinaison)**.** Soient E un profil et μ une contrainte d'intégrité :
– $\triangle_\mu^{C1}(E) \equiv \bigvee\{M \in \text{MAXCONS}(E, \mu)\}$.
– $\triangle_\mu^{C3}(E) \equiv \bigvee\{M \mid M \in \text{MAXCONS}(E, \top)$ et $M \cup \{\mu\}$ cohérent$\}$.
– $\triangle_\mu^{C4}(E) \equiv \bigvee\{M \in \text{MAXCONS}_{card}(E, \mu)\}$.
– $\triangle_\mu^{C5}(E) \equiv \bigvee\{M \cup \{\mu\} \mid M \in \text{MAXCONS}(E, \top)$ et $M \cup \{\mu\}$ cohérent$\}$ si $\{M \cup \{\mu\} \mid M \in \text{MAXCONS}(E, \top)$ et $M \cup \{\mu\}$ cohérent$\}$ est non vide et $\triangle_\mu^{C5}(E) \equiv \mu$ sinon.

L'opérateur $\triangle_\mu^{C1}$ considère l'ensemble des ensembles maximaux cohérents contenant la contrainte. $\triangle_\mu^{C3}$ considère l'ensemble des ensembles maximaux cohérents et conserve ceux qui sont cohérents avec la contrainte. $\triangle_\mu^{C4}$ considère l'ensemble des ensembles maximaux cohérents pour la cardinalité qui contiennent la contrainte. $\triangle_\mu^{C5}$ est une variante de $\triangle_\mu^{C3}$, mais vérifie plus de propriétés logiques (voir la proposition 9). En particulier, $\triangle_\mu^{C3}$ peut générer des bases fusionnés incohérentes, ce qui n'est pas le cas des autres opérateurs listés ici. On ne trouve pas dans cette liste d'opérateur $\triangle_\mu^{C2}$ puisque l'opérateur $\triangle_\mu^{C2}$ initialement proposé par Baral, Kraus et Minker est identique à $\triangle_\mu^{C1}$.

Revenons à l'exemple donné dans l'introduction :

Exemple 10. *Les buts de Marie, Alain et Pierre peuvent être encodés par les bases suivantes (respectivement) :* $\{(\neg l \wedge \neg p) \vee (l \wedge p \wedge m)\}$, $\{(\neg l \wedge \neg p \wedge m) \vee (l \wedge p \wedge \neg m)\}$ *et* $\{(\neg l \wedge \neg p \wedge \neg m) \vee (l \wedge p \wedge \neg m)\}$. *Comme il n'y a pas de contrainte d'intégrité ($\mu \equiv \top$), les sous-ensembles maximaux (par rapport à l'inclusion ensembliste) cohérents de l'union de ces bases sont :* $\{(\neg l \wedge \neg p) \vee (l \wedge p \wedge m), (\neg l \wedge \neg p \wedge m) \vee (l \wedge p \wedge \neg m), \top\}$, $\{(\neg l \wedge \neg p) \vee (l \wedge p \wedge m), (\neg l \wedge \neg p \wedge \neg m) \vee (l \wedge p \wedge \neg m), \top\}$ *et* $\{(\neg l \wedge \neg p \wedge m) \vee (l \wedge p \wedge \neg m), (\neg l \wedge \neg p \wedge \neg m) \vee (l \wedge p \wedge \neg m), \top\}$.
Alors, pour cet exemple, on obtient $\triangle_\mu^{C1}(E) \equiv \triangle_\mu^{C3}(E) \equiv \triangle_\mu^{C4}(E) \equiv \triangle_\mu^{C5}(E) \equiv (\neg l \wedge \neg p) \vee (l \wedge p \wedge$

$\neg m$).
Ainsi, les buts du groupe sont : pour une courte période, aller à la montagne seulement ou ne pas partir ; pour une longue période, aller à la plage seulement.

Cet exemple n'est pas très illustratif, puisqu'il n'y a pas de contrainte d'intégrité, et qu'en ce cas, les opérateurs de combinaison $\triangle^{C1}, \triangle^{C3}$ et $\triangle^{C5}$ se comportent de la même manière (plus précisément ils sont égaux). L'exemple ci-dessous est plus révélateur des différences entre ces opérateurs :

Exemple 11. *Considérons à nouveau les bases $K_1 = \{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c\}$, $K_2 = \{a \wedge \neg b, a \wedge \neg c\}$ et la contrainte $\mu = \top$. On a vu que pour $E = \{K_1, K_2\}$, il y a deux éléments dans l'ensemble* $\textsc{maxcons}(E, \top)$ *: $\{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, \top\}$ et $\{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, a \wedge \neg c, \top\}$. Avec la contrainte $\mu = c$, on obtient les maximaux cohérents suivants : $\{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, c\}$ et $\{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, c\}$. On a enfin* $\textsc{maxcons}_{card}(E, c) = \{\{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, c\}, \{a \vee b \vee c, a \wedge \neg b, c\}\}$

On obtient donc :
- $\triangle_\mu^{C1}(E) \equiv (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \equiv a \wedge c$
- $\triangle_\mu^{C3}(E) \equiv a \wedge b \wedge c$
- $\triangle_\mu^{C4}(E) \equiv (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \equiv a \wedge c$
- $\triangle_\mu^{C5}(E) \equiv a \wedge b \wedge c$

D'autres opérateurs à sélection de formules intéressants peuvent être définis, par exemple en remplaçant chaque base K par $\widehat{K}$, la base singleton contenant la conjonction de ses éléments, avant d'en réaliser l'union. Comme la virgule - qui est un connecteur spécifique [KLM05], même s'il n'est pas véri fonctionnel - n'est habituellement pas équivalente à la conjonction standard, de tels opérateurs dans le cadre de la sélection de formules conduisent à des bases fusionnées différentes. Par exemple, avec $\mu \equiv \top, K_1 = \{a \wedge b\}, K_2 = \{\neg(a \wedge b)\}$ et $K_1' = \{a, b\}$, le fait que $K_1' \equiv K_1$ n'implique pas que $\triangle_\mu^{C1}(\{K_1, K_2\}) \equiv \triangle_\mu^{C1}(\{K_1', K_2\})$, puisque $\triangle_\mu^{C1}(\{K_1, K_2\}) \equiv \top$ et $\triangle_\mu^{C1}(\{K_1', K_2\}) \equiv a \vee b$.

Évidemment, les opérateurs résultants, notés $\triangle_\mu^{\widehat{C}}$, ne sont plus sensibles à la forme syntaxique des bases (remplacer chaque base par une base logiquement équivalente ne change pas le résultat de la fusion). Formellement, on a :

Définition 13 (autres opérateurs de combinaison)**.** Soient $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un profil et μ une contrainte d'intégrité, et $\triangle^C$ un opérateur de combinaison. On définit :

$$\triangle_\mu^{\widehat{C}}(E) = \triangle_\mu^C(\{\widehat{K_1}, \ldots, \widehat{K_n}\}).$$

Exemple 12. *Considérons à nouveau les bases de connaissances $K_1 = \{a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c\}$, $K_2 = \{a \wedge \neg b, a \wedge \neg c\}$ et la contrainte $\mu = \top$. On a $\widehat{K_1} \equiv \{a \wedge b \wedge c\}$ et $\widehat{K_2} \equiv \{a \wedge \neg b \wedge \neg c\}$. On a deux éléments dans l'ensemble* $\textsc{maxcons}(E, \top)$ *: $\{a \wedge b \wedge c, \top\}$ et $\{a \wedge \neg b \wedge \neg c, \top\}$. Avec la contrainte $\mu = c$, on obtient un seul maximal cohérent :* $\textsc{maxcons}(E, c) = \{\{a \wedge b \wedge c, c\}\}$*. Enfin, on a* $\textsc{maxcons}_{card}(E, c) = \{\{a \wedge b \wedge c, c\}\}$.

On obtient donc :

$$\triangle_\mu^{\widehat{C1}}(E) \equiv \triangle_\mu^{\widehat{C3}}(E) \equiv \triangle_\mu^{\widehat{C4}}(E) \equiv \triangle_\mu^{\widehat{C5}}(E) \equiv a \wedge b \wedge c.$$

Autres opérateurs à sélection de formules

D'autres opérateurs syntaxiques ont été définis dans [Kon00]. L'objectif de ces opérateurs est de pallier un défaut des opérateurs de combinaison, qui est de ne pas prendre en compte les sources d'information lors de la fusion. En effet, les opérateurs de combinaison mettent en commun les informations issues de chaque source et sélectionnent ensuite des ensembles maximaux cohérents, sans se « souvenir » de l'origine de chaque information. Il n'est donc pas possible pour ces opérateurs de prendre en considération la fréquence d'apparition d'une formule : qu'elle apparaisse dans une base ou dans n ne change pas la façon dont elle est traitée. En conséquence, il n'est pas possible de sélectionner seulement les ensembles maximaux cohérents qui satisfont par exemple la majorité des bases. De la même manière, il n'est pas non plus possible de définir un arbitrage, c'est-à-dire de sélectionner des maximaux cohérents afin de satisfaire au mieux chacune des sources.

L'idée qui sous-tend les opérateurs définis par Konieczny est d'utiliser une fonction de sélection permettant de choisir parmi les ensembles maximaux cohérents ceux qui sont les plus proches des bases. Les différences entre les opérateurs viennent de définition de la « distance » entre les ensembles maximaux cohérents et les bases, et ensuite de la méthode d'agrégation choisie pour déterminer la « distance » entre les ensembles maximaux cohérents et un profil. Les opérateurs proposés sont définis à partir de l'opérateur Δ^{C1}, mais on peut facilement étendre ces définitions à tous les autres opérateurs de combinaison.

– **Opérateur majoritaire drastique**

La « distance » entre bases que l'on considère ici est drastique. Cette distance vaut 0 si la conjonction des deux bases est cohérente et 1 sinon.

Définition 14. Soient un profil $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ et un ensemble maximal cohérent M de $\bigcup_{i=1..n} K_i$.
La distance drastique entre M et une base K_i pour $1 \leq i \leq n$ est :

$$dist_{\mathrm{D}}(M, K_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \wedge K_i \text{ cohérent} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La « distance » entre M et E est alors :

$$dist_{\mathrm{D}}(M, E) = \Sigma_{K_i \in E} dist_{\mathrm{D}}(M, K_i).$$

L'*opérateur majoritaire drastique*, noté Δ^{D}, est défini par :

$$\Delta^{\mathrm{D}}_{\mu}(E) \equiv \{M \in \triangle^{C1}_{\mu}(E) \mid dist_{\mathrm{D}}(M, E) = \min_{M_i \in \triangle^{C1}_{\mu}(E)} (dist_{\mathrm{D}}(M_i, E))\}.$$

Donc cette fonction de sélection choisit parmi les maximaux cohérents ceux qui sont cohérents avec le maximum de bases du profil.

– **Opérateur différence symétrique**

L'opérateur suivant est défini à partir d'une « distance » qui représente la cardinalité de la différence symétrique entre les bases. Il permet de sélectionner les ensembles maximaux cohérents de façon moins manichéenne que l'opérateur précédent.

Définition 15. Soient un profil $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ et un ensemble maximal cohérent M de $\bigcup_{i=1..n} K_i$.

La « distance » différence symétrique entre M et une base K_i pour $1 \leq i \leq n$ est :

$$dist_{\mathrm{S}}(M, K_i) = \#(K_i \setminus M) + \#(M \setminus K_i).$$

La « distance » entre M et E est alors :

$$dist_{\mathrm{S}}(M,E) = \Sigma_{K_i \in E} dist_{\mathrm{S}}(M,K_i).$$

L'*opérateur différence symétrique*, noté $\Delta^{S,\Sigma}$, est défini comme :

$$\Delta_\mu^{S,\Sigma}(E) \equiv \{M \in \triangle_\mu^{C1}(E) \mid dist_{\mathrm{S}}(M,E) = \min_{M_i \in \triangle_\mu^{C1}(E)} (dist_{\mathrm{S}}(M_i,E))\}.$$

– **Opérateur intersection**
Cet opérateur est défini à partir d'une « distance » qui représente la cardinalité de l'intersection entre les bases.

Définition 16. Soient un profil $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ et un ensemble maximal cohérent M de $\bigcup_{i=1..n} K_i$.

La « distance » entre M et une base K_i pour $1 \leq i \leq n$ est :

$$dist_{\cap}(M,K_i) = \#(K_i \cap M).$$

La « distance » entre M et E est alors :

$$dist_{\cap}(M,E) = \Sigma_{K_i \in E} dist_{\cap}(M,K_i).$$

L'*opérateur intersection*, noté $\Delta^{\cap,\Sigma}$, est défini par :

$$\Delta_\mu^{\cap,\Sigma}(E) \equiv \{M \in \triangle_\mu^{C}(E) \mid dist_{\cap}(M,E) = \max_{M_i \in \triangle_\mu^{C1}(E)} (dist_{\cap}(M_i,E))\}.$$

Propriétés logiques et complexité

On peut trouver dans [BKMS92, Kon00, Neb98] une présentation des propriétés logiques et la complexité algorithmique de la plupart des opérateurs à sélection de formules. D'autres résultats peuvent être également déduits de [KLM04]. Nous rappelons ici les résultats concernants la plupart des opérateurs à sélection de formules.

Pour les propriétés logiques, on a les résultats suivants :

Proposition 9.
– *L'opérateur de fusion par intersection totale* Δ_μ^{fm} *satisfait les postulats* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)**, **(IC8)** *et* **(Disj)**. *Il ne satisfait pas* **(IC6)** *et* **(Maj)**.
– *L'opérateur de fusion basique* Δ_μ^{b} *satisfait les postulats* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)**, **(IC8)** *et* **(Disj)**. *Il ne satisfait pas* **(IC6)** *et* **(Maj)**.
– *L'opérateur* $\triangle^{C1}$ *satisfait les postulats* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)** *et* **(Disj)**. *Il ne satisfait pas* **(IC6)**, **(IC8)** *et* **(Maj)**.
– *L'opérateur* $\triangle^{C3}$ *satisfait les postulats* **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)**, **(IC8)** *et* **(Disj)**. *Il ne satisfait pas* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC6)**, *et* **(Maj)**.
– *L'opérateur* $\triangle^{C4}$ *satisfait les postulats* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC7)**, **(IC8)** *et* **(Disj)**. *Il ne satisfait pas* **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC6)**, *et* **(Maj)**.
– *L'opérateur* $\triangle^{C5}$ *satisfait les postulats* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)**, **(IC8)** *et* **(Disj)**. *Il ne satisfait pas* **(IC6)** *et* **(Maj)**.
– *L'opérateur majoritaire drastique* Δ_μ^{D} *vérifie* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)**, **(Maj)** *et* **(Disj)**. *Il ne vérifie pas* **(IC6)** *et* **(IC8)**.

- *L'opérateur différence symétrique* $\Delta_\mu^{S,\Sigma}$ *satisfait* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC4)**, **(IC7)**, **(IC8)**, **(Maj)** *et* **(Disj)**. *Il ne satisfait pas* **(IC5)** *et* **(IC6)**.
- *L'opérateur intersection* $\Delta_\mu^{\cap,\Sigma}$ *vérifie* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC5)**, **(IC6)**, **(IC7)**, **(IC8)**, **(Maj)** *et* **(Disj)**. *Il ne vérifie pas* **(IC4)**.

On peut à présent s'intéresser à la complexité algorithmique de ces opérateurs.

Dans [Neb98], Nebel étudie la complexité des opérateurs de révision syntaxiques, en particulier, celle des opérateurs de révision par intersection partielle. Ces opérateurs sont basés sur la sélection de sous-ensembles maximaux pour l'inclusion (ou pour la cardinalité) cohérents avec la formule par laquelle on révise. Il y a donc une correspondance entre les opérateurs de combinaison (la contrainte jouant le rôle de la formule par laquelle on révise) et les opérateurs de révision par intersection partielle. On peut en déduire la complexité des opérateurs de combinaison :

Proposition 10. *[Neb98]*
- FUSION$(\triangle^{C1})$ *est* Π_2^p*-complet.*
- FUSION$(\triangle^{C3})$ *est* Π_2^p*-complet.*
- FUSION$(\triangle^{C4})$ *est* Θ_2^p*-complet.*
- FUSION$(\triangle^{C5})$ *est* Π_2^p*-complet.*

D'autre part, comme l'opérateur de fusion par intersection totale (Δ^{fm}) correspond à l'opérateur *full meet base revision*, on a :

Proposition 11. *[Neb98]*
FUSION(Δ_μ^{fm}) *est* coBH(3)*-complet.*

D'autres résultats dérivent des résultats pour les opérateurs de fusion DA^2 :

Proposition 12.
- FUSION$(\Delta_\mu^{\mathrm{D}})$ *est* Θ_2^p*-complet.*
- FUSION$(\Delta_\mu^{\cap,\Sigma})$ *est* Θ_2^p*-complet.*

Les résultats découlent directement du fait que l'opérateur de fusion DA^2 $\Delta^{d_D,Max,\Sigma}$ est l'opérateur drastique majoritaire Δ_μ^{D} et $\Delta^{d_D,\Sigma,\Sigma}$ est l'opérateur intersection $\Delta_\mu^{\cap,\Sigma}$ et de la proposition 14 de [KLM04].

1.1.4 Opérateurs de fusion DA^2

Konieczny, Lang et Marquis ont proposé dans [KLM02, KLM04] un nouveau modèle pour la fusion propositionnelle, pour pallier les imperfections des définitions préalables. Un problème de la fusion propositionnelle à sélection de modèles est qu'elle ne tient pas compte des bases non cohérentes. Ce problème peut être évité dans le cadre de la fusion propositionnelle à sélection de formules, si l'on utilise un connecteur additionnel, la virgule, qui n'est pas véri fonctionnel. Cependant, un autre problème apparaît alors. Comme la fusion à sélection de formules est basée sur la sélection d'ensembles maximaux cohérents de l'union $\bigcup K_i$ des bases du profil, on n'a aucun moyen de prendre en considération la distribution d'une information dans les bases (qu'une formule ϕ apparaisse dans une base ou dans n, cela ne change pas la prise en compte de ϕ, ce qui n'est pas intuitif).

Koniecnzy et al. définissent une nouvelle famille d'opérateurs de fusion propositionnelle, paramétrés par une pseudo-distance d entre interprétations et deux fonctions d'agrégation $\oplus$ et $\odot$. La première étape d'agrégation est utilisée à l'intérieur de chaque base K_i, elle permet de calculer la « distance » de chaque interprétation ω à K_i comme l'agrégation des « distances » de ω à chaque formule de K_i. La seconde étape d'agrégation permet de calculer la « distance » de chaque interprétation ω à E, en agrégeant les « distances » de ω à chaque base. Cette approche permet de prendre en compte l'aspect syntaxique des bases impliquées dans le processus de fusion, en particulier, elle permet de ne pas « oublier » les bases incohérentes. De plus, Konieczny, Lang et Marquis montrent que cette définition recouvre de nombreux opérateurs existants, à la fois à sélection de modèles et de formules, mais permet également de définir des opérateurs de fusion propositionnelle originaux.

Définition 17 (opérateurs de fusion DA^2)**.** [KLM04] Soient d une distance entre interprétations, et $\oplus$ et $\odot$ deux fonctions d'agrégation. On définit l'*opérateur de fusion* DA^2 $\Delta^{d,\oplus,\odot}$ de la façon suivante : pour tout profil $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ et toute contrainte d'intégrité μ :

$$[\Delta_\mu^{d,\oplus,\odot}(E)] = min([\mu], \leq_\mu^{d,\oplus,\odot})$$

où $\leq_\mu^{d,\oplus,\odot}$ est défini par $\omega \leq_\mu^{d,\oplus,\odot} \omega'$ si et seulement si $d(\omega, E) \leq d(\omega', E)$, avec :

$$d(\omega, E) = \odot(d(\omega, K_1), \ldots, d(\omega, K_n))$$

et pour tout $K_i = \{\phi_{i,1}, \ldots, \phi_{i,n_i}\}$:

$$d(\omega, K_i) = \oplus(d(\omega, \phi_{i,1}), \ldots, d(\omega, \phi_{i,n_i})).$$

Konieczny et al. argumentent dans leur travaux l'intérêt de considérer a priori deux fonctions d'agrégation distinctes. Le point essentiel est que la nature des agrégations est différente : la première étape est une agrégation interne à chaque source, ce qui n'est pas le cas de le deuxième phase d'agrégation. L'exemple suivant illustre la capacité des opérateurs de fusion DA^2 à prendre en compte de façon non triviale des bases de croyances incohérentes :

Exemple 13. *[KLM04] On considère le profil suivant $E = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ sous la contrainte d'intégrité $\mu = \top$, avec :*

- $K_1 = \{a, b, c, a \models \neg b\}$
- $K_2 = \{a, b\}$
- $K_3 = \{\neg a, \neg b\}$
- $K_4 = \{a, a \models b\}$

Dans cet exemple, K_1 pense que c est vrai, et cette partie d'information n'est impliquée dans aucune contradiction, donc on peut penser qu'il faut faire confiance à K_1 par rapport à la vérité de c. Les opérateurs à sélection de modèles ne prennent pas en compte cette situation : les bases de croyances incohérentes ne sont pas considérées. Par exemple, en utilisant la distance de Hamming d_H, l'opérateur $\Delta^{d_H,\Sigma}$ donne une base fusionnée dont les modèles sont $a \wedge b \wedge \neg c$ et $a \wedge b \wedge c$ et l'opérateur $\Delta^{d_H,GMax}$ donne une base fusionnée dont les modèles sont $\neg a \wedge b \wedge \neg c$, $\neg a \wedge b \wedge c$, $a \wedge \neg b \wedge \neg c$, et $a \wedge \neg b \wedge \neg c$. Dans ces deux cas, rien n'est dit sur la vérité de c, ce qui n'est pas intuitif puisqu'aucun argument ne peut aller à l'encontre de cette information dans les données d'entrée.

Les opérateurs à sélection de formules prennent en compte la base incohérente, mais pas la distribution de l'information. Par exemple, les opérateurs Δ^{C1} et Δ^{C4} donnent respectivement comme base fusionnée c et $c \wedge \neg a$. a ne fait donc pas partie de ces bases fusionnées, alors que a fait partie de trois des quatre bases fournies au départ.

Les opérateurs de fusion DA^2 proposent un compromis entre les opérateurs de fusion à sélection de modèles et ceux à sélection de formules, en tenant compte de la distribution de l'information et de l'information issue des bases incohérentes. Par exemple, l'opérateur $\Delta^{d_D,\Sigma,\Sigma}$ donne une base fusionnée dont l'unique modèle est $a \wedge b \wedge c$, et $\Delta^{d_D,\Sigma,GMax}$ donne une base fusionnée dont les modèles sont $\neg a \wedge b \wedge c$ et $a \wedge \neg b \wedge c$. Ainsi, on peut en déduire que c est vrai pour le groupe.

Différents choix possibles sont possibles pour la distance entre interprétations et les fonctions d'agrégation, donnant lieu à chaque instanciation à un nouvel opérateur de fusion propositionnelle. Konieczny et al. proposent la distance drastique d_D et la distance de Hamming d_H, mais aussi une autre distance, la distance de Hamming pondérée d_{H_q}, qui est défini par :

Définition 18 (distance de Hamming pondérée)**.** [KLM04] Soient q une fonction de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{N}^*$, ω_1 et ω_2 deux interprétations. On définit la distance de Hamming pondérée par :

$$d_{H_q}(\omega_1, \omega_2) = \Sigma_{\{x \in \mathcal{P} | \omega_1(x) \neq \omega_2(x)\}} q(x)$$

Cette distance permet de prendre en compte la différence d'importance éventuelle entre les symboles de la logique propositionnelle.

Konieczny, Lang et Marquis considèrent également deux fonctions d'agrégation :

Définition 19 (somme pondérée)**.** [KLM04] Soit une fonction q de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $q(1) = 1$ si $n = 1$. On définit la *somme pondérée* notée WS_q par :

$$WS_q(e_1, \ldots, e_n) = \Sigma q(i) e_i.$$

Définition 20 (somme ordonnée pondérée)**.** [KLM04] Soit une fonction q de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $q(1) = 1$ si $n = 1$ et $q(1) \neq 0$ dans tous les cas. On définit la *somme ordonnée pondérée* notée OWS_q par :

$$OWS_q(e_1, \ldots, e_n) = \Sigma q(i) e_{\sigma(i)},$$

où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $e_{\sigma(1)} \geq e_{\sigma(2)} \geq \ldots \geq e_{\sigma(n)}$.

La fonction de pondération q permet d'associer à chaque formule d'une base ou à chaque base du profil un poids correspondant à la confiance que l'on accorde à cette formule ou base. Ces définitions permettent de généraliser les fonctions d'agrégation usuelles, puisque lorsque $q(i) = 1$ pour tout i, on retrouve pour WS_q et OWS_q la fonction Σ usuelle ; lorsque $q(1) = 1$ et $q(i) = 0$ pour tout $i \neq 1$, on retrouve pour OWS_q la fonction Max ; enfin pour $q(i) = M^{n-i}$ où M est un majorant strict des poids, on retrouve pour OWS_q la fonction $GMax$.

Comme le montre [KLM02], les opérateurs de fusion DA^2 sont effectivement une généralisation des opérateurs de fusion propositionnelle à sélection de modèles et à sélection de formules. Plus précisément, $\Delta^{d_D, Max, Max}$ est l'opérateur de fusion par intersection totale, $\Delta^{d_D, Max, \Sigma}$ est l'opérateur drastique majoritaire et $\Delta^{d_D, \Sigma, \Sigma}$ est l'opérateur intersection. Lorsque toutes les bases sont des singletons (ou de façon équivalente lorsqu'on fait la conjonction des formules de chaque base avant la fusion), chaque opérateur $\Delta^{d, \oplus, Max}$ est un opérateur Max, chaque opérateur $\Delta^{d, \oplus, \Sigma}$ est un opérateur Σ et chaque opérateur $\Delta^{d, \oplus, GMax}$ est un opérateur $GMax$. De plus, en considérant toujours des bases singletons, l'opérateur $\Delta^{d_D, \oplus, WMAX_q}$, où $WMAX_q(x_1, \ldots, x_n) = max_{i=1 \ldots n} min(q(i), x_i)$, est un opérateur de fusion possibiliste (voir la section suivante).

Konieczny, Lang et Marquis ont également donné de nombreux résultats de complexité algorithmique et identifié les propriétés logiques des opérateurs DA^2. Le premier résultat est un résultat général :

Proposition 13. *[KLM04] Soit $\Delta_\mu^{d, \oplus, \odot}$ un opérateur de fusion DA^2. Etant donnés un profil E et deux formules μ et α, on a :*

- *Si $d, \oplus$ et $\odot$ sont calculables en temps polynomial, alors déterminer si $\Delta_\mu^{d, \oplus, \odot} \models \alpha$ est dans Δ_2^p.*
- *Si $d, \oplus$ et $\odot$ sont calculables en temps polynomial et sont polynomialement bornés, alors déterminer si $\Delta_\mu^{d, \oplus, \odot} \models \alpha$ est dans Θ_2^p.*

Instancier les fonctions d'agrégation et les distances permet d'obtenir des résultats plus précis de complétude :

Proposition 14. *[KLM04] Etant donnés un profil E et deux formules μ et α construites sur $\mathcal{P}$, la complexité du problème d'inférence de $\Delta_\mu^{d,\oplus,\odot} \models \alpha$ est donnée dans les tableaux 1.1.4, 1.1.4 et 1.1.4 (si X est une classe de complexité, X-c signifie X-complet).*

$\oplus/\odot$	Max	Σ	$GMax$	WS_q	OWS_q
Max	$BH(2)$-c	Θ_2^p-c	Θ_2^p-c	Δ_2^p-c	Θ_2^p-c
Σ	Θ_2^p-c	Θ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
WS_q	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
OWS_q	Θ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c

TAB. 1.5 – Résultats de complexité pour $d = d_D$

$\oplus/\odot$	Max	Σ	$GMax$	WS_q	OWS_q
Max	Θ_2^p-c	Θ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
Σ	Θ_2^p-c	Θ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
WS_q	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
OWS_q	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c

TAB. 1.6 – Résultats de complexité pour $d = d_H$

$\oplus/\odot$	Max	Σ	$GMax$	WS_q	OWS_q
Max	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
Σ	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
WS_q	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c
OWS_q	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c	Δ_2^p-c

TAB. 1.7 – Résultats de complexité pour $d = d_{H_q}$

Pour les propriétés logiques, on trouve dans [KLM04] les résultats suivants :

Proposition 15. $\Delta^{d,\oplus,\odot}$ *satisfait les postulats* **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC7)** *et* **(IC8)**. *Il ne satisfait pas en général les autres postulats. Les tableaux 1.1.4 et 1.1.4 donnent les résultats complets en instanciant les distances et les fonctions d'agrégation (le postulat* **(ICi)** *est noté i, et M (resp. A) représente* $\mathbf{Maj}$ *(resp.* $\mathbf{Arb}$*)).*

1.2 Fusion dans d'autre cadre pour l'incertain

Nous venons de voir des opérations de fusion dans lesquelles aucune distinction entre les bases n'est supposée : on considère que toute les bases ont la même importance. Pour les opérateurs de fusion propositionnelle à sélection de formules précédents, aucune distinction n'est faite entre les formules des bases, elles ont également toutes la même importance et aucune priorité n'est donnée entre les interprétations. Pour les opérateurs de fusion propositionnelle à sélection de modèles présentés, aucune distinction n'est faite entre les formules des bases, mais un pré-ordre est donnée entre les interprétations, en général dérivé

$\oplus/\odot$	Max	Σ	$GMax$	WS_q	OWS_q
Max	$3,4,5,A$	$3,4,5,6,M,A$	$3,4,5,6,M,A$	$5,6,M$	$3,4$
Σ	$5,A$	$5,6,M$	$5,6,A$	$5,6,M$	
$WS_q - OWS_q$	$5,A$	$5,6,M$	$5,6,A$	$5,6,M$	

TAB. 1.8 – Propriétés logiques pour $d = d_D$

$\oplus/\odot$	Max	Σ	$GMax$	WS_q	OWS_q
Max	$5,A$	$5,6,M$	$5,6,A$	$5,6,M$	
Σ	$5,A$	$5,6,M$	$5,6,A$	$5,6,M$	
$WS_q - OWS_q$	$5,A$	$5,6,M$	$5,6,A$	$5,6,M$	

TAB. 1.9 – Propriétés logiques pour $d = d_H$ ou $d = d_{H_q}$

d'une distance entre interprétations. L'absence de priorités explicites sur la logique propositionnelle ne permet pas d'exprimer finement des notions d'incertitude sur les données. Lorsqu'un agent fournit une base K, il exprime une bipartition sur les mondes : $\{[K], [\neg K]\}$, ordonnée de façon à ce que tout modèle de K soit strictement préféré à tout contre-modèle. Il n'est pas possible d'exprimer qu'un modèle de K est strictement préféré à un autre (ou plus plausible, ou plus désirable). Lorsqu'une information supplémentaire permettant d'évaluer la plausibilité de chaque monde pour chaque agent de façon moins fruste que dans le cadre propositionnel « pur » est présente, il est important de l'exploiter dans le processus de fusion. Il existe différents formalismes possibles pour représenter ces informations supplémentaires.

Une première approche pour le traitement de l'incertain repose sur l'utilisation des probabilités pour pondérer les données, afin de modéliser l'imprécision (par exemple liée à l'utilisation de capteurs) ou l'incertitude (cette notion concerne plus particulièrement la méconnaissance de l'état réel du monde). La distinction entre imprécision et incertitude est clairement définie par Dubois et Prade [DP88b] : « *L'imprécis concerne le contenu de l'information tandis que l'incertain est relatif à sa vérité, entendu au sens de sa conformité à une réalité.* »
La théorie des probabilités s'applique particulièrement bien aux problèmes de fusion liés à de l'observation, mais moins bien à des situations de connaissances incomplètes (les probabilités ne permettent pas de modéliser l'ignorance). Nous nous intéressons ensuite particulièrement aux fonctions de croyances issues de la Théorie de Dempster et Shafer (ou théorie de l'évidence), qui offre une méthode numérique de raisonnement, et qui permet de combiner les croyances issues de différentes sources.

Cette théorie peut être mise en relation avec la théorie des possibilités, qui est très utilisée pour modéliser des données incertaines pour lesquelles l'incertitude est de nature ordinale. La logique possibliste est une extension de la logique classique, dans laquelle les priorités entre mondes sont encodées par des distributions de nécessité : la logique possibiliste associe à chaque monde un réel, qui représente à quel point ce monde est nécessaire. Une autre voie possible passe l'association des fonctions ordinales conditionnelles (en abrégé OCF) aux sources, ce qui permet d'assigner une valeur à chaque interprétation de la logique considérée : plus la valeur associée est faible, plus l'interprétation est crédible. Cette approche est très proche de la logique possibiliste.

Le formalisme le plus général est la théorie de l'évidence, qui est une généralisation des deux principaux autres formalismes utilisés, les probabilités et la logique possibiliste (qui est elle-même une généralisation de la logique propositionnelle). Si l'on cherche à comparer ces approches entre elles, on peut voir qu'elles associent toutes des réels aux données des sources, mais nous verrons que l'interprétation de ces valeurs est très différente d'une théorie à l'autre. En particulier, si l'on cherche à classer ces approches, de la plus quantitative à la plus qualitative, on peut avoir : les probabilités, la théorie de l'évidence, les OCFs, la logique possibiliste et la logique propositionnelle.

1.2.1 Approches probabilistes

L'approche probabiliste est très utilisée parce qu'elle met à la disposition de l'utilisateur des outils mathématiques qui permettent de modéliser rigoureusement de nombreuses situations. La validité des solutions obtenues ne peut pas être mise en question du point de vue mathématique. En revanche, la validité du modèle probabiliste n'est pas évidente quand on ne dispose pas d'une approche statistique du problème à traiter.

Parmi les outils probabilistes, on peut citer l'utilisation des variables gaussiennes, permettant de représenter l'imprécision des mesures d'un capteur, par exemple. Mais surtout, l'utilisation des probabilités fait appel au Théorème de Bayes, qui permet de déterminer la cause la plus probable d'une observation.

Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes est la méthode de combinaison principale de la théorie des probabilités. Il permet d'évaluer la plausibilité de toute proposition en calculant la probabilité qu'elle soit vraie, conditionnée par toute l'information disponible. Cette règle est en pratique très utilisée, par exemple dans le traitement de l'image satellitaire (pour la classification des pixels), dans le diagnostic médical, et dans le domaine militaire (problèmes de localisation de cibles en particulier).

Le conditionnement bayésien peut être appliquée dans le cas discret et dans le cas continu. Nous ne donnons ici que la définition dans le cas discret, qui est plus simple à appréhender mathématiquement, et qui permet de comprendre le mécanisme d'application du théorème de Bayes.

Supposons que l'on dispose de n observations s_i pour estimer dans quelle mesure les hypothèses H_j de Ω sont vraies. Pour chaque source d'information, on dispose des probabilités conditionnelles $P(s_i|H_j)$ modélisant l'incertitude sur les mesures, c'est-à-dire la probabilité d'avoir s_i sachant que l'hypothèse H_j est vraie. On suppose aussi que l'on dispose *a priori* de la probabilité de chaque hypothèse $P(H_j)$. Alors, le *théorème de Bayes* s'exprime de la façon suivante :

$$P(H_j|s_i, i = 1, \dots, n) = \frac{P(H_j).\Pi_i P(s_i|H_j)}{\Sigma_{H_k}[P(H_k).\Pi_i P(s_i|H_k)]}$$

si les sources d'information sont indépendantes.

Les limites de l'utilisation des probabilités sont que cette modélisation ne permet pas de modéliser l'ignorance : comment affecter une probabilité à un événement dont je ne sais rien ? Une réponse est donnée par la théorie de l'évidence, qui est une généralisation de la théorie des probabilités permettant de prendre en compte l'ignorance lors de la modélisation.

Théorie de Dempster-Shafer

La théorie de Dempster-Shafer est une théorie mathématique de l'évidence ([Dem68, Sha76]) basée sur les fonctions de croyance. Cette théorie est relativement récente par rapport à la théorie des probabilités. Elle a été développée tout d'abord par Dempster [Dem68], puis reprise et approfondie par Shafer [Sha76]. Il y a un lien étroit entre la théorie des fonctions de croyance et la théorie des possibilités : à chaque fonction de croyances est associée une fonction de plausibilité, et une mesure de possibilité est une fonction de plausibilité particulière.

Exemple 14. *Considérons deux événements aléatoires (c'est-à-dire dont l'issue n'est pas connue). Le premier est le jeu du pile ou face : on parie sur pile en lançant une pièce non truquée. Le second est de* *parier sur l'issue d'un combat entre le meilleur boxeur du monde et le meilleur lutteur du monde. En supposant que l'on ait aucune connaissance sur les sports de combat, le deuxième pari peut sembler plus délicat à faire que le premier. La plupart des gens se sentiraient plus hésitants à propos du deuxième pari que du premier, dans lequel les probabilités sont connues ($\frac{1}{2}$ pour chaque issue). La théorie de Dempster-Shafer permet de prendre en compte la confiance dans les probabilités assignées aux différentes issues.*

Cette théorie est utilisée dans la fusion de données incertaines pour deux raisons principales :

– elle offre une représentation agréable et flexible de l'incertitude, qu'il s'agisse d'une ignorance totale ou de connaissance partielle ou totale.

– elle inclut une règle permettant de combiner les données incertaines, appelée la règle de combinaison de Demspter, qui est un outil simple pour l'agrégation de données.

Nous allons à présent donner quelques définitions formelles permettant de préciser ce cadre de travail.

Soit Ω un ensemble fini. On peut voir Ω comme l'ensemble des mondes possibles, et on sait (ou on croit) qu'exactement un élément de Ω est le monde réel. On peut définir sur 2^Ω une fonction, permettant de représenter notre degré de confiance que le monde réel est dans un sous-ensemble donné :

Définition 21 (mesure de Sugeno)**.** [Sha87] Une *mesure de Sugeno* sur 2^Ω est une fonction réelle notée bel qui satisfait :

1. $bel(\emptyset) = 0$
2. $bel(\Omega) = 1$
3. $bel(A) \leq bel(B)$ si $A \subseteq B \subseteq \Omega$

Si A est un sous-ensemble de Ω, la valeur $bel(A)$ peut être interprétée comme notre degré de croyance que A contient le monde réel. Les conditions 1 et 2 peuvent être considérées comme des conventions, elles indiquent que 0 signifie aucune croyance, alors que 1 signifie une croyance totale. La condition 3 indique que si $A \subseteq B$, alors le monde réel est dans A si et seulement si il est aussi dans B. Une question importante est le sens donné au fait qu'un ensemble A soit tel que $bel(A) > 0$. Pour Shafer [Sha87], on peut interpréter une telle situation par le fait que l'on a une raison positive de croire que le monde réel appartient à A. Shafer distingue cependant le manque de croyance et l'incrédulité : un degré de croyance 0 associé à A indique un manque de croyance dans A, résultant d'un manque d'évidence en faveur de A, mais pas nécessairement d'une incrédulité en A, qui résulterait d'une croyance en $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Définition 22 (mesure de probabilité)**.** Une *mesure de probabilité* est une mesure de Sugeno qui vérifie la condition supplémentaire suivante :

4. $bel(A \cup B) = bel(A) + bel(B)$ pour tous les sous-ensembles disjoints A et B de Ω.

Définition 23 (fonction de croyance)**.** [Sha87] Une *fonction de croyance* est une mesure de Sugeno qui vérifie la condition supplémentaire suivante :

5. $bel(B_1 \cup \ldots \cup B_n) \geq \Sigma_i bel(B_i) - \Sigma_{i,j} bel(B_i \cap B_j) + \Sigma_{i,j,k} bel(B_i \cap B_j \cap B_k) - \ldots - (-1)^n bel(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n)$ pour toute collection finie $B_1, \ldots, B_n$ de sous-ensembles de Ω.

Tout mesure de probabilité est donc une fonction de croyance.

Une fonction de croyance représente une croyance quantifiée à propos de l'état actuel du monde, c'est-à-dire la force de l'opinion d'un agent sur la valeur du monde réel.

Etant donné une fonction de croyance bel sur 2^Ω, on peut définir une autre fonction sur 2^Ω, qui mesure à quel point le fait qu'un sous-ensemble de Ω contient le monde réel est plausible.

Définition 24 (fonction de plausibilité)**.** [Sha87] Soit une fonction de croyance bel sur 2^Ω. On appelle *fonction de plausibilité* la fonction pl définie sur 2^Ω par :

$$pl(A) = 1 - bel(\overline{A}).$$

On a toujours $bel(A) \leq pl(A)$, et bel et pl sont égaux seulement si bel est une mesure de probabilité. La valeur $pl(A)$ représente à quel point A est plausible, compte tenu de la croyance que l'on a en $\overline{A}$. Si l'on juge qu'aucune évidence ne permet de supporter ou de réfuter A, on a $bel(A) = 0$ et $pl(A) = 1$.

Exemple 15. *Supposons par exemple qu'on ait une croyance de* $0,5$ *et une plausibilité de* $0,8$ *en une proposition « le chat dans la boîte est mort ». Cela signifie qu'on a une raison positive de croire que la proposition est vraie avec une confiance de* $0,5$*. Cependant, on a une raison positive de croire le contraire (« le chat est vivant ») avec une confiance de* $0,2$*. La masse restante de* $0,3$ *(la différence entre les* $0,5$ *qui supporte l'évidence d'un côté et les* $0,2$ *qui supporte le contraire d'un autre) est « indéterminée », signifiant que le chat pourrait être vivant ou mort. Cet intervalle représente le degré d'incertitude basé sur l'évidence du système.*

Hypothèse	Probabilité	Croyance	Plausibilité
Ni vivant ni mort	$0,3$	0	0
Vivant	$0,2$	$0,2$	$0,5$
Mort	$0,5$	$0,5$	$0,8$
Vivant ou mort	$0,7$	1	1

Une fonction de croyance peut également être définie à partir d'une autre fonction entre ensembles, appelée masse de croyance, définie par :

Définition 25 (masse de croyance)**.** [Sha87] Une *masse de croyance* est une application définie sur 2^Ω à valeurs dans $[0,1]$, notée m et telle que :

$$m(\emptyset) = 0 \text{ et } \Sigma_{A \in 2^\Omega} m(A) = 1.$$

La masse $m(A)$ d'un élément A de 2^Ω représente la proportion d'évidence qui supporte l'idée que le monde réel appartient à A, mais pas à un sous-ensemble particulier de A. La valeur de $m(A)$ concerne seulement l'ensemble A et ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur les sous-ensembles, qui ont eux-aussi, par définition, leur propre masse.

A partir d'une masse de croyances m, on peut définir une fonction de croyance bel et une fonction de plausibilité pl de la façon suivante :

$$bel(A) = \Sigma_{B \subseteq A} m(B) \text{ et } pl(A) = \Sigma_{A \cap B \neq \emptyset} m(B).$$

Il y a une correspondance exacte entre une masse de croyances et une fonction de croyances, grâce à la formule de Möbius :

$$m(A) = \Sigma_{X \subseteq A} (-1)^{\#(A) - \#(X)} bel(X).$$

Exemple 16. *Dans l'exemple précédent, on aurait :*

- *L'événement* A *:« le chat est vivant » a pour masse* $m(A) = 0,2$ *car cet ensemble ne contient aucun sous-ensemble strict, donc* $bel(A) = m(A)$*.*
- *L'événement* B *: « le chat est mort » a pour masse* $m(B) = 0,5$ *car cet ensemble ne contient aucun sous-ensemble strict, donc* $bel(B) = m(B)$*.*
- *Si* C *est l'événement « le chat est vivant ou mort », on a* $m(C) = 0,3$ *car cet ensemble contient* A *et* B*, donc* $bel(C) = m(A) + m(B) + m(C)$*.*
- *On retrouve* $pl(A) = m(A) + m(C)$ *car seuls* A *et* C *ont une intersection non vide avec* A *et* $pl(B) = m(B) + m(C)$*.*

Dempster introduit également une règle permettant de combiner deux fonctions de croyances, appelée *règle de combinaison de Dempster*. Cette règle est une opération associative et commutative qui associe à un couple de fonctions de croyance définies sur le même espace Ω une nouvelle fonction de croyance sur S. Soient bel_1 et bel_2 deux fonctions de croyance sur un ensemble Ω, et m_1, m_2 les masses de croyance associées. Alors $bel_1 \oplus bel_2$ est définie à travers la masse de croyance $m_{1\oplus 2}$ avec :

$$m_{1\oplus 2}(A) = \Sigma_{B\cap C=A} m_1(B) m_2(C).$$

Cette règle de combinaison, donnée ici sous sa forme non normalisée, permet de combiner les fonctions de croyance de deux sources distinctes.

Un cas particulier important de cette règle, appelé *règle de conditionnement de Dempster*, apparaît lorsqu'une masse de croyance m_A est telle que $m_A(A) = 1$ et toutes les autres valeurs de m_A sont nulles. Le résultat de la combinaison de m avec m_A produit une nouvelle fonction de croyance, notée bel_A avec :

$$bel_A(B) = bel(B \cup \overline{A}) - bel(\overline{A})$$

Cette règle de conditionnement est le moyen approprié de conditionner une fonction de croyance à une nouvelle évidence, qui établit que le monde actuel n'appartient pas à certains sous-ensembles de Ω. On peut voir l'analogie entre cette règle de conditionnement et les probabilités conditionnelles.

Shafer ne considère que des fonctions de croyance normalisées, c'est-à-dire que $m(\emptyset) = 0$. Toutefois la particularité de la théorie de l'évidence est qu'elle permet de quantifier le conflit entre des sources. Par exemple, pour deux sources 1 et 2, la valeur quantifiant le conflit peut être évaluée comme :

$$K = m(\emptyset) = \Sigma_{B\cap C=\emptyset} m_1(B).m_2(C).$$

Les causes du conflit peuvent être multiples (mauvais fonctionnement du capteur, mauvaise définition de l'ensemble des mondes possibles, mauvaise définition des fonctions de croyance...), mais le conflit ne peut être ignoré. Dans la théorie de l'évidence, Dempster préconise de renormaliser, comme suit, la distribution de masse obtenue après combinaison :

$$m_{1\oplus 2}(A) = \frac{1}{1-K} \Sigma_{B\cap C=A} m_1(B) m_2(C).$$

Cette solution n'est en général pas satisfaisante car elle consiste à ignorer le conflit et conduit, si le conflit est important, à prendre des décisions sur peu d'informations, celles qui sont concordantes entre les sources. D'autres auteurs ont proposé des solutions différentes. Par exemple, Smets [Sme00] considère que les sources sont fiables et que la source du conflit vient du fait que l'ensemble des mondes possibles n'est pas exhaustif. Pour cette raison, il propose d'affecter effectivement la masse à l'ensemble vide, qui correspond en fait à l'hypothèse manquante. Yager [Yag87] et Dubois et Prade [DP88a] proposent de répartir cette masse sur les événements, respectivement à l'ensemble des événements et à l'union des événements à l'origine du conflit.

L'application de la règle de combinaison de Dempster a été critiquée à de nombreuses reprises. Pour illustration, considérons l'exemple suivant proposé par Zadeh [Zad84], qui démontre selon lui les limites d'application de ce principe :

Exemple 17. *On suppose qu'un patient, P, est examiné par deux médecins, A et B. A pense que P a soit une méningite avec une probabilité de 0,99, ou une tumeur du cerveau avec une probabilité 0,01. B est d'accord avec A sur le fait que P est atteint d'une tumeur au cerveau avec une probabilité 0,01. En revanche, il estime que la probabilité qu'il soit victime d'un choc plutôt que d'une méningite vaut 0,99. Si l'on applique la règle de Dempster-Shafer à cette situation, on obtient que la probabilité de l'événement "P est atteint d'une tumeur au cerveau" vaut 1, ce qui est clairement contre-intuitif, puisque les deux médecins s'accordent sur le fait que cette pathologie est peu probable.*

Shafer oppose à cet exemple deux observations :
- tout d'abord, le fait que le patient soit atteint d'une tumeur est la seule chose sur laquelle les deux médecins s'accordent.
- ensuite, le fait que les croyances des deux médecins ne sont pas indépendantes.

Il apparaît donc clairement que la règle de combinaison de Dempster ne peut s'appliquer dans tous les cas. En général, il faut s'assurer que les croyances que l'on combine sont dans une large mesure indépendantes, pour que cette règle offre de bons résultats. On peut reprocher également à cette combinaison une difficulté à gérer les conflits, à cause du principe de normalisation, qui conduit à des difficultés lorsque les croyances sont contradictoires et que la masse de croyance par laquelle on normalise est de ce fait très proche de 0.

Les concepts de fonction de croyance et de la règle de combinaison forment ce que l'on appelle communément la théorie de Dempster-Shafer. Il existe trois cadres principaux d'application des fonctions de croyance, où la règle de combinaison de Dempster est appropriée :
- les probabilités supérieures et inférieures,
- le modèle de Dempster et le modèle de conseil de Kohlas et Monney,
- le modèle de croyance transférable de Smets.

Probabilités supérieures et inférieures Les probabilités supérieures et inférieures sont des représentations de probabilités imprécises. Lorsque la théorie des probabilités associe un nombre unique à la réalisation d'un événement, cette méthode lui associe un intervalle de probabilités. Le contexte des probabilités inférieures et supérieures peut apparaître dans deux cas :
- quand il existe une mesure de probabilité qui représente les croyances des agents, mais dont les valeurs ne sont pas précisément connues, et la seule chose que l'on peut établir à propos de la mesure de probabilité est qu'elle appartient à une famille Π de mesures de probabilité.
- quand l'état des croyances d'un agent est défini par une famille de mesures de probabilité.

En général, on note respectivement P^* et P_* les probabilités supérieures et inférieures définies par Π, plus précisément :

$$P^*(A) = sup_{P\in\Pi}P(A) \text{ et } P_*(A) = inf_{P\in\Pi}P(A).$$

A l'origine, Dempster a élaboré la théorie de l'évidence en étudiant ces probabilités inférieures et supérieures. Il y a de nombreuses correspondances formelles entre les probabilités supérieures et inférieures et la théorie de l'évidence. Par exemple, on peut voir une fonction de croyance comme une probabilité inférieure, et une fonction de plausibilité comme une probabilité supérieure.

Le modèle de conseil Initialement, Dempster [Dem68] a étudié les fonctions de croyance pour essayer de résoudre le problème de l'inférence fiduciaire. Il a introduit un modèle caractérisé par trois données :
- deux espaces finis X et Y,
- une mesure de probabilité P définie sur X,
- une application $\Lambda : X \to 2^Y$.

L'inférence fiduciaire a pour objet de déterminer la distribution de probabilité d'une variable non observable, à partir de données connues, lorsque l'on ne dispose pas de distribution de probabilité a priori. Imaginons que l'on cherche à déterminer la position d'une étoile dans le ciel (à une certaine heure d'une certaine date) en tenant compte des données disponibles, cette estimation est de l'inférence fiduciaire. Le problème étudié par Dempster est de calculer une mesure de probabilité sur Y, à partir de la probabilité sur X. Si l'on connaît toutes les probabilités conditionnelles sur Y étant donné chaque $x \in X$, le problème est simple. En revanche, si l'on ne connaît pas ces probabilités, la seule chose certaine est qu'elle est égale à 0 lorsque $y \notin \Lambda(x)$. En considérant toutes les probabilités conditionnelles possibles, on peut déduire la famille de mesures de probabilité sur Y, dont l'enveloppe inférieure (l'ensemble des valeurs minimales) est une fonction de croyance. En tant que tel, le modèle de Dempster est un cas particulier du modèle de probabilités supérieures et inférieures. Mais cela peut également donner lieu à une autre interprétation, comme le montre le modèle de conseil développé par Monney et Kohlas [KM93]. Ces auteurs conservent la structure originale (X, P, Λ, Y) de Dempster. Ils supposent qu'une question est posée et que Y est l'ensemble des réponses possibles. Le but est de déterminer au mieux la réponse en fonction des informations disponibles, dépendantes de différentes interprétations. Les interprétations possibles sont groupées dans l'ensemble X et il y a exactement une interprétation exacte. Toutes les interprétations ne sont pas identiquement crues et la mesure de probabilité P sur X reflète l'information en tenant compte de cet aspect. De plus, si l'interprétation $x \in X$ est correcte, alors la réponse est connue pour être dans le sous-ensemble $\Lambda(x) \subseteq Y$. Une telle structure $H = (X, P, \Lambda, Y)$ est appelée un conseil. Une interprétation $x \in X$ supporte l'hypothèse $H \subseteq Y$ si $\Lambda(x) \subseteq H$, parce que dans ce cas la réponse est nécessairement dans H. Le degré de support de H est défini comme la probabilité de l'ensemble des interprétations supportant H [KM93]. Le modèle de conseil et le modèle original de Dempster sont identiques, plus précisément, il y a identité mathématique entre le degré de support et la croyance et leurs concepts sont très proches ; une différence tient au fait que dans la théorie du conseil, les concepts primitifs sont les conseils, à partir desquels les degrés de support sont déduits, alors que dans la théorie initiale de Shafer, les degrés de croyance sont des données primitives.

Le modèle transférable de croyance Le *modèle transférable de croyance* est un modèle pour la représentation de croyances quantifiées [Sme00]. Smets propose une approche plus générale que celle proposée initialement dans la théorie de Dempster-Shafer. En particulier, dans l'approche proposée par Smets, la masse de croyance associée à l'ensemble $\emptyset$ n'est pas nécessairement égale à 0, ou de façon équivalente, la croyance associée à Ω n'est pas nécessairement égale à 1. La signification de la valeur positive associée à $m(\emptyset)$ est la quantité de croyances contradictoires entre les différentes sources de fonction de croyance.

Dans le modèle transférable de croyance, on suppose qu'il existe différents mondes possibles, l'un d'entre eux correspond au monde actuel, mais l'agent ne sait pas lequel des mondes est le monde actuel. La valeur $bel(A)$ représente la croyance de l'agent que le monde actuel appartient à A. Smets propose une axiomatique que doit satisfaire toute fonction représentant les croyances d'un agent. Les décisions sont prises en utilisant la mesure de probabilité $BetP$, appelée probabilité pignistique et définie sur Ω de la façon suivante :

$$BetP(A) = \Sigma_{X \subseteq \Omega} \frac{\#(A \cap X)}{\#(X)} \frac{m(X)}{1 - m(\emptyset)}.$$

Smets se sert de cette probabilité pour prendre les décisions. On peut remarquer que contrairement au calcul de la croyance et de la plausibilité, cette opération n'est pas réversible, c'est-à-dire que l'on ne peut pas retrouver la masse de croyance en connaissant la probabilité pignistique.

Cholvy [Cho00] a, quant à elle, donné une interprétation logique de la théorie de l'évidence, et fait le lien entre ce formalisme et la fusion de croyances propositionnelle.

La théorie de l'évidence est très intéressante à plusieurs niveaux. D'abord, elle constitue un sur-ensemble de la théorie des probabilités. Ensuite, elle a pour particularité de pouvoir s'associer aisément avec d'autres formalismes et de traiter les données hétérogènes. De plus, elle permet de quantifier explicitement la méconnaissance. Elle est donc particulièrement adaptée aux situations où l'expert humain prend la décision finale. Elle a cependant deux inconvénients : elle est définie dans un espace fini et le fait de travailler sur l'ensemble des parties d'un ensemble entraîne un risque d'explosion combinatoire.

1.2.2 Fusion d'OCFs

Spohn [Spo87] propose de modéliser l'état épistémique d'un agent par une *fonction ordinale conditionnelle* (*Ordinal Conditional Function* ou OCF), qui fournit un classement des interprétations selon leur crédibilité.

Fonctions ordinales conditionnelles (OCF)

Définition 26. Une *fonction ordinale conditionnelle* κ est une fonction de l'ensemble des mondes possibles $\mathcal{W}$ vers la classe des ordinaux telle que au moins un monde est associé à 0.

On nomme $\mathcal{C}$ la classe des OCF. L'ordinal $\kappa(\omega)$ associé à un monde possible ω peut être vu comme le *degré d'incrédulité* (*degree of disbelief*) de ce monde dans l'état épistémique représenté par l'OCF.

Exemple 18. *On considère $\mathcal{P} = \{a, b\}$. La fonction κ définie sur $\mathcal{W}$ par :*
- $\kappa(a \wedge b) = 0$
- $\kappa(a \wedge \neg b) = \kappa(\neg a \wedge \neg b) = 1$
- $\kappa(\neg a \wedge b) = 2$

est une fonction ordinale conditionnelle.

L'interprétation $a \wedge b$ est la plus crédible, puisque l'ordinal associé est 0, et l'interprétation $\neg a \wedge b$ est la moins crédible.

Cette fonction sur les mondes possibles peut être directement étendue aux formules de la façon suivante :

$$\kappa(\phi) = min_{\omega \models \phi} \kappa(\omega).$$

Une formule ϕ est crue pour un état épistémique représenté par κ si $\kappa(\phi) = 0$. Sinon le degré d'incrédulité de ϕ est $\kappa(\phi)$. Cette notion permet donc de différencier les formules qui ne sont pas crues dans l'état épistémique courant. En effet, on peut dire que la formule ayant le plus petit degré d'incrédulité est la plus vraisemblable dans l'état actuel.

Exemple 19. *On considère de nouveau l'exemple précédent, avec $\mathcal{P} = \{a, b\}$ et la fonction κ définie sur $\mathcal{W}$ par :*
- $\kappa(a \wedge b) = 0$
- $\kappa(a \wedge \neg b) = \kappa(\neg a \wedge \neg b) = 1$
- $\kappa(\neg a \wedge b) = 2$

Alors $\kappa(a) = 0$ et $\kappa(\neg b) = 1$. La formule a est crue, alors que le degré d'incrédulité de la formule $\neg b$ est 1.

Cette notion permet également d'établir une distinction entre les formules crues. On définit le *degré de confiance* (*degree of firmness*) d'une formule de la façon suivante :

Définition 27. Soit ϕ une formule de $\mathcal{L}$. ϕ est crue avec une confiance α relativement à l'OCF κ si et seulement si :
- soit $\kappa(\phi) = 0$ et $\alpha = \kappa(\neg\phi)$,
- ou $\kappa(\phi) > 0$ et $\alpha = -\kappa(\phi)$.

Exemple 20. *Dans l'exemple précédent, $\kappa(a) = 0$ et $\kappa(\neg a) = 1$. La formule a est crue avec un degré de confiance égal à 1. Le degré de confiance de la formule $\neg b$ est -1.*

Fusion d'OCFs

La fusion de fonctions ordinales conditionnelles a été considérée par Meyer, Ghose et Chopra [Mey01, MGC01, CGM06]. Dans ces articles, Meyer et al. proposent une caractérisation logique des opérateurs de fusion d'OCF et étudient la manipulabilité de tels opérateurs, en proposant une définition de la manipulation dans ce cadre (nous y reviendrons dans le paragraphe 4 de ce mémoire). Dans [Mey01, MGC01, CGM06], on utilise une *fonction de rang* (*ranking function*) Φ, qui est une fonction totale de $\mathcal{W}$ dans $\mathbb{N}$ (appelée état épistémique par les auteurs). On voit donc immédiatement que Meyer et al. utilisent des OCFs (puisqu'un entier naturel est un ordinal) non normalisées (une fonction de rang n'associe pas nécessairement la valeur 0 à au moins un monde).

Avant de définir la notion de fusion de fonctions de rang, commençons par donner quelques définitions et notations. Dans la suite de ce paragraphe, on note Φ une fonction de rang, et E une *liste de rang*, c'est-à-dire une liste finie de fonctions de rang. La taille de E est notée $\#(E)$, c'est le nombre de fonctions de rang qu'elle contient. On dit qu'une fonction de rang est P-borné si $\forall \omega \in \mathcal{W}, \Phi(\omega) \leq P$, et qu'une liste de rang E est P-bornée si toutes les fonctions de rang de E sont P-bornés. L'ensemble des listes de rang P-bornées est notée $\mathcal{E}^P$, et l'ensemble de toutes les listes de rang est notée $\mathcal{E}^\infty$.

On peut définir la *fusion de fonctions de rang* par :

Définition 28. [MGC01]

- Un opérateur de fusion P-bornée Δ est une fonction de $\mathcal{E}^P$ dans $\mathcal{E}^\infty$.
- Pour un entier $k \geq 1$, on dit qu'un opérateur de fusion P-bornée Δ est Q-bornée pour k ssi pour toute liste épistémique P-bornée E de taille k, la liste épistémique obtenue en fusionnant E, $\Delta(E)$, est Q-bornée, et qu'il existe une liste épistémique P-bornée F de taille k et un monde ω tels que $\Delta(F)(\omega) = Q$.

Meyer, Ghose et Chopra ont également proposé un ensemble de postulats permettant d'exprimer les propriétés souhaitables pour ce type d'opérateur.

Définition 29. [MGC01] Soient $E = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ et $F = \{\Psi_1, \dots, \Psi_m\}$ deux listes de rang et Δ un opérateur de fusion.

($\Delta 1$) $\forall E, F \in \mathcal{E}^P$ t.q. $\#(E) = \#(F) = n$, si $\Phi_i(\omega) = \Psi_i(\omega)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors $\Delta(E)(\omega) = \Delta(F)(\omega)$.

($\Delta 2$) $\forall k \geq 1$, si Δ est Q-borné pour k, alors $\forall q = 0, \dots, Q$ il existe $E \in \mathcal{E}^P$ et $\omega \in \mathcal{W}$ tels que $\Delta(E)(\omega) = q$.

($\Delta 3$) S'il existe une bijection $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ telle que $\Phi_i = \Psi_{\pi(i)} \forall i \in \{1, \dots, n\}$, alors $\Delta(E) = \Delta(F)$.

($\Delta 4$) Si $\Phi_i(\omega) \leq \Phi_i(\omega') \forall i \in \{1, \dots, n\}$, alors $\Delta(E)(\omega) \leq \Delta(E)(\omega')$.

($\Delta 5$) Si $\Delta(E)(\omega) \leq \Delta(E)(\omega')$, alors $\Phi_i(\omega) \leq \Phi_i(\omega')$ pour un $i \in \{1, \dots, n\}$.

($\Delta 6$) Si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \Phi_i(\omega) = \Phi_j(\omega)$ et $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \Phi_i(\omega) \leq \Phi_i(\omega')$ et $\Phi_j(\omega) < \Phi_j(\omega')$ pour un j de $\{1, \dots, n\}$ alors $\Delta(E)(\omega) < \Delta(E)(\omega')$.

Le postulat ($\Delta 1$) assure que le rang assigné par Δ à un monde ω est indépendant du rang assigné aux autres interprétations. Cette propriété est dans l'esprit de la propriété d'*indépendance des alternatives disponibles* en Théorie du Choix Social (voir le paragraphe 2 du chapitre suivant sur la théorie du vote). ($\Delta 2$) est une propriété de convexité, elle garantit que pour un opérateur de fusion borné par Q pour k, aucun rang de 0 à Q ne reste inutilisé pour une liste de rang de taille k. ($\Delta 3$) assure que l'ordre dans lequel les fonctions de rang sont classés dans une liste épistémique ne modifie pas le résultat de la fusion. Cette propriété est proche de la notion d'*anonymat* en Choix Social, elle cherche à établir un résultat équitable pour tous les agents participant à la fusion, sans priorités liée à leur classement dans la liste de rang. L'adoption de cette propriété permet de représenter les listes de rang sous forme de multi-ensembles, comme c'est le cas dans la fusion propositionnelle. $(\Delta 4)$, $(\Delta 5)$ et $(\Delta 6)$ sont des propriétés très naturelles, qui garantissent un classement des interprétations cohérent avec les classements de chaque fonction de rang.

Dans [Mey01], Meyer a également proposé des opérateurs de fusion adaptés à la fusion d'OCFs :
- $\kappa_{\Delta_{max}}(E)(\omega) = max_{\kappa_i \in E}(\kappa_i(\omega), \leq)$,
- $\kappa_{\Delta_{min_1}}(E)(\omega) = \begin{cases} \kappa_1(\omega) \text{ si } \kappa_i(\omega) = \kappa_j(\omega) \text{ pour tout } \kappa_i, \kappa_j \in E \\ min_{\kappa_i \in E}\kappa_i(\omega) + 1 \text{ sinon,} \end{cases}$
- $\kappa_{\Delta_{min_2}}(E)(\omega) = \begin{cases} 2\kappa_1(\omega) \text{ si } \kappa_i(\omega) = \kappa_j(\omega) \text{ pour tout } \kappa_i, \kappa_j \in E \\ 2\min_{\kappa_i \in E} \kappa_i(\omega) + 1 \text{ sinon,} \end{cases}$
- $\kappa_{\Delta_{\Sigma}}(E)(\omega) = \sum_{\kappa_i \in E} \kappa_i(\omega)$.

Exemple 21. *On considère $\mathcal{P} = \{a, b\}$, et deux fonctions de rang κ_1 et κ_2 définies sur $\mathcal{W}$ par :*
- $\kappa_1(a \wedge b) = 0$
- $\kappa_1(a \wedge \neg b) = \kappa_1(\neg a \wedge \neg b) = 1$
- $\kappa_1(\neg a \wedge b) = 2$

et
- $\kappa_2(a \wedge \neg b) = 0$
- $\kappa_2(a \wedge b) = \kappa_2(\neg a \wedge b) = \kappa_2(\neg a \wedge \neg b) = 1$

Alors on a pour $E = \{\kappa_1, \kappa_2\}$:
- $\kappa_{\Delta_{max}}(E)(a \wedge b) = \kappa_{\Delta_{max}}(E)(a \wedge \neg b) = \kappa_{\Delta_{max}}(E)(\neg a \wedge \neg b) = 1$*, et* $\kappa_{\Delta_{max}}(E)(\neg a \wedge b) = 2$.
- $\kappa_{\Delta_{min_1}}(E)(a \wedge b) = \kappa_{\Delta_{min_1}}(E)(a \wedge \neg b) = \kappa_{\Delta_{min_1}}(E)(\neg a \wedge \neg b)$*=1 et* $\kappa_{\Delta_{min_1}}(E)(\neg a \wedge b) = 2$.
- $\kappa_{\Delta_{\min_2}}(E)(a \wedge b) = \kappa_{\Delta_{min_2}}(E)(a \wedge \neg b) = \kappa_{\Delta_{min_2}}(E)(\neg a \wedge \neg b) = 2$ *et* $\kappa_{\Delta_{min_2}}(E)(\neg a \wedge b) = 3$.
- $\kappa_{\Delta_{\Sigma}}(E)(a \wedge b) = \kappa_{\Delta_{\Sigma}}(E)(a \wedge \neg b) = 1$*,* $\kappa_{\Delta_{\Sigma}}(E)(\neg a \wedge \neg b) = 2$ *et* $\kappa_{\Delta_{\Sigma}}(E)(\neg a \wedge b) = 3$

De plus, on a la propriété suivante :

Proposition 16. *[MGC01]* $\Delta_{\max}$*,* $\Delta_{\min_1}$*,* $\Delta_{\min_2}$ *et* Δ_{Σ} *vérifient les postulats* $(\Delta 1) - (\Delta 6)$.

Nous reviendrons sur ces travaux dans le paragraphe 4, puisque Meyer et al. proposent également une définition de la manipulation pour la fusion d'OCF et que nous avons cherché à comparer leur approche à la nôtre.

On peut citer également les travaux antérieurs de L. Cholvy [Cho95], qui cherche à déterminer une base de donnée cohérente à partir d'une logique basée sur une classification des bases de données à fusionner grâce à un ordre. Dans cet article, Cholvy propose de définir cet ordre entre bases grâce à la confiance qu'on peut accorder à chaque expert par rapport à un domaine précis. Cette représentation, quoique proche des OCF, est cependant distincte puisque l'aspect ordinal des strates n'est pas ici utilisé. Dans ces travaux, Cholvy propose une logique capable de raisonner sur chaque domaine, en déduisant des bases les informations cohérentes sur le domaine considéré, grâce à l'ordre défini sur les bases dans ce domaine.

1.2.3 Fusion possibiliste

Dans cette section, nous rappelons des notions simples de logique possibiliste (voir par exemple [DP88b, DLP94]).

Logique possibiliste

La logique possibiliste [DP88b, DLP94, Zad78] permet de modéliser de manière assez naturelle les informations imprécises et/ou incertaines. Cette distinction entre imprécision et incertitude, importante lorsque l'on tente de modéliser la connaissance d'un agent, est impossible à faire dans un cadre probabiliste quand une seule distribution de probabilité est considérée.

Au niveau sémantique, la logique possibiliste est basée sur la notion de *distribution de possibilité*, notée π, qui est typiquement une fonction de l'ensemble des interprétations $\mathcal{W}$ dans l'intervalle $[0, 1]$. En fait, avoir un ensemble totalement ordonné suffit (il n'y a pas d'obligation d'être dans $[0, 1]$). $\pi(\omega)$ représente le *degré de compatibilité* de l'interprétation ω avec l'état des croyances sur le monde réel. Par convention, $\pi(\omega) = 1$ signifie qu'il est totalement possible que le monde ω soit le monde réel, alors que $\pi(\omega) = 0$ signifie qu'il est certain que ω n'est pas le monde réel. Une distribution de possibilité est dite normalisée s'il existe un monde ω tel que $\pi(\omega) = 1$.
Associée à une distribution de possibilité π, le *degré de possibilité* d'une formule ϕ est la valeur $\Pi(\phi) = max_{\omega \models \phi} \pi(\omega)$ de la mesure de possibilité Π en ϕ. Elle évalue le degré de cohérence de ϕ avec les croyances disponibles.
Une autre mesure associée à π est le *degré de nécessité*. Pour une formule ϕ, c'est la valeur $N(\phi) = 1 - \Pi(\neg\phi)$ de la mesure de nécessité N en ϕ. Elle évalue à quel point ϕ est impliqué par les croyances disponibles et est définie par dualité à partir du degré de possibilité d'une formule ϕ. On peut remarquer que la fonction N renverse l'échelle de classement de π et que $N(\phi) = 1$ signifie que ϕ est une connaissance totalement certaine, alors que $N(\phi) = 0$ exprime un manque de connaissance sur ϕ, mais ne signifie pas que ϕ est fausse.

On peut également définir une distribution de possibilité π grâce à une mesure de possibilité Π, qui est une fonction définie sur $2^{\mathcal{W}}$ et à valeur dans $[0, 1]$, vérifiant :
- $\Pi(\emptyset) = 0$,
- $\Pi(\mathcal{W}) = 1$,
- $\Pi(A_1 \cup A_2) = sup(\Pi(A_1), \Pi(A_2))$.

On a clairement, $\Pi(A) = sup_{x \in A} \pi(x)$ et $\pi(x) = \Pi(\{x\})$.

Bases possibilistes

Une *base possibiliste* est un ensemble de formules valuées $B = \{(\phi_i, \alpha_i), i = 1, ..., n\}$, où ϕ_i est une formule propositionnelle et α_i appartient à un ensemble totalement ordonné, comme $[0, 1]$ (notons toutefois qu'il n'est pas nécessaire que cet ensemble soit numérique). (ϕ_i, α_i) signifie que le degré de nécessité ou de certitude de ϕ_i est au moins égal à α_i ($N(\phi_i) \geq \alpha_i$). On note B^* la base propositionnelle associée à B, c'est-à-dire la base obtenue à partir de B en ne considérant pas les degrés des formules.

Etant donné B, on peut générer une distribution de possibilité unique π_B, telle que toutes les interprétations qui satisfont toutes les formules de B ont le plus haut degré de possibilité 1, et les autres interprétations sont classées en fonction du niveau de la plus haute formule qu'elles contredisent. On a [DLP94] :

Définition 30. Pour toute interprétation ω :
- $\pi_B(\omega) = 1$ si $\forall(\phi_i, \alpha_i) \in B, \omega \models \phi_i$
- $\pi_B(\omega) = 1 - max_{\omega \models \neg\phi_i} \alpha_i$ sinon.

Exemple 22. *Soit* $B = \{(a \vee b, 0.6), (\neg a, 0.4)\}$.
Alors $\pi_B(a \wedge b) = 0.6$, $\pi_B(\neg a \wedge b) = 1$, $\pi_B(a \wedge \neg b) = 0.6$ *et* $\pi_B(\neg a \wedge \neg b) = 0.4$.

Parmi les interprétations, $\neg a \wedge b$ est la plus plausible car elle satisfait toutes les formules de B, $a \wedge \neg b$ et $a \wedge b$ sont plus plausibles que $\neg a \wedge \neg b$ car la plus haute formule falsifiée par $a \wedge \neg b$ et $a \wedge b$, $(\neg a, 0.4)$, est moins possible que la plus haute formule falsifiée par $\neg a \wedge \neg b$, $(a \vee b, 0.6)$.

Deux bases possibilistes B et B' sont équivalentes, noté $B \equiv B'$, si les distributions de possibilités associées sont égales : $\pi_B = \pi_{B'}$.

Une question importante est de définir la notion d'inférence possibiliste : quand peut-on dire qu'une formule est conséquence d'une base possibiliste ? On définit deux notions d'inférence, basées sur le degré d'incohérence d'une base possibiliste :

Définition 31. [DLP94] Soit B une base possibiliste.
- Soit $\alpha \in [0,1]$. Une $\alpha-$*coupe* de B, notée $B_{\geq\alpha}$, est l'ensemble des formules propositionnelles de B dont le degré de nécessité est au moins égal à α. Une $\alpha-$*coupe stricte* de B, notée $B_{>\alpha}$, est l'ensemble des formules propositionnelles de B dont le degré de nécessité est strictement supérieur à α.
- Le *degré d'incohérence* de B est $Inc(B) = max_{\{B_{\geq\alpha_i} \text{ est incohérent }\}}\alpha_i$.
- Une formule ϕ est une *conséquence plausible* de B, noté $B \models_P \phi$, si $B_{>Inc(B)} \models \phi$.
- Soit (ϕ, α) une information telle que $\alpha > Inc(B)$. (ϕ, α) est une *conséquence possibiliste* de B, noté $B \models_\pi (\phi, \alpha)$, si $B_{\geq\alpha}$ est cohérent, $B_{\geq\alpha} \models \phi$, et $\forall\beta > \alpha, B_{\geq\beta} \not\models \phi$.

Une α-coupe de B est constituée des formules dont le degré de nécessité est au moins égal à α. Le degré d'incohérence représente le niveau à partir duquel B est incohérente. Si $Inc(B) = 0$, cela signifie que la base propositionnelle B^* associée à B est cohérente. On définit la *clôture plausible* de B, notée $Cn_P(B)$, par : $Cn_P(B) = \{\phi_i, B \models_P \phi_i\}$.

Fusion possibiliste

De nombreux travaux ont porté sur le problème de la fusion de bases possibilistes (voir par exemple [BDKP02, BK02, BK03]). Deux définitions ont été considérées, selon que l'on se place au niveau des mondes, et on doit alors agréger les distributions de possibilité pour connaître à quel point un monde est possible pour le groupe (approche sémantique) ; ou que l'on se place au niveau des formules, et on doit alors agréger les degrés de nécessité associés à chaque formule pour connaître le degré de nécessité d'une formule pour le groupe (approche syntaxique). Nous commençons par détailler la première approche, avant d'aborder la seconde.

1. **Définition sémantique de la fusion possibiliste** Pour définir la base possibiliste résultante de la fusion de n bases possibilistes de façon sémantique, on utilise un opérateur d'agrégation de distributions de possibilité, noté $\oplus_d$, vérifiant deux conditions :
   - $\oplus_d(1, 1, \ldots, 1) = 1$,
   - Si $\forall i = 1, \ldots, n, \pi_i(\omega) \geq \pi_i(\omega')$, alors :
   $$\oplus_d(\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \geq \oplus_d(\pi_1(\omega'), \ldots, \pi_n(\omega')).$$
   (monotonie)

   La première condition impose que si les sources considèrent un monde ω comme totalement possible, alors l'agrégation doit en faire de même (elle assure donc que si les bases sont cohérentes, alors le résultat doit l'être aussi). La seconde condition exprime le fait que si toutes les sources préfèrent une interprétation à une autre, alors l'agrégation doit en faire de même (condition de Pareto). La proposition suivante permet de définir la fusion des bases possibilistes à partir de l'opérateur d'agrégation de distributions de possibilités $\oplus_d$:

Proposition 17. *[BDKP02] Soit $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ un vecteur de bases possibilistes, et $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ les distributions de possibilités associées. Soit $\pi_{\mathcal{B}_{\oplus_d}}$ le résultat de la combinaison de $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ avec $\oplus_d$. Alors la base possibiliste associé à $\pi_{\mathcal{B}_{\oplus_d}}$ est :*

$$\mathcal{B}_{\oplus_d} = \{(D_j, 1 - \oplus_d(x_1, \ldots, x_n)), j = 1, \ldots, n\}$$

où les D_j sont équivalentes aux disjonctions de taille j entre les formules ϕ_i de différentes B_i $(i = 1, \ldots, n)$ et x_i est égal soit à $1 - \alpha_i$ soit à 1 selon que ϕ_i appartient à D_j ou non.

Différents opérateurs $\oplus_d$ sont envisageables pour agréger des distributions de possibilités. Entre autres, on peut caractériser plusieurs familles d'opérateurs d'agrégation [BDKP02] :

– $\oplus_d$ est un *opérateur conjonctif* si :

$$\forall a \in [0,1], a \oplus_d 1 = 1 \oplus_d a = a.$$

– $\oplus_d$ est un *opérateur disjonctif* si :

$$\forall a \in [0,1], a \oplus_d 1 = 1 \oplus_d a = 1.$$

  Plus précisément, $\oplus_d$ est un *opérateur disjonctif régulier* si :
  – $\forall a \in [0,1]$, $a \oplus_d 1 = 1 \oplus_d a = 1$, et
  – $\forall a \neq 1, \forall \neq 1, a \oplus_d b \neq 1$.

– $\oplus_d$ est un *opérateur idempotent* si :

$$\forall a \in [0,1], a \oplus_d a = a.$$

Parmi les opérateurs conjonctifs on trouve l'opérateur min, le produit $a \oplus_d b = a \times b$, et la conjonction linéaire $max(0, a + b - 1)$. Un exemple trivial d'opérateur disjonctif est l'opérateur « vide » défini par $\forall a, \forall b, a \oplus_d b = 1$ sauf pour $0 \oplus_d 0 = 0$. D'autres opérateurs disjonctifs, réguliers cette fois, sont le max, la « somme probabiliste » définie par $a \oplus_d b = a + b - ab$, et le dual de la distance géométrique définie par $a \oplus_d b = 1 - \sqrt{(1-a)(1-b)}$. L'exemple suivant illustre le fonctionnement de certaines de ces combinaisons :

Exemple 23. *Soient $B_1 = \{(a \vee b, 0.6), (\neg a, 0.4)\}$ et $B_2 = \{(a \vee \neg b, 0.7), (a, 0.3)\}$. Alors $\mathcal{B}_{\oplus_d}$ est égal à :*
– $\mathcal{B}_{min} = \{(a \vee b, 0.6), (\neg a, 0.4), (a \vee \neg b, 0.7), (a, 0.7), (\neg b, 0.7)\}$,
– $\mathcal{B}_{max} = \{(a \vee b, 0.6), (\neg a, 0.4), (a \vee \neg b, 0.7), (a, 0.6), (\neg b, 0.4)\}$.

Les opérateurs conjonctifs doivent être utilisés lorsqu'il y a peu de conflits entre les bases. A l'inverse, les opérateurs disjonctifs ne sont pas appropriés lorsque les sources sont cohérentes entre elles, mais permettent au contraire de gérer les conflits entre les bases. Cette distinction entre opérateurs disjonctifs et conjonctifs est très importante pour choisir un opérateur, mais elle nécessite de pouvoir évaluer à quel point les bases sont conflictuelles. Le degré de cohérence de n sources peut être évalué en calculant la valeur $Coh = max_{\omega \in \mathcal{W}} \oplus_d (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega))$. Même si les bases sont peu conflictuelles, la fusion conjonctive conduit en général à une distribution de possibilités sous-normalisée (c'est-à-dire que la valeur 1 n'est jamais atteinte). On peut alors, si l'on considère que les sources sont toutes fiables, normaliser la distribution obtenue par Coh (cette opération est numériquement instable si le degré de cohérence est trop faible).

Parmi les opérateurs conjonctifs, certains ont un comportement de renforcement, c'est-à-dire qu'ils ont pour effet de rendre les informations jugées peu plausibles par les sources encore moins plausibles. On peut citer le produit, qui est utilisé surtout lorsque l'on suppose les bases indépendantes et la conjonction linéaire, dont l'effet de renforcement est encore plus fort puisqu'il élimine les informations jugées très peu fiables mais non impossibles par toutes les sources.

Enfin, les opérateurs idempotents comme min ou max peuvent être utilisés pour éliminer les redondances entre les sources. Ils permettent également, si toutes les sources fournissent la même distribution de possibilité, d'obtenir cette distribution comme résultat (principe d'unanimité).

La fusion de bases possibilistes est une généralisation de la fusion de bases propositionnelles. En particulier, on peut voir que [BDKP02] :

– Si $\oplus_d$ est un opérateur conjonctif et si B_1 et B_2 sont telles que B_1^* et B_2^* sont cohérentes, alors :

$$\mathcal{B}_{\oplus_d} \equiv B_1^* \cup B_2^*$$

– Si $\oplus_d$ est un opérateur disjonctif régulier, alors :

$$\mathcal{B}_{\oplus_d} \equiv B_1^* \bigvee B_2^*$$

où $B_1^* \bigvee B_2^*$ représente l'ensemble des disjonctions formées d'une formule de B_1^* et d'une formule de B_2^*.

2. **Définition syntaxique de la fusion possibiliste**

On peut également définir la base possibiliste résultante de la fusion de n bases possibilistes cohérentes de façon syntaxique, en utilisant un opérateur d'agrégation des degrés de certitude associés à ϕ_i dans chaque base de $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ noté $\oplus_c$. La base possibiliste $\mathcal{B}_{\oplus_c}$, résultat de la fusion de n bases possibilistes cohérentes $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, est définie par [BK02] :

$$\mathcal{B}_{\oplus_c} = \{(\phi, \oplus_c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)), \phi \in \mathcal{L}, B_i \vdash_\pi (\phi, \alpha_i)\}.$$

Dans ce cas, on suppose pour l'opérateur d'agrégation $\oplus_c$ les conditions suivantes :

– $\oplus_c(0, 0, \ldots, 0) = 0$,

– Si $\forall i = 1, \ldots, n, \alpha_i \geq \alpha'_i$, alors :

$$\oplus_c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geq \oplus_c(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$$

(monotonie).

La première propriété dit que si une information n'est une conclusion explicite d'aucune des bases, alors elle ne doit pas être une conclusion explicite de la base fusionnée. La seconde condition est simplement une condition d'unanimité, qui exprime que si toutes les sources considèrent qu'une formule est plus crédible qu'une autre, alors l'agrégation doit en faire de même.

Un opérateur de fusion possibiliste $\oplus_c$ est *strictement monotone* si l'on a :

Si $\forall i = 1, \ldots, n, \alpha_i \geq \alpha'_i$, et $\exists j, \alpha_j > \alpha'_j$ alors :

$$\oplus_c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > \oplus_c(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n).$$

Différents opérateurs $\oplus_c$ sont envisageables pour agréger des degrés de nécessité. Entre autres, on a [BK02] :

– $\oplus_c$ est un *opérateur conjonctif* si :

$$\oplus_c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > 0 \text{ si } \exists i, a_i > 0.$$

– $\oplus_c$ est un *opérateur disjonctif* si :

$$\oplus_c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 \text{ si } \exists i, a_i = 0.$$

Un exemple d'opérateur conjonctif est l'opérateur max (il faut rappeler que la définition de $\oplus_c$ se situe au niveau syntaxique des bases, il n'est donc pas surprenant de trouver max comme un opérateur conjonctif, alors qu'en général, c'est plutôt l'opérateur min qui est conjonctif), ou la somme probabiliste. Un exemple d'opérateur disjonctif est l'opérateur min, ou le produit.

Exemple 24. *Soient* $B_1 = \{(a \vee b, 0.6), (\neg a, 0.4)\}$ *et* $B_2 = \{(a \vee \neg b, 0.7), (a, 0.3)\}$. *Alors* $\mathcal{B}_{\oplus_c}$ *est égal à :*
– $\mathcal{B}_{max} = \{(a \vee b, 0.6), (\neg a, 0.4), (a \vee \neg b, 0.7), (a, 0.3)\}$.
– $\mathcal{B}_{min} = \{(a \vee b, 0.3)\}$.

Benferhat et Kaci ont proposé dans [BK02] des postulats pour ces opérateurs de fusion de bases possibilistes, inspirés de ceux existants dans le cas de la fusion propositionnelle [KP02a].

P1 *Cohérence :* $Cn_P(\mathcal{B}_{\oplus_c}) \neq \mathcal{L}$.

P2 *Complémentarité de l'information :* si $B_1^* \cup \ldots \cup B_n^*$ est cohérent, alors $Cn_P(\mathcal{B}_{\oplus_c}) = Cn_P(B_1 \cup \ldots \cup B_n)$.

P3 *Indépendance syntaxique :* Si $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}'$, alors $Cn_P(\mathcal{B}_{\oplus_c}) = Cn_P(\mathcal{B}'_{\oplus_c})$.

P4 Si $B_1^* \cup B_2^*$ sont incohérents et si B_1 et B_2 sont également prioritaires, alors $Cn_P(B_1) \not\subseteq Cn_P(\mathcal{B}_{\oplus_c})$ et $Cn_P(B_2) \not\subseteq Cn_P(\mathcal{B}_{\oplus_c})$.

P5 Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \sqcup \mathcal{B}''$. Alors $Cn_P(\mathcal{B}_{\oplus_c}) \subseteq Cn_P(Cn_P(\mathcal{B}'_{\oplus_c}) \cup Cn_P(\mathcal{B}''_{\oplus_c}))$.

P6 Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \sqcup \mathcal{B}''$. Si $Cn_P(Cn_P(\mathcal{B}'_{\oplus_c}) \cup Cn_P(\mathcal{B}''_{\oplus_c})) \neq \mathcal{L}$, alors $Cn_P(\mathcal{B}'_{\oplus_c}) \cup Cn_P(\mathcal{B}''_{\oplus_c}) \subseteq Cn_P(\mathcal{B}_{\oplus_c})$.

Dans le postulat **(P4)**, deux bases B_1 et B_2 sont dites également prioritaires si et seulement si on a : pour tout conflit $\mathcal{C}$ de $B_1 \cup B_2$ (c'est-à-dire tout ensemble propositionnel minimalement incohérent de $B_1^* \cup B_2^*$), il existe au moins une formule parmi les moins prioritaires de $\mathcal{C}$ qui appartient à B_1 et une formule parmi les moins prioritaires de $\mathcal{C}$ qui appartient à B_2 (une formule ϕ est dite moins prioritaire dans un ensemble si son degré de priorité est minimal parmi ceux des formules de l'ensemble).

Benferhat et Kaci ont montré que, en supposant l'opérateur $\oplus_c$ associatif et commutatif, on a :

Proposition 18. *[BK02]*
– *Tous les opérateurs de fusion possibilistes vérifient* **(P1)**, **(P3)**, **(P4)** *et* **(P5)**.
– *Un opérateur de fusion* $\oplus_c$ *vérifie* **(P2)** *si et seulement si c'est un opérateur conjonctif.*
– *Un opérateur de fusion* $\oplus_c$ *vérifie* **(P6)** *si et seulement si c'est un opérateur strictement monotone.*

Benferhat et Kaci ont également proposé des adaptations des postulats $(\mathbf{Maj})$ et $(\mathbf{Arb})$ de la logique propositionnelle :

$$(\mathbf{P_{Maj}}) : \forall B', \exists n, Cn_P((\mathcal{B} \sqcup B'^n)_{\oplus_c}) \models Cn_P(B').$$

$$(\mathbf{P_{Arb}}) : \forall B', \forall n, Cn_P((\mathcal{B} \sqcup B'^n)_{\oplus_c}) \equiv Cn_P((\mathcal{B} \sqcup B')_{\oplus_c}).$$

Et ils ont montré :

Proposition 19. *[BK02] Un opérateur de fusion* $\oplus_c$ *vérifie* $(\mathbf{P_{Maj}})$ *si et seulement si c'est un opérateur strictement monotone et un opérateur de renforcement (i.e. tel que* $\oplus_c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *quand* $\forall i, a_i \neq 1$ *et* $\oplus_c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$ *si* $\exists i, \alpha_i = 1$*).*

Proposition 20. *[BK02] Si* $\oplus_c$ *un opérateur est idempotent (i.e. tel que* $\forall \alpha, \oplus_c(\alpha, \ldots, \alpha) = \alpha$*), alors il vérifie* $(\mathbf{P_{Arb}})$.

Il est intéressant de faire un parallèle entre la fusion en appliquant le principe de Bayes et la fusion possibiliste : il existe une forte similarité entre ces deux opérations de fusion, en particulier si l'on pose $\pi_i(x) = P(H_i|x)$ (par exemple, il y a proportionnalité entre les deux fusions si l'on choisit une distribution de probabilité *a priori* uniforme). Cependant, ces résultats numériques proches ne changent pas la différence profonde d'interprétation entre ces deux approches. Dans le cadre probabiliste, on suppose que l'on parvient à calculer la probabilité précise de chaque valeur possible de x. Dans le cadre possibiliste, la fusion ne fournit qu'un degré de vraisemblance pour chaque valeur de x, information plus pauvre qu'un degré de probabilité, mais peut être plus crédible quand la distribution de probabilité *a priori* initiale a été posée par défaut.

Chapitre 2

Théorie du choix social

Introduction

Qu'est-ce que la démocratie ? On peut trouver dans un dictionnaire une définition proche de : « système politique, forme de gouvernement dans lequel la souveraineté appartient au peuple ». Pour Périclès, repris par Abraham Lincoln : « La démocratie c'est le gouvernement du peuple par le peuple et pour le peuple. »

Si c'est le « peuple » qui dirige dans une démocratie, les choix de la société doivent être réalisés collectivement. Or, ces choix collectifs ne peuvent être réalisés qu'en agrégeant les choix indivuels en un (ou plusieurs) choix collectifs. En fait, de nombreuses décisions publiques (comme les taxes et les dépenses publiques, le choix d'une politique, d'un gouvernement ou d'un maire, l'appartenance à l'Europe) sont prises par vote, qui est une manière naturelle d'agréger des préférences individuelles. Le choix de la règle de vote est une question éthique majeure, qui n'est pas sans implication sur le comportement des institutions politiques.

Le débat autour du choix d'une règle de vote garantissant l'équité du vote existe depuis les travaux de Borda [1781] et Condorcet [1785]. En 1952, Arrow a proposé un cadre formel permettant l'étude de nombreuses règles de vote d'un point de vue axiomatique, initiant une forte recherche autours de ces questions. Ce domaine de recherche est habituellement appelé Théorie du Choix Social.

Une règle de vote permet de choisir un candidat (appelé aussi alternative) parmi plusieurs, à partir des choix individuels des agents (aussi appelés votants). Lorsque deux candidats seulement sont possibles, le vote majoritaire est sans conteste le moyen le plus juste d'agréger les préférences. Les problèmes sur le choix de la méthode de vote se posent lorsqu'il y trois candidats ou plus. La première idée est d'étendre le vote majoritaire à plus de deux candidats par le vote par pluralité : chaque votant écrit le nom d'exactement un candidat, et le candidat recevant le plus de votes gagne l'élection (en cas d'égalité, on départage ensuite les candidats retenus). Cette méthode de vote, très utilisée aujourd'hui, a été critiquée par Borda et Condorcet à la fois, et ces critiques sont à l'origine des recherches actuelles sur les méthodes de vote. Le reproche fait au vote par pluralité est que cette méthode de vote peut élire un candidat « faible », c'est-à-dire un candidat qui perdrait en duel contre **tous** les autres candidats (appelé « perdant de Condorcet »), comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 25. *Le tableau 2.1 se lit ainsi : 3 votants ont les préférences suivantes $a > b > c > d$, 5 ont $a > c > b > d$, et ainsi de suite. Pour le vote par pluralité, a gagne avec 8 votes, mais pour Borda et Condorcet, c'est le pire candidat dans la mesure où une stricte majorité de 13 votants préfère n'importe quel candidat à a.*

Condorcet et Borda ont proposé des méthodes de vote différentes pour résoudre ce problème. Pour Borda, une solution est de classer chaque candidat du pire au meilleur, en affectant 0 point au pire, 1

3	5	7	6
a	a	b	c
b	c	d	b
c	b	c	d
d	d	a	a

TAB. 2.1 – Exemple de profil de vote

point au suivant, et ainsi de suite jusqu'au meilleur. Le gagnant de l'élection est celui qui a le plus haut score, on parle alors de « gagnant de Borda ». Pour Condorcet, un vainqueur est celui qui bat tous les autres candidats dans des comparaisons deux à deux (a bat b si strictement plus de votants préfèrent a à b). On parle alors d'un « gagnant de Condorcet ».

Dans l'exemple précédent, le gagnant de Condorcet est le candidat c car 13 votants préfèrent c à a, 14 préfèrent c à d, et 11 préfèrent c à b. En revanche, le vainqueur de Borda est le candidat b, puisqu'il est classé premier par 7 votants, second par 9 votants, et troisième par 5 votants, ce qui est mieux que n'importe quel candidat. Ces deux propositions ont donné lieu à de nombreux travaux, et de nombreuses méthodes de vote sont inspirées par ces deux familles. On peut trouver un travail remarquable et complet sur ce sujet dans le chapitre 9 du livre de Moulin [Mou88].

Néanmoins, ce simple exemple illustre l'importance du choix de la méthode de vote, puisqu'elle peut influencer l'issue de l'élection. La question des propriétés attendues pour une méthode d'agrégation de préférences semble alors essentielle pour choisir une méthode particulière.

2.1 Notations

On note A l'ensemble des alternatives (l'ensemble des candidats pour une élection présidentielle, « oui » et « non » pour un référendum...). On suppose souvent dans ce cadre de travail que les préférences individuelles des agents sont des ordres linéaires stricts (ou ordres complets) sur A : les votants fournissent donc un classement complet des alternatives possibles les unes par rapport aux autres, sans ex-aequo. On note $L(A)$ l'ensemble des ordres linéaires sur A. $L(A)$ représente tous les classements possibles. Si on veut établir les préférences collectives de n agents $\{1, \ldots, n\}$, on dispose d'un *profil de préférence*, c'est-à-dire des n relations de préférence individuelles $\{P_1, \ldots, P_n\}$, où chaque $P_i \in L(A)$ représente les préférences du votant i. i étant fixé, $P_{j \neq i}$ représente le profil de préférence constitué des $n-1$ relations de préférence P_j, avec $j \neq i$.

Enfin, une *fonction de choix social* est une fonction $F : L(A)^n \to L(A)$ qui associe à tout profil de préférence un ordre complet sur A. Une fonction de choix social agrège donc les préférences individuelles en une préférence collective.

Le gagnant de l'élection est alors l'unique candidat classé premier dans la préférence collective.

2.2 Théorèmes d'impossibilité

Comme le choix d'une méthode de vote peut modifier le résultat du vote, il est nécessaire de réfléchir objectivement aux qualités que doit posséder une telle méthode pour être choisie afin de définir les choix collectifs. Les propriétés suivantes semblent nécessaires :

– *Principe d'universalité*
  Ce principe énonce qu'une fonction de choix social doit déterminer une préférence sociale complète à partir de n'importe quel ensemble de préférences individuelles. Le vote doit avoir comme

résultat un classement de toutes les alternatives les unes par rapport aux autres (homogénéité par rapport aux données), le processus de vote doit être capable de déterminer ce résultat pour tous les profils possibles et il doit toujours donner le même résultat à partir du même profil (le hasard ne doit jouer aucun rôle).

– *Principe de Pareto ou unanimité*
  Si tous les votants préfèrent une alternative à une autre, alors il doit en être de même dans le classement obtenu.
– *Principe de non-dictature*
  Ce principe énonce que la préférence d'un seul votant ne peut être érigée en préférence collective, sans tenir compte des préférences des autres votants. Plus précisément, il existe un dictateur i si :

$$\exists i, \forall(P_1, \ldots, P_n), f(P_1, \ldots, P_n) = P_i$$

– *Indépendance des alternatives non disponibles*
  Si l'on restreint le domaine d'application d'une fonction de choix social à un sous-ensemble d'alternatives, alors le résultat doit être compatible avec le résultat obtenu avec le profil complet. Changer les choix individuels des votants sur les alternatives non disponibles (celles qui ne sont pas dans le sous-ensemble) ne doit pas modifier le classement entre les alternatives disponibles (celles du sous-ensemble). Formellement, si deux profils de préférence $P_1, \ldots, P_n$ et $R_1, \ldots, R_n$ sont tels que tous les votants i classent dans le même ordre deux alternatives a et b, alors a et b sont classés dans le même ordre dans $f(P_1, \ldots, P_n)$ et $f(R_1, \ldots, R_n)$.

Le théorème d'Arrow peut s'énoncer ainsi :

Proposition 21 (Théorème d'impossibilité d'Arrow)**.** *[Arr63]*
En présence d'au moins trois alternatives, il n'existe pas de fonction de choix social qui vérifie les principes d'universalité, de Pareto, de non-dictature et d'indépendance des alternatives non disponibles.

Ce théorème est surprenant, dans la mesure où les principes retenus pour caractériser les méthodes de vote acceptables semblent naturels. La conséquence de ce théorème est qu'il n'existe pas de méthode de vote « parfaite » et le mieux à faire est de déterminer des méthodes de vote offrant de bons compromis. De nombreuses recherches ont permis d'échapper à ce théorème d'impossibilité, en relaxant certaines hypothèses.

Un autre théorème, celui de Gibbard et Satterthwaite, est également très important dans le domaine du vote. Pour ce th'orème, on considère des méthodes de vote qui désignent un unique vainqueur parmi toutes les alternatives (ce qui est raisonnable si l'on considère que tous les votants ont des préférences strictes) et on suppose que tout candidat peut être élu. De plus, on cherche à caractériser les méthodes de vote non manipulables, ce qui signifie qu'aucun votant n'a d'intérêt à mentir sur ses préférences (il ne peut pas faire élire un candidat mieux classé pour lui en donnant une relation de préférence différente de la réalité). Cette attente semble très naturelle quand on cherche à déterminer les préférences collectives d'un groupe, il est en effet préférable que les participants au vote soient sincères.

Un théorème d'impossibilité analogue au théorème d'Arrow existe dans ce cas :

Proposition 22 (Théorème de Gibbard-Satterthwaite)**.** *[Gib73, Sat75]*
En présence d'au moins trois alternatives, une méthode de vote surjective est non manipulable si et seulement si elle est dictatoriale.

Ce théorème montre que le principe de non-manipulabilité est impossible à garantir pour une méthode de vote non dictatoriale.

La mise en évidence de ces résultats, très négatifs, a été suivie de nombreux travaux dont le but est d'étudier comment échapper à ces théorèmes tout en conservant des méthodes de vote raisonnables. La question qui nous intéresse ici est le lien entre l'agrégation de préférences et l'agrégation de croyances et plus particulièrement, de déterminer si les deux théorèmes précédents sont également vrais dans le cadre de la fusion : y-a-t-il de bonnes méthodes de fusion ? La fusion échappe-t-elle au théorème d'Arrow ? Qu'en est-il de la manipulabilité pour la fusion ?

Pour répondre à ces questions, on peut s'intéresser aux points communs et aux différences entre les deux cadres de travail. Tout d'abord, dans le cadre de la fusion, une alternative est un monde et un votant est un des agents participant au processus de fusion. Le but de la fusion est de déterminer l'ensemble des mondes acceptables pour le groupe (autrement dit d'élire un ensemble de mondes). La différence fondamentale entre le cadre de la fusion et le cadre du vote est la représentation des croyances. En effet, dans la théorie du vote, on dispose pour chaque agent d'un ordre strict total sur l'ensemble des alternatives (c'est-à-dire que les alternatives sont classées de la meilleure à la pire) ; dans le cadre de la fusion, on dispose uniquement de pré-ordres à deux niveaux entre les mondes (on sait simplement quels sont les mondes auxquels l'agent croit -ses modèles- qui sont tous sur le même plan et quels mondes l'agent ne croit pas). Quant au résultat du processus de fusion, c'est également un pré-ordre à deux niveaux (on dispose des modèles et des contre-modèles du groupe), alors qu'en théorie du vote, le résultat est soit un ordre total strict sur les alternatives, soit une alternative particulière.

Passons à présent aux principes attendus pour une méthode de vote. Sont-t-ils vérifiés par les opérateurs de fusion contraintes ?

- De façon évidente, le principe d'universalité n'est pas vérifié puisque les mondes ne sont pas ordonnés totalement, bien que les opérateurs de fusion contraintes opèrent sur n'importe quel profil de croyances et que les principe de non-dictature soit vérifié.
- Le principe d'unanimité est vérifié grâce au postulat **(IC2)**, qui pose que si tous les agents sont d'accord sur un monde, celui-ci fait partie des mondes retenus dans la fusion.
- Enfin, le principe d'indépendance vis-à-vis des états non disponibles n'est pas vérifié en général par les opérateurs de fusion contrainte. On peut vérifier sur l'exemple suivant que les opérateurs de fusion contraintes Δ^{Σ} ne vérifient pas ce principe.

Exemple 26. *On considère trois agents* K_1*,* K_2 *et* K_3 *dont les croyances sont représentées respectivement par les ensembles de modèles* $\{000, 111\}$*,* $\{001, 010, 100\}$ *et* $\{011, 101, 110\}$*. Alors* $[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{001, 010, 011, 100, 101, 110\}$ *(voir tableau 2.2).*

ω	K_1	K_2	K_3	$\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1,K_2,K_3\})$
000	0	1	2	3
001	1	0	1	$\mathbf{2}$
010	1	0	1	$\mathbf{2}$
011	1	1	0	$\mathbf{2}$
100	1	0	1	$\mathbf{2}$
101	1	1	0	$\mathbf{2}$
110	1	1	0	$\mathbf{2}$
111	0	2	1	3

TAB. 2.2 – Fusion avec $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}$.

Si l'on restreint l'ensemble des alternatives (l'ensemble des mondes) en retirant le monde 111*, alors l'intensité avec lequel l'agent 1 croit aux autres alternatives est modifiée, puisque cette intensité dépend de ses modèles, et que* 111 *ne fait plus partie de ses modèles. Or, cette intensité influe sur le résultat de la fusion. Le résultat est différent, on a dans ce cas* $[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{001, 010, 100\}$ *(voir tableau 2.3). Cela montre que la préférence du groupe est modifiée par rapport aux mondes* $011, 101, 110$*, alors que les préférences individuelles ne sont pas modifiées (pour l'agent 1, l'alternative* 000 *est toujours préférée strictement aux autres, comme au départ).*

ω	K_1	K_2	K_3	$\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})$
000	0	1	2	3
001	1	0	1	**2**
010	1	0	1	**2**
011	2	1	0	3
100	1	0	1	**2**
101	2	1	0	3
110	2	1	0	3

TAB. 2.3 – Fusion avec $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}$.

Le principe d'indépendance vis-à-vis des états non disponibles vise surtout à éviter la comparaison des utilités individuelles en économie. L'utilité peut être vue, en simplifiant, comme un score représentant l'intensité avec laquelle un individu préfère une alternative. La comparaison des utilités est très souvent vue comme gênante, dans la mesure où si un individu A affirme qu'il préfère 2 fois plus l'alternative x à l'alternative y, qu'un individu B affirme qu'il préfère 8 fois plus l'alternative x à l'alternative y, rien ne permet de savoir si l'individu B n'est pas 4 fois plus sensible que A. Comme il n'y a pas d'échelle objective derrière ces notions d'utilité, il est sage de s'interdire des comparaisons numériques, et de se limiter à des pré-ordres qui ne donnent pas d'information quantitative sur l'utilité des alternatives. Arrow cite Bentham dans [Arr63] pour illustrer ce point :
"This is vain to talk of adding quantities which after the addition will continue distinct as they were before, one man's happines will never be another man's happiness : a gain to one man is no gain to another : you might as well pretend to add 20 apples to 20 pears..."
Dans le cas de la fusion, la chose est différente puisque l'intensité des préférences n'est pas décidée a priori par les agents, mais dépend de l'opérateur utilisé. Il y a donc une réelle indépendance entre les préférences des agents et l'utilité que l'opérateur affecte à chaque monde. On peut considérer ici, pour la fusion, que l'opérateur permet la comparaison des utilités puisqu'il établit lui-même une échelle d'intensité de préférences commune à tous les agents, qui est de ce fait objective. En fusion propositionnelle «pure», on a de fait une hypothèse de commensurabilité liée à l'existence de deux strates : pour chaque agent, un monde est retenu (resp. rejeté) pour exactement la même raison (être un modèle -resp. un contre-modèle- des croyances de l'agent).
Un autre point intéressant est soulevé par le théorème de Gibbard-Satterthwaite. Pour ce théorème, le principe d'indépendance vis-à-vis des états non pertinents n'est pas nécessaire, donc il semble que les hypothèses de ce théorème soient remplies. Cependant, la question est la signification même de la manipulabilité, qui pose problème dans le cadre de la fusion. En effet, dans le cadre du théorème de Gibbard-Satterthwaite, le résultat du vote est une alternative et on dispose des préférences complètes de chaque agent sur l'ensemble des alternatives. Il est donc simple de définir la manipulation : un votant a intérêt à mentir si cela lui permet de faire élire une alternative qu'il préfère à celle qui serait élue s'il était sincère. Dans le cadre de la fusion, on ne dispose pas d'un classement complet entre chaque alternative pour les agents d'une part, et d'autre part le résultat de la fusion n'est en général pas un monde unique. Il est donc plus délicat ici de définir quel intérêt un agent a à mentir sur ses croyances ou ses buts.

2.3 Généralisation du Théorème de Gibbard-Satterthwaite

Des travaux récents (voir [DS00, CZ02, BDS01]) ont porté sur l'extention du théorème de Gibbard et Satterthwaite à des procédures de vote qui sélectionnent non plus une alternative unique, mais un ensemble d'alternatives. Ces procédures ne sont plus des fonctions de choix social, mais sont appelées des *correspondances de choix social*. La question qui se pose dans ce cadre, de même que dans la fusion, est de pouvoir déterminer les préférences des agents sur les issues possibles du vote (c'est-à-dire sur des ensembles d'alternatives) à partir de leurs préférences individuelles sur les alternatives.

Formellement, une *correspondance de choix social* est une fonction $C : L(A)^n \to 2^A$, qui associe à tout profil de préférence $P = (P_1, \dots, P_n)$ un ensemble d'alternatives $C(P)$.

En général, la définition de la non-manipulabilité dans ce cadre fait appel à la notion d'*utilité*. Une *utilité* pour l'agent i est une fonction u qui associe un réel à chaque alternative, de façon à respecter les préférences de i : $u(x) > u(y)$ si et seulement si x est une alternative strictement préférée à y pour i. $u(x)$ représente en quelque sorte l'utilité pour i de l'alternative x.

Pour Duggan et Schwartz [DS00], une manipulation est possible s'il existe un votant i tel que pour toute probabilité λ sur l'ensemble des alternatives $C(P)$, pour toute probabilité λ' sur l'ensemble des alternatives $C(P')$ choisi par la correspondance de choix social lorsque l'agent i ment, il existe une utilité u pour l'agent i sur $C(P) \cup C(P')$ tels que $\Sigma_{x \in C(P')} \lambda'(x) u(x) > \Sigma_{x \in C(P)} \lambda(x) u(x)$. En quelque sorte, l'utilité globale est plus élevée pour l'individu i s'il ment que s'il est sincère. Ces auteurs ont alors montré que le résultat de Gibbard-Satterthwaite pouvait s'étendre dans ce cas. Plus précisément, s'il y a plus de trois alternatives possibles, il n'existe pas de correspondance de choix social non manipulable qui vérifie à la fois les conditions suivantes :

- **(CS)** Pour toute alternative x, il existe un profil P tel que $x \in C(P)$ (Souveraineté Citoyenne -ou surjectivité- de C).
- **(ND)** Il n'existe pas i tel que pour tout profil P et alternative x, $\{x\} = C(P)$ si x est l'alternative préférée de i (Non-Dictature).
- **(RR)** Pour i donné, si toutes les préférences $P_{j \neq i}$ sont les mêmes, avec x classé premier et y deuxième, et que la préférence de i, P_i, est soit la même, soit contient y classé premier et x deuxième, alors $C(P)$ est un singleton (Résistance Résiduelle).

Interprétées dans le cadre de la fusion propositionnelle, on voit immédiatement que les deux premières propriétés souhaitées, **(CS) et (ND)**, sont vérifiées. La troisième, en revanche, n'est pas vraie en général, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 27. *On considère trois agents* K_1, K_2 *et* K_3 *dont les croyances sont représentées respectivement par les ensembles de modèles* $\{001\}$, $\{001\}$ *et* $\{111\}$. *Alors la fusion du profil* $E = \{K_1, K_2, K_3\}$ *basée sur la distance de Hamming* d_H *et l'une des fonctions d'agrégation* Max *ou* $GMax$ *est* $[\Delta_{\top}^{d_H,f}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{011, 101\}$ *(voir tableau 2.4).*

ω	K_1	K_2	K_3	$\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\{K_1,K_2,K_3\})$	$\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2,K_3\})$
000	1	1	3	3	$(3,1,1)$
001	0	0	2	2	$(2,0,0)$
010	2	2	2	2	$(2,2,2)$
011	1	1	1	**1**	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$
100	2	2	2	2	$(2,2,2)$
101	1	1	1	**1**	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$
110	3	3	1	3	$(3,3,1)$
111	2	2	0	2	$(2,2,0)$

TAB. 2.4 – Fusion avec $\Delta_{\mu}^{d_H,f}$.

Dans cet exemple, on peut voir que 001 *est l'alternative préférée pour deux agents, et* 111 *est seconde, alors que* 111 *est préférée pour le troisième agent et* 001 *est seconde. Cependant, le résultat de la fusion n'est pas une alternative unique.*

Ainsi, la condition **(RR)** n'est pas vérifiée en général dans le cadre de la fusion, et Duggan et Schwartz montrent dans l'article [DS00] que cette condition ne peut être relaxée.

Dans [BDS01], S. Barberà, B. Dutta et A. Sen proposent une autre voie pour définir la notion de manipulabilité lorsqu'un ensemble d'alternatives est sélectionné. Ces auteurs utilisent non plus des ordres sur les alternatives, mais sur les ensembles d'alternatives, ce qui rend la définition de la manipulabilité aussi simple que si l'alternative est unique. Pour déterminer cet ordre à partir des préférences sur les alternatives, ils supposent l'existence de fonctions d'utilité sur l'ensemble des alternatives pour chaque agent, qui affectent des utilités différentes à chaque alternative. Ils supposent également fixé un assignement λ sur l'ensemble des alternatives (qui peut être vu comme une distribution de probabilité), tel que pour toute alternative a_i, $\lambda(a_i) > 0$ et $\Sigma_i \lambda(a_i) = 1$. Alors, ils peuvent définir une relation de préférence entre sous-ensembles d'alternatives pour un agent. Ils associent à chaque sous-ensemble un réel correspondant à la somme des utilités des alternatives du sous-ensemble pondérées par l'assignement normalisé. Cette idée est finalement très proche de la proposition de Duggan et Schwartz, qui calculent également l'utilité globale de deux sous-ensembles d'alternatives à l'aide d'une utilité et d'une probabilité. La différence principale entre ces travaux est que pour qu'il y ait manipulation, Duggan et Schwartz imposent que pour toute probabilité, il existe une utilité pour laquelle mentir est plus profitable qu'être sincère. En revanche, Barberà, Dutta et Sen utilisent une seule probabilité sur l'ensemble des alternatives pour définir un ordre entre ensembles d'alternatives, et donc la notion de manipulabilité. Barberà, Dutta et Sen établissent dans [BDS01] un théorème comparable à celui de Duggan et Schwartz. Un intérêt supplémentaire de cette approche est qu'elle permet de définir de nouvelles correspondances de choix social, par exemple en choisissant comme résultat du vote l'union des ensembles d'alternatives préférées. L'approche de Ching et Zhou [CZ02] est très proche de celle que nous venons d'évoquer du point de vue de la définition de la non-manipulabilité. Ils utilisent eux-aussi des préférences sur les ensembles définies grâce à une utilité et un assignement.

2.4 Agrégation de jugements

L'agrégation de jugements individuels sur des propositions interdépendantes est un domaine récent en théorie du choix social. Alors que le domaine principal de la théorie du choix social concerne l'agrégation de préférences, c'est-à-dire l'agrégation de relations de préférences sur un ensemble d'alternatives, l'agrégation de jugement a pour but d'agréger les jugements (oui-non) individuels sur un ensemble de propositions interdépendantes (exprimées en logique propositionnelle).

L'exemple [KS93] suivant illustre parfaitement les difficultés particulières que l'on peut rencontrer en agrégeant des jugements individuels.

Exemple 28. *On considère un tribunal constitué de trois juges, chargé de statuer sur la responsabilité d'un employé accusé de rupture de contrat. Légalement, la cour est habilité à considérer l'accusé responsable légalement (r) si et seulement si un contrat valide était en place (v) et si le comportement de l'employé a eu pour conséquence la rupture de contrat (c), formellement ($r \Leftrightarrow v \wedge c$). On peut représenter les jugements des trois juges dans le tableau 28, dans lequel oui et non indique respectivement que le juge accepte ou rejette la proposition correspondante.*

	contrat valide v	rupture du contrat c	responsable r
juge 1	oui	oui	oui
juge 2	oui	non	non
juge 3	non	oui	non

TAB. 2.5 – Dilemme discursif

On peut vérifier que les jugements de chacun des juges forment un ensemble cohérent, et qu'ils *respectent la condition $r \Leftrightarrow v \wedge c$. Néanmoins, une majorité stricte supporte la proposition v (« le contrat est valide »), une majorité stricte supporte la proposition c (« le comportement de l'employé a eu pour conséquence la rupture de contrat »), et une majorité stricte rejette la proposition r (« l'accusé est responsable légalement de la rupture de contrat »). Cela montre que le vote majoritaire peut engendrer un ensemble incohérent de jugements, même si chaque ensemble individuel de jugement est cohérent.*

Le paradoxe illustré par cet exemple est appelé paradoxe doctrinal (*doctrinal paradox*) ou dilemme discursif (*discursive dilemna*). Ce paradoxe est présent lorsque $n \geq 2$ agents ont des jugements cohérents sur un ensemble de propositions, et que l'agrégation de ces jugements par un vote majoritaire conduit à un ensemble propositionnel incohérent. De nombreux travaux [LP04, Die06] ont cherché à établir les conditions d'apparition de ce paradoxe.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des propositions sur lesquelles des jugements doivent être fait. On note, pour un individu i, ϕ_i l'ensemble des formules que i accepte. En général, dans ce cadre de travail, on suppose que l'ensemble des jugements individuels ϕ_i est cohérent, clôt déductivement, et complet. ϕ_i est clôt déductivement signifie que si ϕ_i entraîne une proposition q de F, alors q est dans ϕ_i (« un individu accepte les conséquences logiques de ce qu'il accepte »). ϕ_i est complet signifie que pour toute proposition p de $\mathcal{F}$, ϕ_i contient p ou $\neg p$. On appelle profil de jugements personnels l'ensemble $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Une fonction d'agrégation de jugements f associe à tout profil de jugements personnels un sous-ensemble ϕ de $\mathcal{F}$ cohérent, clôt déductivement et complet. On peut attendre de la fonction f des conditions minimales :

- *Domaine universel (U) :* f doit accepter n'importe quel profil de jugement comme entrée.
- *Anonanymité (A) :* Pour tout profil de jugement $\{\phi_i\}_1 \leq i \leq n$ et toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, $f(\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}) = f(\{\phi_{\sigma(i)}\}_{1 \leq i \leq n})$.
- *Systématicité (S) :* Il existe une fonction $g : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ telle que pour tout profil de jugement $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ dans le domaine de f,
  $f(\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}) = \{\phi \in \mathcal{F} \mid g(\gamma_1(\phi), \gamma_2(\phi), \ldots, \gamma_n(\phi)) = 1\}$, où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\phi \in \mathcal{F}$, $\gamma_i(\phi) = 1$ si $\phi \in \phi_i$ et $\gamma_i(\phi) = 0$ si $\phi \notin \phi_i$.

La condition **(U)** exige que f considère tout profil de jugement comme admissible. La condition**(A)** exige que f traite de façon équivalente tout ensemble de jugement individuel, quel que soit son rang dans le profil. La condition **(S)** impose que le jugement collectif sur une proposition ne dépende que de l'assignement individuel sur cette proposition, et que le même assignement soit valable pour toutes les propositions.

Alors, List et Pettit [LP04] ont montré un théorème d'impossibilité pour l'agrégation de jugement, comparable au théorème d'Arrow pour l'agrégation de préférences :

Proposition 23. *[LP04] Il n'existe pas de fonction d'agrégation de jugement satisfaisant les conditions* **(U)**, **(A)** *et* **(S)**.

Dans l'article [LP04], List et Pettit compare l'agrégation de jugement et l'agrégation de préférences, dans le but de savoir si le théorème d'Arrow et la proposition 23 sont indépendants. Il apparaît que les deux théorèmes ne sont pas des corollaires l'un de l'autre. De plus, leurs travaux montrent que les moyens d'échapper aux conséquences du théorème d'Arrow et à celles de la proposition 23 sont les mêmes. Pour eux, c'est la démonstration que ces deux théorèmes ne peuvent pas être seulement interprétés comme la preuve de l'impossibilité de deux méthodes d'agrégation particulières, mais qu'ils doivent également permettre de guider la recherche de solutions pour prendre des décisions collectives et de connaître les limites de l'agrégation « automatique ».

Parallèlement à ce travail pour rechercher une méthode « correcte » d'agrégation de jugement (équivalent du théorème d'Arrow), Dietrich [Die06] c'est lui intéressé à un autre aspect important en théorie du choix social, la manipulation. Dietrich n'autorise pas n'importe quel type d'ensemble pour la manipulation. En effet, pour que ϕ'_i soit proposé à la place du véritable ensemble de jugement ϕ_i de l'agent

i, il faut que ϕ_i et ϕ'_i ait la même clôture. La clôture d'un ensemble de formules ϕ est l'ensemble des propositions p de $\mathcal{F}$ telles que $A \models p$ ou $A \models \neg p$, pour tout sous-ensemble A de ϕ. On considère qu'il y a une manipulation si une décision concernant une proposition p est inversée, c'est-à-dire que le profil initial conduit à un ensemble cohérent qui entraîne p, alors que le profil modifié conduit à un ensemble cohérent qui entraîne $\neg p$. Dietrich explique dans [Die06] que la condition de systématicité entraîne la non-manipulabilité des fonction d'agrégation de jugement.

Il donne un autre théorème d'impossibilité, proche de celui de List et Pettit, dans lequel il définit également des propriétés souhaitables pour une fonction d'agrégation de jugement, qui sont les conditions d'universalité **(U)** et de systématicité **(S)**, plus la condition de non constance **(C)**, qui est la suivante :

Non constance (C) : Il existe deux profils de jugements individuels $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $\{\phi'_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sur $\mathcal{F}$ tels que $f(\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}) \neq f(\{\phi'_i\}_{1 \leq i \leq n})$.

Une fonction d'agrégation de jugement est dictatoriale s'il existe d (le dictateur) tel que pour tout profil $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sur $\mathcal{F}$, $f(\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}) = \phi_d$.

Le théorème d'impossibilité s'énonce ainsi :

Proposition 24. *Si $\mathcal{F}$ contient au moins deux propositions (qui ne sont pas équivalentes entre elles, ou équivalentes entre elles à une négation près, ou tautologiques ou contradictoires), alors une fonction d'agrégation de jugements f satisfait* **(U)**, **(S)** *et* **(C)** *si et seulement si elle est dictatoriale.*

Ce domaine de recherche est très récent en théorie du choix social. Quelques pistes pour échapper à ces théorèmes sont, comme pour le théorème d'Arrow, de relaxer certaines hypothèses du théorème. Une autre piste est de travailler seulement sur des prémisses indépendantes, afin d'obtenir un ensemble collectif de jugements cohérent (supprimer les dépendances entre propositions).

Deuxième partie

Manipulation

Chapitre 3

Manipulation des processus de fusion propositionnelle

Introduction

Les opérateurs de fusion propositionnelle ont pour objet de déterminer les croyances/buts d'un groupe d'agents à partir des croyances/buts de chaque membre du groupe exprimés en logique propositionnelle. Bien que croyances et buts soient des notions distinctes, les opérateurs de fusion peuvent être utilisés typiquement pour fusionner des croyances ou des buts. Ainsi, la plupart des propriétés logiques proposées par Revesz [Rev93, Rev97] et également par Konieczny et Pino Pérez [KP98, KP02a] pour caractériser des opérateurs de fusion de croyances rationnels peuvent être utilisées aussi bien bien pour caractériser les opérateurs de fusion de buts rationnels.

Qu'il s'agisse de buts ou de croyances, dans de nombreuses situations, les agents ont des préférences sur les résultats possibles du processus de fusion (c'est-à-dire les bases fusionnées). Lorsque l'on s'intéresse à des buts, un agent est sûrement satisfait lorsque ses buts individuels sont choisis comme buts du groupe. Dans le cas de la fusion de croyances, un agent peut être désireux d'imposer ses croyances au groupe (c'est-à-dire « convaincre » les autres agents), en particulier parce que les décisions du groupe peuvent être prises en fonction des croyances du groupe, et peuvent donc concerner l'agent en question.

Si un des agents a une préférence sur le résultat de la fusion entre tous les résultats possibles (i.e. entre les différentes bases fusionnées possibles), il peut être tenté de modifier le processus de fusion en mentant sur ses vraies croyances, ou buts, si cela conduit à une meilleure base fusionnée de son point de vue. Evidemment, les opérateurs de fusion non manipulables, et donc capables de garantir l'équité entre les agents lors du processus de fusion, sont préférables aux autres.

Considérons à nouveau l'exemple de fusion de buts des trois amis qui veulent programmer leurs vacances (cet exemple sera utilisé comme exemple récurrent dans toute la suite de cette partie).

Exemple 29. *On a vu que les buts du groupe obtenus en utilisant l'opérateur* $\triangle_{\mu}^{d_H,\Sigma}$ *sont soit d'aller à la mer pour une longue période, soit d'aller à la montagne, soit de rester à la maison pour une courte période. Ainsi, le groupe peut choisir d'aller à la mer seulement pour une longue période, ce qui ne fait pas partie des choix de Marie. Cependant, si Marie ment et prétend que, pour une courte période, elle veut aller à la montagne seulement, ou rester à la maison, alors le résultat du processus de fusion sera différent. En effet, dans ce cas, et pour le même opérateur, les buts du groupe seront d'aller à la montagne pour une courte période, ou de rester à la maison, ce qui correspond aux buts de Marie. Dans ce cas, elle a tout intérêt à mentir.*

De façon similaire, le problème de la manipulation doit être considéré dans de nombreuses situations de fusion de croyances, simplement parce que des décisions rationnelles sont typiquement prises en fonction de l'état «réel» du monde. Lorsque les agents ont des croyances contradictoires à ce propos, la fusion des croyances du groupe permet de déterminer l'état «réel» du monde pour le groupe, et manipuler le processus de fusion est un moyen de modifier les croyances résultantes du groupe afin de les rendre plus proches de ses propres croyances. En conséquence, les futures décisions prises par le groupe seront plus conformes aux décisions que l'agent aurait prises seul. Par exemple, supposons que les trois amis soient d'accord pour abandonner l'idée de se rendre en montagne si le temps est mauvais. Si Pierre croit que le temps va être mauvais, alors il est susceptible de tenter de manipuler les croyances du groupe de manière à faire croire au groupe que le temps va être mauvais et ainsi de faire abandonner au groupe la décision d'aller en montagne, ce qui est conforme à la décision qu'il aurait prise seul.

Il existe de nombreux cadres multi-agents dans lesquels les agents échangent des informations et doivent prendre des décisions individuelles basées sur leurs croyances. Dans ce cas, la connaissance est un moyen de tirer avantage de la situation et ainsi les agents ont intérêt à cacher ce qu'ils savent et à apprendre le plus possible des autres : être mieux informés que les autres permet de prendre de meilleures décisions *individuelles* qu'eux. Par exemple, Shoham et Tennenholtz [ST05] ont étudié le calcul de fonction non coopératif : chaque agent communique de l'information (honnêtement ou non) qui est ensuite utilisée pour calculer la valeur d'une fonction (connue de tous) qui est ensuite retournée à chaque agent ; le but de chaque agent est d'obtenir la véritable valeur de la fonction, et si possible d'être le seul à l'obtenir. Dans ce travail, l'information est considérée à un niveau abstrait. En supposant que les informations sont des croyances et que la fonction est un opérateur de fusion, chaque agent voudrait connaître la base fusionnée et si possible être le seul à la connaître. En revanche, dans d'autres cas, lorsque les décisions sont prises collectivement et sont basées sur les croyances du groupe, les agents sont sûrement satisfaits si les croyances du groupe sont proches de leurs propres croyances. Notre travail s'est intéressé à ce type de cas, qui est présent dans de nombreuses situations de la vie courante. On peut illustrer de tels scénarios par un nouvel exemple :

Exemple 30. *Un poste est disponible à l'université. La commission chargée du recrutement doit déterminer le bon profil pour ce poste. Quatre critères sont considérés : le niveau de la recherche, la qualité des enseignements, les qualités humaines, et les anciens postes du candidat. En supposant qu'un des membres de la commission pense que les critères importants sont le niveau de la recherche et les qualités humaines et qu'il est mieux de recruter un candidat qui a eu un bon poste dans le passé, il sera plus heureux du recrutement si le groupe partage ses convictions à propos du bon profil. Il peut être tenté de manipuler le processus de fusion pour atteindre cette situation.*

Déterminer si un opérateur de fusion de croyances/buts est manipulable, et si oui, sous quelles restrictions on peut éviter toute manipulation est donc une importante question. En effet, les opérateurs de fusion ont pour fonction de caractériser les croyances/buts du groupe d'agents à partir des croyances/buts de chaque agent du groupe ; évidemment cet objectif ne peut pas être atteint si les agents ne fournissent pas leurs «véritables» croyances/buts, ce qui peut être facilement le cas lorsque l'opérateur de fusion utilisé est manipulable (les agents peuvent être tentés de manipuler le processus dans un tel cas).

Comme les opérateurs de fusion sont typiquement utilisés dans des systèmes artificiels, on peut se demander si le problème de la manipulation est pertinent dans ce contexte. La réponse dépend principalement du degré de sophistication des agents considérés. Ainsi, dans le contexte d'une base de données distribuée, les agents (c'est-à-dire les bases de données) n'ont aucune préférence ni évaluation de la base fusionnée et le problème de la manipulation n'a pas de sens. En revanche, si les agents ont des buts et des capacités de raisonnement, on ne peut pas exclure la possibilité que les agents soient capables de déceler des faiblesses au sein du processus de fusion et de les exploiter à leur profit. Lorsque des agents artificiels avec de grandes capacités de raisonnement sont considérés, le problème de la manipulation peut même être plus préoccupant que dans le cas d'agents humains, à cause des capacités de calcul supérieures des agents artificiels.

Le problème de la manipulabilité est étudié depuis des années en Théorie du Choix Social. Un objectif important est de déterminer les procédures d'agrégation de préférences (et en particulier les méthodes de vote) qui sont non manipulables. Un résultat célèbre, le théorème de Gibbard-Satterthwaite, énonce que cet objectif ne peut être atteint : sous certaines hypothèses raisonnables, il n'existe pas de procédure de vote non manipulable [Gib73, Sat75], voir le paragraphe 2. La seule solution pour échapper à ce résultat est de relâcher certaines hypothèses. Nous reviendrons plus en détail aux liens entre la fusion de croyances et l'agrégation de préférence section 4.

La première contribution de cette thèse est de proposer une définition de la manipulation dans le cadre de la fusion, et d'étudier la manipulabilité des opérateurs de fusion propositionnelle de la littérature, à la fois dans le cas général et sous certaines restrictions. Nous nous sommes focalisés sur les opérateurs dans le cadre propositionnel parce que ce cadre est suffisamment expressif pour de nombreuses applications en intelligence artificielle et aussi parce qu'il semble naturel de s'intéresser en premier au cadre le plus simple possible, pour ensuite pouvoir généraliser l'étude à des langages plus expressifs. Ce travail a donné lieu aux publications [EKM04, EKMre].

3.1 Définition de la manipulabilité

Le problème de la manipulation dans le cadre de la fusion peut se poser ainsi : un des agents peut-il, en supposant qu'il connaisse les croyances/buts de chaque agent et la méthode de fusion, modifier le résultat de la fusion en mentant sur ses vraies croyances/buts ?

Si l'on peut répondre positivement à cette question, alors l'opérateur de fusion utilisé est manipulable (un agent peut avoir intérêt à mentir). Ainsi, un opérateur de fusion est manipulable si l'on peut trouver un profil $E = \{K_1, \dots, K_n\}$ représentant les bases de croyances des autres agents, une contrainte d'intégrité μ, et deux bases K et K' telles que le résultat de la fusion de E et K' est « meilleure » pour l'agent que le résultat de la fusion de E avec sa base de croyance véritable K (appelée la base initiale).

Définir formellement ce que signifie « meilleur » passe dans notre thèse par l'introduction d'un indice de satisfaction :

Définition 32 (indice de satisfaction)**.**
Un *indice de satisfaction* i est une application de $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ dans $I\!R$.

On peut alors définir la notion de manipulabilité pour un indice de satisfaction :

Définition 33 (manipulabilité)**.**
Soit i un *indice de satisfaction*. Un opérateur de fusion Δ est *manipulable* pour i si et seulement si il existe une contrainte d'intégrité μ, un profil $E = \{K_1, \dots, K_n\}$, une base K et une base K' telle que :

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) > i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})).$$

En conséquence : un profil E est *manipulable par une base* K pour un indice i étant donné un opérateur de fusion Δ et une contrainte d'intégrité μ si et seulement s'il existe une base K' telle que :

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) > i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})).$$

Il y a évidemment de nombreuses façons de définir la satisfaction d'un agent étant donné le résultat d'une fusion, c'est-à-dire une base. Bien que de nombreuses définitions *ad hoc* puissent être considérées, les trois indices suivants semblent être pertinents, lorsqu'aucune information supplémentaire n'est disponible.

Les deux premiers indices sont drastiques : ils prennent la valeur 1 si l'agent est complétement satisfait, 0 s'il ne l'est pas du tout.

Définition 34 (indice drastique faible)**.** On définit l'*indice drastique faible* noté i_{d_w} par :

$$i_{d_w}(K, K_\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } K \wedge K_\Delta \text{ est cohérent,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cet indice prend la valeur 1 si le résultat de la fusion (la base fusionnée, notée K_Δ dans la définition) est cohérent avec la base de l'agent (K), et 0 sinon. Cela signifie que pour cet indice, l'agent est entièrement satisfait si et seulement si ses croyances/buts sont cohérents avec la base fusionnée.

Exemple 31. *Soit un agent dont les croyances sont $a \wedge b$. Il peut sembler raisonnable de penser qu'il est plus satisfait par une base fusionnée équivalente à a que par une base fusionnée équivalente à $\neg b$, parce la première est compatible avec ses croyances (elles ont un modèle en commun), et pas la seconde (elles n'ont aucun modèle en commun). Pour l'indice drastique faible, l'agent est entièrement satisfait par la première base et pas du tout par la seconde :*
- $i_{d_w}(a \wedge b, a) = 1$,
- $i_{d_w}(a \wedge b, \neg b) = 0$.

Définition 35 (indice drastique fort)**.** On définit l'*indice drastique fort* noté i_{d_s} par :

$$i_{d_s}(K, K_\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } K_\Delta \models K, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cet indice prend la valeur 1 si la base de l'agent est une conséquence logique du résultat de la fusion, et 0 sinon. Pour être totalement satisfait, un agent doit imposer ses croyances/buts à l'ensemble du groupe.

Exemple 32. *Si l'on considère de nouveau l'exemple précédent ($a \wedge b$, a et $\neg b$), on peut penser qu'il n'y a pas de raison d'être plus satisfait par la première base fusionnée que par la seconde, puisqu'il y a encore une chance dans le premier cas que la décision prise par le groupe repose sur un contre-modèle des croyances de l'agent, et soit donc différente de celle qu'il aurait prise seul. On a pour l'indice drastique fort dans ce cas :*
- $i_{d_s}(a \wedge b, a) = 0$,
- $i_{d_s}(a \wedge b, \neg b) = 0$.

L'agent n'est pas plus satisfait par la première base que par la seconde.

En revanche, un agent dont les croyances sont a sera à coup sûr plus satisfait par une base fusionnée équivalente à $a \wedge b$ (qui constitue un renforcement de ses croyances) que par une base fusionnée équivalente à $a \vee b$. Pour l'indice drastique fort, l'agent est entièrement satisfait par la première base et pas du tout par la seconde :
- $i_{d_s}(a, a \wedge b) = 1$,
- $i_{d_s}(a, a \vee b) = 0$.

Il est intéressant de constater que l'indice drastique faible ne fait aucune distinction entre ces deux bases, pour cet indice en effet l'agent est entièrement satisfait dans les deux cas :
- $i_{d_w}(a, a \wedge b) = 1$,
- $i_{d_w}(a, a \vee b) = 1$.

Cet exemple illustre le fait qu'il est nécessaire dans certains cas de pouvoir mesurer la satisfaction d'un agent plus finement que par les indices drastiques, qui ne sont pas aptes à distinguer certaines nuances (ils ne prennent que deux valeurs). Ainsi, le dernier indice proposé n'est pas booléen, conduisant à une notion de satisfaction plus graduelle. Plus la base fusionnée est compatible avec la base de l'agent, plus l'agent est satisfait. Le degré de compatibilité de K avec K_Δ est la proportion de modèles de K dans K_Δ :

Définition 36 (indice probabiliste)**.** On définit l'*indice probabiliste* noté i_p par :

$$i_p(K, K_\Delta) = \frac{\#([K] \cap [K_\Delta])}{\#([K_\Delta])}.$$

Quand $\#([K_\Delta]) = 0$, on pose $i_p(K, K_\Delta) = 0$.

$i_p(K, K_\Delta)$ est la probabilité d'obtenir un modèle de K à partir d'un tirage uniforme d'un modèle de K_Δ. Cet indice est minimal et vaut 0 quand la base fusionnée ne contient aucun modèle de K, est maximal et vaut 1 quand tous les modèles de la base fusionnée sont des modèles de K.

Exemple 33. *Considérons les exemples précédents pour illustrer le comportement de l'indice probabiliste :*

$i_{d_w}(a \wedge b, a) = 1, \quad i_{d_s}(a \wedge b, a) = 0, \quad i_p(a \wedge b, a) = \frac{1}{2}.$
$i_{d_w}(a \wedge b, \neg b) = 0, \quad i_{d_s}(a \wedge b, \neg b) = 0, \quad i_p(a \wedge b, \neg b) = 0.$
$i_{d_w}(a, a \wedge b) = 1, \quad i_{d_s}(a, a \wedge b) = 1, \quad i_p(a, a \wedge b) = 1.$
$i_{d_w}(a, a \vee b) = 1, \quad i_{d_s}(a, a \vee b) = 0, \quad i_p(a, a \vee b) = \frac{2}{3}.$

On peut se figurer sur cet exemple que ces trois indices ne sont pas indépendants. C'est effectivement le cas :

Proposition 25.

1. *Si un opérateur de fusion est manipulable pour i_{d_w}, alors il est manipulable pour i_p.*
2. *Soit Δ un opérateur de fusion qui génère uniquement des bases cohérentes* [3]. *Si Δ est manipulable pour i_{d_s}, il est manipulable pour i_p.*

Preuve:

1. Supposons que Δ_μ est manipulable pour i_{d_w}. Alors il existe un profil E, une base K, une base K' et une contrainte d'intégrité μ telles que :

   $$i_{d_w}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})) < i_{d_w}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\}))$$

   Comme i_{d_w} ne prend que deux valeurs, 0 ou 1, on a :

   (a) $i_{d_w}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})) = 0$, donc $\Delta_\mu(E \sqcup \{K\}) \wedge K$ n'est pas cohérent, et

   (b) $i_{d_w}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) = 1$, donc $\Delta_\mu(E \sqcup \{K'\}) \wedge K$ est cohérent.

   (1) implique que $\frac{\#([K] \cap [\Delta_\mu(E \sqcup \{K\})])}{\#([\Delta_\mu(E \sqcup \{K\})])} = 0$.

   (2) implique que $\frac{\#([K] \cap [\Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})])}{\#([\Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})])} > 0$.

   Ainsi,

   $$i_p(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})) < i_p(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\}))$$

   et Δ_μ est manipulable pour i_p.

[3] i.e. $\Delta_\mu(E)$ est cohérent pour tout E.

2. Supposons que Δ_μ est manipulable pour i_{d_s}. Alors il existe un profil E, une base K, une base K' et une contrainte d'intégrité μ tels que :

$$i_{d_s}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})) < i_{d_s}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\}))$$

Comme i_{d_s} ne prend que les valeurs 0 et 1, on obtient :

(a) $i_{d_s}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})) = 0$ et $\Delta_\mu(E \sqcup \{K\}) \not\models K$, et

(b) $i_{d_s}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})) = 1$ et $\Delta_\mu(E \sqcup \{K'\}) \models K$.

(1) implique que $\frac{\#([K]\cap[\Delta_\mu(E\sqcup\{K\})])}{\#([\Delta_\mu(E\sqcup\{K\})])} \neq 1$. (2) implique que $\frac{\#([K]\cap[\Delta_\mu(E\sqcup\{K'\})])}{\#([\Delta_\mu(E\sqcup\{K'\})])} = 1$ si $\Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})$ est cohérent (ce qui est le cas pour l'opérateur considéré).
Ainsi,

$$i_p(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})) < i_p(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\}))$$

et Δ_μ est manipulable pour i_p.

$\square$

En revanche, on peut facilement prouver que la manipulabilité pour les indices drastiques i_{d_w} et i_{d_s} sont des notions logiquement indépendantes dans le cas général (un opérateur peut être manipulable pour l'un et pas pour l'autre, il peut l'être pour les deux ou pour aucun).

Pour illustrer les notions introduites, nous revenons à l'exemple récurrent, et donnons des arguments formels expliquant comment Marie peut manipuler le processus de fusion :

Exemple 34. *On considère trois bases K_1, K_2, K_3 telles que $[K_1] = \{000, 001, 111\}$ (les souhaits de Marie), $[K_2] = \{110, 001\}$ (les souhaits de Alain) et $[K_3] = \{110, 000\}$ (les souhaits de Pierre). Il n'y a pas de contrainte ($\mu \equiv \top$).*

$$[\Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{000, 001, 110\} \textit{ et } i_{d_s}(K_1, \Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})) = 0.$$

Si Marie fournit la base K_1', avec $[K_1'] = \{000, 001\}$ à la place de K_1, alors $[\Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2, K_3\})] = \{000, 001\}$ et $i_{d_s}(K_1, \Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2, K_3\})) = 1$. Voir le tableau 3.1 pour les calculs.

ω	K_1	K_1'	K_2	K_3	$\Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})$	$\Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2, K_3\})$
000	0	0	1	0	**1**	**1**
001	0	0	0	1	**1**	**1**
010	1	1	1	1	3	3
011	1	1	1	2	4	4
100	1	1	1	1	3	3
101	1	1	1	2	4	4
110	1	2	0	0	**1**	2
111	0	2	1	1	2	4

TAB. 3.1 – $\Delta^{d_H,\Sigma}$ est manipulable pour i_{d_s}.

3.2 Résultats de manipulabilité

Le problème de la manipulabilité est multi-dimensionnel, car de nombreux paramètres interviennent : l'indice considéré, le nombre de bases fusionnées, la présence ou l'absence de contraintes d'intégrité...

Dans le cas général, les familles d'opérateurs de fusion qui sélectionnent des modèles ou des formules sont manipulables pour les trois indices définis. Cela signifie qu'il existe des opérateurs de chaque famille qui sont manipulables.

Cependant, en considérant certaines restrictions par rapport au cas général, on obtient des résultats de non-manipulabilité. En étudiant les différentes restrictions possibles de façon systématique, on peut obtenir les limites entre manipulation et non-manipulation pour les opérateurs de fusion propositionnelle de la littérature.

Quelles restrictions considérer pour la fusion ?

– Une première restriction concerne le nombre de bases participant à la fusion. La question est la suivante : le nombre de bases impliquées dans la fusion a-t-il une influence sur la manipulabilité d'un opérateur ? Nous verrons qu'en général, on peut répondre positivement à cette question.
  Plus précisément, un palier intéressant est obtenu pour deux agents : dans certaines situations, aucune manipulation n'est possible pour deux bases, alors qu'avec plus de bases, elle devient possible. Comme la base tautologique joue typiquement un rôle « d'élément neutre » pour tous les opérateurs considérés, ce qui signifie que pour tout E, μ, on a $\triangle_{\mu}(E) \equiv \triangle_{\mu}(E \sqcup \{\top\})$, si un opérateur est manipulable pour des profils avec n bases, il est manipulable pour des profils avec $m > n$ bases.
– Un autre paramètre est la complétude des bases de croyances/buts de l'agent cherchant à manipuler. Dans certains cas, ce type de croyances/buts interdit toute manipulation.
– Un troisième paramètre important est la présence de contraintes d'intégrité. En effet, la présence de contraintes d'intégrité non triviales ($\mu \not\equiv \top$) peut permettre une manipulation, alors qu'elle est impossible sans contrainte d'intégrité, et le contraire est également vrai.
– Une restriction peut également être faite sur les stratégies acceptables. Dans le cas général, l'agent manipulateur est libre de présenter n'importe quelle base, même si elle est assez éloignée de ses croyances/buts réels. Cependant, il existe de nombreuses situations où les agents participant à la fusion ont des connaissances partielles des croyances/buts des autres agents. Par exemple, dans un cadre de résolution coopérative de problèmes, il peut être décidé que n'importe quel agent pouvant répondre à une requête en un temps limité doit la communiquer aux autres agents. A l'inverse, le protocole de communication peut les obliger à informer les autres agents qu'ils sont définitivement incapables de répondre à la requête. Ce genre d'échange d'informations permet à tous les agents d'avoir une connaissance partielle des modèles ou des contre-modèles des véritables bases de croyances/buts des autres agents. Evidemment, si cette connaissance contredit la base présentée, l'agent manipulateur risque d'être démasqué. Dans la suite, nous étudierons deux restrictions sur les stratégies possibles (et les notions correspondantes de manipulabilité) : la manipulation par érosion (resp. dilatation) qui permet de reporter seulement une base K' logiquement plus forte (resp. plus faible) que la base réelle K. La manipulation par érosion (resp. dilatation) est sûre pour l'agent manipulateur quand tous les autres agents ont des connaissances sur une partie des contre-modèles (resp. modèles) des véritables croyances/buts. On peut voir la manipulation par érosion comme un mensonge par omission (on ne présente qu'une partie de ses modèles), et la manipulation par dilatation comme un mensonge par spécialisation (la véritable base est une spécialisation de la base présentée).

3.2.1 Opérateurs à sélection de modèles

Le premier point est qu'il n'y a pas de résultat général de non-manipulabilité (i.e. s'appliquant à toute fonction d'agrégation et toute distance) : nous n'avons pas obtenu dans le cadre de la fusion de résultat d'impossibilité comparable au théorème de Gibbard et Sattherwaite pour cette famille d'opérateurs.

Cependant, nous avons obtenu certains résultats de non-manipulabilité assez généraux. Les trois propositions suivantes présentent ces résultats de non-manipulabilité, du plus général (pour toute fonction d'agrégation quand la distance drastique d_D est considérée), aux plus spécifiques (pour toute distance d lorsque la fonction d'agrégation est Σ) :

Proposition 26. *Soit f une fonction d'agrégation quelconque. $\Delta_\mu^{d_D,f}$ n'est manipulable pour aucun des indices i_p, i_{dw} et i_{ds}.*

Preuve:
la preuve est organisée en trois parties : par l'absurde, on montre que l'utilisation de la distance drastique entraîne que la distance minimale entre un modèle de μ et $E \sqcup \{K\}$ est égale à la distance minimale entre un modèle de μ et $E \sqcup \{K'\}$. Ensuite, il est facile de prouver que le nombre de modèles de K est plus élevé dans $E \sqcup \{K\}$ que dans $E \sqcup \{K'\}$. Finalement, on montre que le nombre de contre-modèles de K' est plus élevé dans $E \sqcup \{K'\}$ que dans $E \sqcup \{K\}$, ce qui entraîne une contradiction.

Grâce à la proposition 25, on sait que si un opérateur $\Delta_\mu^{d_D,f}$ est non manipulable pour i_p, il est aussi non manipulable pour i_{d_w} et i_{d_s}. Ainsi, si l'on prouve la non-manipulabilité de $\Delta_\mu^{d_D,f}$ pour i_p, on prouve également la non-manipulabilité pour les deux autres indices. Nous allons prouver cela avec un raisonnement par l'absurde : supposons qu'il existe un opérateur de fusion $\Delta_\mu^{d_D,f}$, où d_D est la distance drastique et f est une fonction d'agrégation, qui est manipulable pour i_p. Alors, il existe une contrainte d'intégrité μ, un profil E, et deux bases K et K' tels que $i_p(K, \Delta_\mu^{d_D,f}(\{K\} \sqcup E)) < i_p(K, \Delta_\mu^{d_D,f}(\{K'\} \sqcup E))$, ce qui est équivalent à

$$\frac{\#([K] \cap [E \triangle_\mu^{d_D,f} K])}{\#([E \triangle_\mu^{d_D,f} K])} < \frac{\#([K] \cap [E \triangle_\mu^{d_D,f} K'])}{\#([E \triangle_\mu^{d_D,f} K'])}$$

où $E \triangle_\mu^{d_D,f} K$ est une notation plus légère pour $\Delta_\mu^{d_D,f}(\{K\} \sqcup E))$. On note aussi $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\}) = min(\{d_D(\omega, E \sqcup \{K\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq)$.

On va à présent montrer que $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\})$:

– Tout d'abord, on peut remarquer que $i_p(K, E \triangle_\mu^{d_D,f} K) \neq 1$: en effet, si $i_p(K, E \triangle_\mu^{d_D,f} K) = 1$, alors l'indice de satisfaction prend sa valeur maximale, il est donc impossible de l'augmenter. Comme $i_p(K, E \triangle_\mu^{d_D,f} K) < 1$, on a $\#([K] \cap [E \triangle_\mu^{d_D,f} K]) < \#([E \triangle_\mu^{d_D,f} K])$, donc il y a au moins un modèle de $E \triangle_\mu^{d_D,f} K$ qui n'appartient pas à K :

$$\exists \omega_1 \models (\neg K) \wedge \mu, d_D(\omega_1, E \sqcup \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\}).$$

Comme $\omega_1 \models (\neg K) \wedge \mu$, on a $d_D(\omega_1, K) = 1$ et cette distance est maximale (puisque d_D est la distance drastique). On a immédiatement que $d_D(\omega_1, K) \geq d_D(\omega_1, K')$. Ainsi $d_D(\omega_1, E \sqcup \{K\}) \geq d_D(\omega_1, E \sqcup \{K'\})$ (car la fonction d'agrégation f est croissante).
Comme $d_D(\omega_1, E \sqcup \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\})$, on obtient $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\}) \geq d_D(\omega_1, E \sqcup \{K'\})$. De plus $d_D(\omega_1, E \sqcup \{K'\}) \geq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\})$ par définition du min et comme $\omega_1 \models \mu$, on a

$$d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\}) \geq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\}) \ \ (*).$$

– On peut aussi remarquer que $i_p(K, E \triangle_\mu^{d_D,f} K') \neq 0$: en effet si $i_p(K, E \triangle_\mu^{d_D,f} K') = 0$, alors $i_p(K, E \triangle_\mu^{d_D,f} K')$ est minimal, donc la valeur prise par i_p n'a pas augmenté, ce qui contredit l'hypothèse de manipulation.
Si $i_p(K, E \triangle_\mu^{d_D,f} K') \neq 0$, alors on peut trouver au moins un modèle de $K \wedge \mu$ dans $E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$: $\exists \omega_1 \models K \wedge \mu, d_D(\omega_1, E \sqcup \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\})$. Puisque $\omega_1 \models K$, on a $d_D(\omega_1, K) = 0$ et comme cette distance est minimale, on a $d_D(\omega_1, E \sqcup \{K\}) \leq d_D(\omega_1, E \sqcup \{K'\})$, et donc

$d_D(\omega_1, E \sqcup \{K\}) \leq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\})$, parce que $d_D(\omega_1, E \sqcup \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\})$. De plus, $d_D(\omega_1, E \sqcup \{K\}) \geq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\})$ par définition du min et puisque $\omega_1 \models \mu$. On a donc :

$$d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\}) \leq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\}) \ (**).$$

A partir des inéquations (*) et (**), on obtient :

$$d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\}). \tag{3.1}$$

On va montrer qu'on peut seulement augmenter le nombre de contre-modèles de K dans $E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$, et diminuer le nombre de modèles de K dans $E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$.

– Soit ω un contre-modèle de K qui est un modèle de $E \triangle_\mu^{d_D,f} K$: $\omega \models (\neg K) \wedge (E \triangle_\mu^{d_D,f} K)$.
  Comme $\omega \models \neg K$, on a $d_D(\omega, K) = 1$ et cette distance est maximale. Ainsi $d_D(\omega, K) \geq d_D(\omega, K')$. Alors :
  $$d_D(\omega, E \sqcup \{K\}) \geq d_D(\omega, E \sqcup \{K'\}) \tag{3.2}$$
  parce que la fonction d'agrégation f est croissante.
  Puisque $\omega \models E \triangle_\mu^{d_D,f} K$, on a $d_D(\omega, E \sqcup \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\})$. Avec (3.2), on a $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\}) \geq d_D(\omega, E \sqcup \{K'\})$.
  Comme $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\})$ avec (3.1), on obtient : $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\}) \geq d_D(\omega, E \sqcup \{K'\})$.
  Par définition du min et comme $\omega \models \mu$ (car $\omega \models E \triangle_\mu^{d_D,f} K$), on déduit que ω est un modèle de $E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$.
  On peut conclure que tout modèle de $E \triangle_\mu^{d_D,f} K$ qui n'est pas un modèle de K est un modèle de $E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$. Ainsi : $[\neg K] \cap [E \triangle_\mu^{d_D,f} K] \subseteq [\neg K] \cap [E \triangle_\mu^{d_D,f} K']$.
– Finalement, soit ω un modèle de K qui est aussi un modèle de $E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$:
  $\omega \models K \wedge (E \triangle_\mu^{d_D,f} K')$.
  Comme $\omega \models K$, on a $d_D(\omega, K) = 0$ et cette distance est minimale. Alors $d_D(\omega, K) \leq d_D(\omega, K')$, et :
  $$d_D(\omega, E \sqcup \{K\}) \leq d_D(\omega, E \sqcup \{K'\}) \tag{3.3}$$
  car la fonction d'agrégation est croissante.
  Comme $\omega \models E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$, on a $d_D(\omega, E \sqcup \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\})$. Avec (3.3), on a $d_D(\omega, E \sqcup \{K\} \leq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\})$.
  Puisque $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K'\})$ avec (3.1), on obtient $d_D(\omega, E \sqcup \{K\} \leq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d_D,f} \{K\})$.
  Par définition du min et comme $\omega \models \mu$ (parce que $\omega \models E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$), on déduit que ω est un modèle de $E \triangle_\mu^{d_D,f} K$.
  On peut conclure que tout modèle de $E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$ qui est un modèle de K est aussi un modèle de $E \triangle_\mu^{d_D,f} K$. Il s'en suit que $[K] \cap [E \triangle_\mu^{d_D,f} K'] \subseteq [K] \cap [E \triangle_\mu^{d_D,f} K]$.

Comme on peut uniquement augmenter le nombre de contre-modèles de K dans $E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$ et diminuer le nombre de modèles de K dans $E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$, la proportion de modèles de K dans $E \triangle_\mu^{d_D,f} K'$ est inférieure à celle dans $E \triangle_\mu^{d_D,f} K$. Cela contredit l'hypothèse et montre que $\Delta_\mu^{d_D,f}$ est non manipulable pour i_p. On en déduit la non-manipulabilité pour les trois indices.

□

Proposition 27. *Soit d une distance quelconque. En supposant que deux bases seulement sont fusionnées, $\Delta_\top^{d,\Sigma}$ n'est pas manipulable pour i_{dw} ni pour i_{ds}.*

Preuve:
dans cette preuve, on montre d'abord que la fusion de deux bases est cohérente avec chacune de ces bases. Alors, la proposition suit immédiatement.

La non-manipulabilité pour ces deux indices drastiques est une conséquence directe de la propriété suivante :

Lemme 28. *Si $E = \{K_1, K_2\}$, alors $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(E) \wedge K_1$ et $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(E) \wedge K_2$ sont cohérents.*

Preuve:
on montre que $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(E) \wedge K_1$ est cohérent (le cas restant est identique par symétrie).

Raisonnement par l'absurde. On suppose que pour deux bases K_1 et K_2, $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1, K_2\})$ n'est pas cohérent avec K_1. On peut déduire que :

$$\exists \omega' \models \neg K_1, \forall \omega \models K_1, d(\omega, K_1 \triangle^{d,\Sigma} K_2) > d(\omega', K_1 \triangle^{d,\Sigma} K_2),$$

où $K_1 \triangle^{d,\Sigma} K_2$ est une notation plus légère de $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1, K_2\})$.

Comme $\forall \omega \models K_1, d(\omega, K_1) = 0$, on a $\exists \omega' \models \neg K_1, \forall \omega \models K_1, d(\omega, K_2) > d(\omega', K_1) + d(\omega', K_2)$.

En particulier, si l'on considère $\omega_1 \models K_1$ tel que $d(\omega', \omega_1) = d(\omega', K_1)$ (un tel ω_1 existe par définition de $d(\omega', K_1)$), on a : $d(\omega_1, K_2) > d(\omega', \omega_1) + d(\omega', K_2)$.

De même, en considérant $\omega_2 \models K_2$ tel que $d(\omega', \omega_2) = d(\omega', K_2)$, on obtient :

$$d(\omega_1, K_2) > d(\omega', \omega_1) + d(\omega', \omega_2) \;\; (*).$$

Par définition de d, on a $\forall \omega \models K_2, d(\omega_1, K_2) \leq d(\omega_1, \omega)$; en particulier, $d(\omega_1, K_2) \leq d(\omega_1, \omega_2)$.

Par transitivité de $\leq$, et avec (*), on obtient $d(\omega_1, \omega_2) > d(\omega', \omega_1) + d(\omega', \omega_2)$. Ce qui contredit l'inégalité triangulaire.

□

On peut à présent démontrer la proposition principale :

Indice drastique faible. Pour deux bases K_1 et K_2, on a toujours $i_{d_w}(K_1, K_1 \triangle K_2) = 1$, car $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1$ est cohérent (lemme 28), donc aucune manipulation n'est possible (i_{d_w} est maximal).

Indice drastique fort. Si $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}$ est manipulable, alors on peut trouver K_1' tel que :

$$i_{d_s}(K_1, \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1, K_2\}) < i_{d_s}(K_1, \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1', K_2\}).$$

Pour l'indice drastique fort, cela signifie exactement que :

$$i_{d_s}(K_1, \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1\} \sqcup \{K_2\}) = 0$$

et

$$i_{d_s}(K_1, \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1'\} \sqcup \{K_2\}) = 1.$$

Alors on a :

$$\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1, K_2\}) \not\models K_1 \tag{3.4}$$

et :

$$\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1', K_2\}) \models K_1. \tag{3.5}$$

Comme $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1', K_2\}) \wedge K_2$ est cohérent (lemme 28), on peut trouver $\omega_2 \models K_2$ tel que $\omega_2 \models \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1', K_2\})$. Avec (3.5), on peut conclure que $\omega_2 \models K_1$ aussi.

Ainsi on a $\omega_2 \models K_1 \wedge K_2$, et on peut conclure que $d_{min}(\{K_1, K_2\}) = 0$. Comme conséquence, pour tout modèle ω de $\Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1, K_2\})$, on a $d(\omega, \{K_1, K_2\}) = 0$. Alors $\forall \omega \models \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1, K_2\})$,

$d(\omega, K_1) = d(\omega, K_2) = 0$, et $\forall \omega \models \Delta_{\top}^{d,\Sigma}(\{K_1, K_2\}), \omega \models K_1 \wedge K_2$. Cela contredit (3.4), donc aucune manipulation n'est possible.

□

Proposition 29.

Pour une distance d quelconque, $\Delta_{\mu}^{d,\Sigma}$ n'est manipulable pour aucun des indices i_p, i_{dw} et i_{ds} lorsque la base initiale K est complète.

Preuve:

Indices drastiques. La propriété est une conséquence directe de la proposition 44, qui montre que si $\Delta_{\mu}^{d,\Sigma}$ est manipulable pour i_{d_w} et i_{d_s} par une base K, alors il est manipulable par érosion. Mais une manipulation par érosion est impossible lorsque K est complète, puisqu'alors la base ne compte qu'un unique modèle.

Indice probabiliste. *Raisonnement par l'absurde* : supposons qu'il existe un opérateur $\Delta_{\mu}^{d,\Sigma}$, où d est une distance quelconque, qui est manipulable pour i_p étant donnée une base complète K_{ω_1}. Alors on peut trouver une contrainte d'intégrité μ, un profil E, et une base K' tels que :

$$i_p(K_{\omega_1}, \Delta_{\mu}^{d,\Sigma}(\{\omega_1\} \sqcup E)) < i_p(K_{\omega_1}, \Delta_{\mu}^{d,\Sigma}(\{K'\} \sqcup E)).$$

Si $i_p(K_{\omega_1}, \Delta_{\mu}^{d,\Sigma}(\{\omega_1\} \sqcup E)) = 0$, alors on a également $i_{d_w}(K_{\omega_1}, \Delta_{\mu}^{d,\Sigma}(\{\omega_1\} \sqcup E)) = 0$. Dans ce cas, une manipulation pour i_p implique une manipulation pour i_{d_w}, et on a vu qu'aucune manipulation n'est possible pour i_{d_w}. En conséquence, on peut supposer que $i_p(K_{\omega_1}, \Delta_{\mu}^{d,\Sigma}(\{\omega_1\} \sqcup E)) \neq 0$. Cela est équivalent à :

$$\frac{\#(\{\omega_1\} \cap [E \triangle_{\mu}^{\Sigma} \{\omega_1\}])}{\#([E \triangle_{\mu}^{\Sigma} \{\omega_1\}])} \neq 0$$

(où $E \triangle_{\mu}^{\Sigma} \{\omega_1\}$ est une notation plus légère de $\Delta_{\mu}^{d,\Sigma}(\{\omega_1\} \sqcup E)$).
Cette constatation nous permet de conclure que ω_1 est un modèle de $E \triangle_{\mu}^{\Sigma} \{\omega_1\}$. Pour augmenter $i_p(\{\omega_1\}, \Delta_{\mu}^{d,\Sigma}(K' \sqcup E))$, il faut donc réduire le nombre de modèles de $E \triangle_{\mu}^{\Sigma} K'$ par rapport à $E \triangle_{\mu}^{\Sigma} \{\omega_1\}$, sans retirer ω_1 de $[E \triangle_{\mu}^{\Sigma} K']$. On doit donc trouver $\omega_2 \neq \omega_1$ tel que :

$$\omega_2 \models E \triangle_{\mu}^{\Sigma} \{\omega_1\} \text{ et } \omega_2 \not\models E \triangle_{\mu}^{\Sigma} K'.$$

Alors, $\omega_2 \models \mu$ et on a

$$d(\omega_2, E \sqcup \{\omega_1\}) = d(\omega_1, E \sqcup \{\omega_1\})$$

et

$$d(\omega_2, E \sqcup \{K'\}) > d(\omega_1, E \sqcup \{K'\})$$

(car ω_1 est un modèle de $E \triangle_{\mu}^{\Sigma} \{\omega_1\}$ et de $E \triangle_{\mu}^{\Sigma} K'$). Avec la fonction d'agrégation Σ, on obtient :

$$d(\omega_2, \omega_1) + d(\omega_2, E) = d(\omega_1, E)$$

et

$$d(\omega_2, K') + d(\omega_2, E) > d(\omega_1, K') + d(\omega_1, E).$$

En remplaçant $d(\omega_1, E)$ par $d(\omega_2, \omega_1) + d(\omega_2, E)$, on a :

$$d(\omega_2, K') + d(\omega_2, E) > d(\omega_1, K') + d(\omega_2, \omega_1) + d(\omega_2, E),$$

donc

$$d(\omega_2, K') > d(\omega_1, K') + d(\omega_2, \omega_1).$$

Si ω_1' est un modèle de K' tel que $d(\omega_1, K') = d(\omega_1, \omega_1')$, alors on obtient :

$$d(\omega_2, K') > d(\omega_1, \omega_1') + d(\omega_2, \omega_1).$$

De plus, par définition du min, on a $d(\omega_2, \omega_1') \geq d(\omega_2, K')$, donc :

$$d(\omega_2, \omega_1') > d(\omega_1, \omega_1') + d(\omega_2, \omega_1).$$

ce qui contredit l'inégalité triangulaire que doit vérifier la distance d.

Il y a donc non-manipulabilité de $\Delta_\mu^{d,\Sigma}$ pour i_p si la base initiale est complète.

□

Il est intéressant de noter que $\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$ (qui coïncide avec $\Delta_\mu^{d_D,GMax}$) correspond à la procédure de vote appelée *approval voting* (i.e., le vote par simple majorité à partir de l'union des alternatives préférées de chaque agent) lorsqu'aucune règle de *tie-break* n'est utilisée. On peut voir dans [Vor06] que cette règle échappe au théorème de Gibbard-Satterthwaite lorsque les préférences sont représentées par une bipartition. Vorsatz montre que si les individus ont des préférences biparties, une fonction de choix social est anonyme, neutre, strictement monotone et non manipulable si et seulement si c'est la procédure d'approval voting. On voit donc que les définitions choisies dans le cadre de la fusion pour les indices de satisfaction sont cohérentes avec les résultats obtenus en théorie du choix social, lorsque ces domaines sont comparables (bipartition des préférences).

Comme le montre l'exemple récurrent, la famille obtenue en considérant la distance de Hamming est, elle, manipulable. Nous allons à présent nous intéresser à cette famille, et considérer successivement les opérateurs obtenus en utilisant Σ, $GMax$ et Max comme fonctions d'agrégation.

Pour $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$, le nombre de bases et la présence de contraintes d'intégrité sont importants. Pour cet opérateur, on peut fixer précisément la limite entre manipulabilité et non-manipulabilité (dans les propriétés qui suivent, K représente la base initiale et $\#(E)$ le nombre de bases dans le profil E) :

Proposition 30.

– $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ *n'est pas manipulable pour* i_{dw} *ou* i_{ds} *si et seulement si* $\begin{cases} \mu \equiv \top \text{ et } \#(E) = 2, \\ \text{ou} \\ K \text{ est complète.} \end{cases}$

– $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ *n'est pas manipulable pour* i_p *si et seulement si* K *est complète.*

Preuve:

les propositions 29 et 27 entraînent immédiatement la partie $\Leftarrow$ de la preuve, avec la distance de Hamming d_H à la place d'une distance quelconque d.

Pour la partie $\Rightarrow$ de la preuve, nous allons montrer par des exemples de manipulation que $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ est manipulable dans les autres cas.

– Les premiers exemples montrent que $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ est manipulable pour i_{dw} et pour i_{ds} si ($\mu \not\equiv \top$ ou $\#(E) > 2$), et si K n'est pas complète.

  Indice drastique faible.

  – i_{dw} et $\mu \not\equiv \top$ (K n'est pas complète).

    On considère la contrainte $\mu = a \vee b$ et les deux bases K_1 et K_2 définies par leurs ensembles de modèles : $[K_1] = \{00, 01\}$ et $[K_2] = \{10\}$. On a $[\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})] = \{10\}$ et $i_{dw}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})) = 0$. Si l'agent dont la base est K_1 donne K_1', avec $[K_1'] = \{01\}$ à la place de K_1, on obtient $[\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})] = \{01, 10, 11\}$ et $i_{dw}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})) =$

1. Cet exemple montre la manipulabilité de $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ si $\mu \not\equiv \top$, même s'il y a seulement deux bases dans le profil. Les calculs sont détaillés dans le tableau 3.2. Les interprétations qui ne satisfont pas la contrainte sont grisées.

ω	$d_H(\omega, K_1)$	$d_H(\omega, K_1')$	$d_H(\omega, K_2)$	$\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})$	$\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})$
00	0	1	1	1	2
01	0	0	2	2	**2**
10	1	2	0	**1**	**2**
11	1	1	1	2	**2**

TAB. 3.2 – Manipulabilité de $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ pour i_{dw} avec $\mu \not\equiv \top$.

– i_{dw} et $\#(E) > 2$ (K n'est pas complète).
On considère $[K_1] = \{00, 10\}$, $[K_2] = \{01, 10, 11\}$ et $[K_3] = \{01\}$. Alors $\Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})$ a un modèle unique 01 et $i_{dw}(K_1, \Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})) = 0$. Si l'on considère à présent K_1' avec $[K_1'] = \{10\}$ à la place de K_1, alors $[\Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2, K_3\})] = \{01, 10, 11\}$ et $i_{dw}(K_1, \Delta^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2, K_3\})) = 1$. Voir le tableau 3.3.

ω	K_1	K_1'	K_2	K_3	$\Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})$	$\Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2, K_3\})$
00	0	1	1	1	2	3
01	1	2	0	0	**1**	**2**
10	0	0	0	2	2	**2**
11	1	1	0	1	2	**2**

TAB. 3.3 – Manipulabilité de $\Delta_\top^{d_H,\Sigma}$ pour i_{dw} avec trois bases.

Indice drastique fort.
– i_{ds} et $\mu \not\equiv \top$ (K n'est pas complète).
On considère la contrainte $\mu = (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ et les deux bases K_1 et K_2 définies par leurs ensembles de modèles : $[K_1] = \{000, 111\}$ et $[K_2] = \{000, 001\}$. On a $[\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})] = \{111, 100\}$ et $i_{ds}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})) = 0$. D'un autre côté, si l'agent dont la base est K_1 donne K_1', avec $[K_1'] = \{111\}$ à la place de K_1, on obtient $[\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})] = \{111\}$ et $i_{ds}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})) = 1$. Cet exemple montre la manipulabilité de $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ pour i_{ds} si $\mu \not\equiv \top$, même s'il y a seulement deux bases dans le profil. Les détails des calculs sont reportés dans le tableau 3.4.

ω	K_1	K_1'	K_2	$\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})$	$\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})$
000	0	3	0	0	3
001	1	2	0	1	2
010	1	2	1	2	3
011	1	1	1	2	2
100	1	2	1	**2**	3
101	1	1	1	2	2
110	1	1	2	3	3
111	0	0	2	**2**	**2**

TAB. 3.4 – Manipulabilité de $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ pour i_{ds} avec $\mu \not\equiv \top$ et deux bases.

– i_{ds} et $\#(E) > 2$ (K n'est pas complète).
On considère les trois bases K_1, K_2 et K_3 avec $[K_1] = \{000, 001, 111\}$, $[K_2] = \{110, 001\}$ et $[K_3] = \{110, 000\}$. Alors $[\Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{000, 001, 110\}$ et $i_{ds}(K_1, \Delta_\top^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})) = 0$.

Si l'on considère K_1' avec $[K_1'] = \{000, 001\}$ à la place deK_1, alors $[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{000, 001\}$ et $i_{ds}(K_1, \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2, K_3\})) = 1$. Voir le tableau 3.5.

ω	K_1	K_1'	K_2	K_3	$\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2, K_3\})$	$\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2, K_3\})$
000	0	0	1	0	**1**	**1**
001	0	0	0	1	**1**	**1**
010	1	1	1	1	3	3
011	1	1	1	2	4	4
100	1	1	1	1	3	3
101	1	1	1	2	4	4
110	1	2	0	0	**1**	2
111	0	2	1	1	2	4

TAB. 3.5 – Manipulabilité de $\Delta^{d_H,\Sigma}$ pour i_{ds} avec trois bases.

– L'exemple suivant montre que $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}$ est manipulable pour i_p si K n'est pas complète.
  A partir du tableau 3.6, on peut prouver la manipulabilité de $\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}$ pour i_p (même s'il y a seulement deux bases dans le profil et si $\mu \equiv \top$). On considère les deux bases K_1 et K_2 définies par leurs ensembles de modèles : $[K_1] = \{000, 001, 010, 100\}$ et $[K_2] = \{110, 011, 101, 111\}$. On a $[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})] = \{001, 010, 100, 110, 011,\ 101\}$ et $i_p(K_1, \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})) = \frac{1}{2}$. Si l'agent dont la base est K_1 donne K_1', avec $[K_1'] = \{000\}$, à la place de K_1, on obtient $[\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})] = \{000, 001, 010,\ 100, 110,011, 101\}$ et
  $i_p(K_1, \Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})) = \frac{4}{7}$.

ω	K_1	K_1'	K_2	$\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})$	$\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})$
000	0	0	2	2	**2**
001	0	1	1	**1**	**2**
010	0	1	1	**1**	**2**
011	1	2	0	**1**	**2**
100	0	1	1	**1**	**2**
101	1	2	0	**1**	**2**
110	1	2	0	**1**	**2**
111	2	3	0	2	3

TAB. 3.6 – Manipulabilité de $\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}$ pour i_p si K n'est pas complète.

□

Pour la famille d'opérateurs de fusion par sélection de modèles obtenue en considérant la fonction d'agrégation $GMax$, on obtient des résultats beaucoup plus contrastés. En effet, les opérateurs $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$ sont en général manipulables, même dans des situations très restreintes :

Proposition 31.

– $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$ *est manipulable pour chacun des indices de satisfaction* i_{d_w} *et* i_p, *même si* $\mu \equiv \top$, K *est complète et* $\#(E) = 2$.

– $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$ *n'est pas manipulable pour l'indice de satisfaction* i_{d_s} *si et seulement si* $\mu \equiv \top$, $\#(E) = 2$ *et* K *est complète.*

Preuve:

– Le tableau 3.7 montre la manipulabilité de $\Delta^{d_H,GMax}$ pour l'indice de satisfaction i_{d_w} et deux bases complètes. On considère K_1 telle que $[K_1] = \{001\}$, K_2 avec $[K_2] = \{111\}$ et $\mu = \top$. On a $[\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1, K_2\})] = \{011, 101\}$, donc aucun modèle de K_1 n'appartient à

$[\Delta_\mu^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2\})]$ et $i_{d_w}(K_1,\Delta_\mu^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2\})) = 0$. Si l'agent 1 donne K'_1 avec $[K'_1] = \{000\}$ à la place de K_1, alors $[\Delta_\mu^{d_H,GMax}\{K'_1,K_2\})] = \{001, 010, 011, 100, 101, 110\}$ et $i_{d_w}(K_1,\Delta_\mu^{d_H,GMax}(\{K'_1,K_2\})) = 1$.

ω	K_1	K'_1	K_2	$\Delta_\mu^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta_\mu^{d_H,GMax}(\{K'_1,K_2\})$
000	1	0	3	$(3,1)$	$(3,0)$
001	0	1	2	$(2,0)$	$(\mathbf{2},\mathbf{1})$
010	2	1	2	$(2,2)$	$(\mathbf{2},\mathbf{1})$
011	1	2	1	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(\mathbf{2},\mathbf{1})$
100	2	1	2	$(2,1)$	$(\mathbf{2},\mathbf{1})$
101	1	2	1	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(\mathbf{2},\mathbf{1})$
110	3	2	1	$(3,1)$	$(\mathbf{2},\mathbf{1})$
111	2	3	0	$(2,0)$	$(3,0)$

TAB. 3.7 – Manipulabilité de $\Delta_\mu^{d_H,GMax}$ pour i_{d_w} avec deux bases complètes.

Comme on a un exemple de manipulabilité pour i_{d_w}, cet exemple montre également la manipulabilité pour i_p (cf. proposition 25).

- Pour i_{d_s}, il y a différents cas à étudier.
  - $\Delta_\top^{d_H,GMax}$ n'est pas manipulable quand $E = \{K_1,K_2\}$ et $\mu \equiv \top$, si K_1 est complète. On considère $E' = \{K'_1,K_2\}$ avec $K'_1 = K'_{\omega_1}$ complète (grâce au lemme 45, on sait que si un opérateur est manipulable, il est manipulable pour une base complète) et $\mu \equiv \top$. Soient $\#(\mathcal{P}) = n$ et $d(K'_1,K_2) = min_{\omega_1\models K_1,\omega_2\models K_2}(d_H(\omega_1,\omega_2),\leq) = m \leq n$. Alors il existe un modèle ω_2 de K_2 tel que $d_H(K'_{\omega_1},\omega_2) = m$. Par définition de la distance de Hamming, ω_2 peut être généré à partir de ω_1 en changeant la valeur de m variables (puisque K'_{ω_1} et ω_2 ont exactement m variables $x_1,\ldots,x_m$ dont les valeurs diffèrent). Si $m = 2k+1$ (m impair), alors $d(\top,E') = (k+1,k)$; sinon $m = 2k$ (m pair) et $d(\top,E') = (k,k)$. Dans le premier cas (m impair), il existe au moins deux interprétations ω et ω' telles que $d(\omega,E') = d(\omega',E') = d(\top,E')$ (par exemple, ω est généré à partir de ω_1 en changeant la valeur de $x_1,\ldots,x_k$ et ω' est généré à partir de ω_2 en modifiant la valeur de $x_{k+1},\ldots,x_m$). Une conclusion identique peut être obtenue dans le second cas (m pair) dès que $k \geq 1$. Dans ces deux cas, $\Delta_\top^{d_H,GMax}(E')$ a au moins deux modèles et on ne peut donc pas avoir $\Delta_\top^{d_H,GMax}(E') \equiv K_1$ avec K_1 complète : E n'est donc pas manipulable par K_1 pour i_{d_s}. Le cas restant est pour $d(\top,E') = (0,0)$. Cela impose que $K'_{\omega_1} \wedge K_2$ est cohérent. Comme K'_{ω_1} est complète, on a $\Delta_\top^{d_H,GMax}(E') \equiv K'_{\omega_1}$ et aucune manipulation n'est possible pour i_{d_s} (puisque $\Delta_\top^{d_H,GMax}(E') \equiv K_1$ si et seulement si $K_1 \equiv K'_{\omega_1}$ si et seulement si $\Delta_\top^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2\}) \equiv K_1$).
  - Pour prouver la manipulabilité de $\Delta^{d_H,GMax}$ pour i_{d_s} et deux bases, on considère les exemples suivants :
    - L'exemple ci-après montre que la manipulation est possible en présence de deux bases complètes si la contrainte n'est pas équivalente à $\top$.
      On considère K_1 et K_2 données par $[K_1] = \{01\}, [K_2] = \{11\}$ et $\mu = \neg a \wedge b$. Alors $[\Delta_\mu^{d_H,GMax}(\{K_1,\ K_2\})] = \{01, 11\}$ et $i_{d_s}(K_1,\Delta_\mu^{d_H,GMax}(\{K_1,\ K_2\})) = 0$. Si l'agent 1 donne K'_1 avec $[K'_1] = \{00\}$ à la place de K_1, alors le résultat est $[\Delta_\mu^{d_H,GMax}(\{K'_1,K_2\})] = \{01\}$ et
      $i_{d_s}(K_1,\Delta_\mu^{d_H,GMax}(\{K'_1,K_2\})) = 1$ (voir le tableau 3.8).
    - L'exemple proposé dans le tableau 3.9 montre que la manipulation est possible en présence de deux bases, même s'il n'y a pas de contrainte d'intégrité. Considérons K_1 et K_2 données par $[K_1] = \{01, 10\}$, $[K_2] = \{11\}$ et $\mu \equiv \top$. Alors $[\Delta_\mu^{d_H,GMax}(\{K_1,\ K_2\})] = \{01, 10, 11\}$

ω	K_1	K_1'	K_2	$\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1',K_2\})$
00	1	0	2	$(2,1)$	$(2,0)$
01	0	1	1	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$
10	2	1	1	$(2,1)$	$(1,1)$
11	1	2	0	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$	$(2,0)$

TAB. 3.8 – Manipulabilité de $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$ pour i_{d_s} avec deux bases complètes.

et
$i_{d_s}(K_1, \Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2\})) = 0$. Si l'agent 1 donne K_1' avec $[K_1'] = \{00\}$ à la place de K_1, alors $[\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1',K_2\})] = \{01,10\}$ et $i_{d_s}(K_1, \Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1',K_2\})) = 1$.

ω	K_1	K_1'	K_2	$\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1',K_2\})$
00	1	0	2	$(2,1)$	$(2,0)$
01	0	1	1	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$
10	0	1	1	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$
11	1	2	0	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$	$(2,0)$

TAB. 3.9 – Manipulabilité de $\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$ pour i_{d_s} avec deux bases.

– Le dernier cas considéré est quand le profil contient trois bases, qu'il n'y a pas de contrainte d'intégrité et que la base utilisée pour manipuler est complète. On considère K_1, K_2 et K_3 données par $[K_1] = \{01\}$, $[K_2] = \{11\}$, et $[K_3] = \{00,01,11\}$. Alors $[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2,K_3\})] = \{01,11\}$ et
$i_{d_s}(K_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2,K_3\})) = 0$. Si l'agent 1 donne K_1', avec $[K_1'] = \{00\}$, à la place de K_1, alors $[\Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{K_1',K_2,K_3\})] = \{01\}$ et
$i_{d_s}(K_1, \Delta_{\top}^{d_H,GMax}(\{K_1',K_2,K_3\})) = 1$ (voir le tableau 3.10).

ω	K_1	K_1'	K_2	K_3	$\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1,K_2,K_3\})$	$\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\{K_1',K_2,K_3\})$
00	1	0	2	0	$(2,1,0)$	$(2,0,0)$
01	0	1	1	0	$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})$	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})$
10	2	1	1	1	$(2,1,1)$	$(1,1,1)$
11	1	2	0	0	$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})$	$(2,0,0)$

TAB. 3.10 – Manipulabilité de $\Delta_{\top}^{d_H,GMax}$ pour i_{d_s} avec trois bases complètes.

□

Les résultats pour la fonction d'agrégation Max sont exactement identiques aux résultats obtenus pour la fonction d'agrégation $GMax$. Pour la distance drastique, le résultat de non-manipulablité découle directement de la proposition 26. Il est intéressant de remarquer que l'opérateur $\Delta^{d_D,Max}$ correspond à l'opérateur de fusion par intersection totale [Kon00], $\Delta_{\mu}^{d_D,Max} \equiv \bigwedge E \wedge \mu$ si cohérent, $\Delta_{\mu}^{d_D,Max} \equiv \mu$ sinon. Pour le cas où la distance de Hamming d_H est utilisée, on peut dériver la plupart des preuves de la preuve précédente avec la fonction d'agrégation $GMax$:

Proposition 32.
- $\Delta_{\mu}^{d_H,Max}$ *est manipulable chacun des indices de satisfaction* i_{dw} *et* i_p*, même si* $\mu \equiv \top$*,* K *est complète et* $\#(E) = 2$.
- $\Delta_{\mu}^{d_H,Max}$ *n'est pas manipulable pour l'indice de satisfaction* i_{ds} *si et seulement si* $\mu \equiv \top$*,* $\#(E) = 2$ *et* K *est complète.*

Preuve:

– Le tableau 3.11 montre la manipulabilité de $\Delta^{d_H,Max}$ pour l'indice de satisfaction i_{d_w} et deux bases complètes. C'est le même exemple que celui de la preuve précédente pour $\Delta^{d_H,GMax}$. On considère K_1 telle que $[K_1] = \{001\}$ et K_2 avec $[K_2] = \{111\}$ et $\mu = \top$. On a $[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1, K_2\})] = \{011, 101\}$, donc aucun modèle de K_1 n'appartient à $[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1, K_2\})]$ et $i_{d_w}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1, K_2\})) = 0$. Si l'agent 1 donne K_1', avec $[K_1'] = \{000\}$, à la place de K_1, alors $[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1', K_2\})] = \{001, 010, 011, 100, 101, 110\}$ et $i_{d_w}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1', K_2\})) = 1$.

ω	K_1	K_1'	K_2	$\Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1',K_2\})$
000	1	0	3	3	3
001	0	1	2	2	**2**
010	2	1	2	2	**2**
011	1	2	1	**1**	**2**
100	2	1	2	2	**2**
101	1	2	1	**1**	**2**
110	3	2	1	3	**2**
111	2	3	0	2	3

TAB. 3.11 – Manipulabilité de $\Delta_\mu^{d_H,Max}$ pour i_{d_w} avec deux bases complètes.

Cet exemple de manipulabilité pour i_{d_w} montre également la manipulabilité pour i_p (cf. proposition 25).

– Pour i_{d_s}, il y a différents cas à étudier.
  – $\Delta_\top^{d_H,Max}$ n'est pas manipulable quand $E = \{K_1, K_2\}$ et $\mu \equiv \top$, si K_1 est complète. On considère $E' = \{K_1', K_2\}$ avec $K_1' = K_{\omega_1}'$ complète (grâce au lemme 45, on sait que si un opérateur est manipulable, il est manipulable pour une base complète) et $\mu \equiv \top$. Soit $\#(\mathcal{P}) = n$ et $d(K_1', K_2) = m \leq n$. Alors il existe un modèle ω_2 de K_2 tel que $d_H(K_{\omega_1}', \omega_2) = m$. Par définition de la distance de Hamming, ω_2 peut être généré à partir de ω_1 en changeant la valeur de m variables (puisque K_{ω_1}' et ω_2 ont exactement m variables $x_1, \ldots, x_m$ dont les valeurs diffèrent). Si $m = 2k + 1$ (m impair), alors $d(\top, E') = k + 1$; sinon $m = 2k$ (m pair) et $d(\top, E') = k$. Dans le premier cas (m impair), il existe au moins deux interprétations ω et ω' telles que $d(\omega, E') = d(\omega', E') = d(\top, E')$ (par exemple, ω est généré à partir de ω_1 en changeant la valeur de $x_1, \ldots, x_{k+1}$ et ω' est généré à partir de ω_1 en modifiant la valeur de $x_{k+1}, \ldots, x_m$). Une conclusion identique peut être obtenue dans le second cas (m pair) dès que $k \geq 1$. Dans ces deux cas, $\Delta_\top^{d_H,Max}(E')$ a au moins deux modèles et on ne peut donc pas avoir $\Delta_\top^{d_H,Max}(E') \equiv K_1$ avec K_1 complète : E n'est pas manipulable par K_1 pour i_{d_s}. Le cas restant est pour $d(\top, E') = 0$. Cela impose que $K_{\omega_1}' \wedge K_2$ soit cohérent. Comme K_{ω_1}' est complète, on a $\Delta_\top^{d_H,Max}(E') \equiv K_{\omega_1}'$ et aucune manipulation n'est possible pour i_{d_s} (puisque $\Delta_\top^{d_H,Max}(E') \equiv K_1$ si et seulement si $K_1 \equiv K_{\omega_1}'$).
  – Pour prouver la manipulabilité pour i_{d_s} et deux bases, on considère les exemples suivants :
    – L'exemple ci-après montre que la manipulation est possible en présence de deux bases complètes si la contrainte n'est pas équivalente à $\top$. On considère K_1 et K_2 données par $[K_1] = \{01\}$, $[K_2] = \{11\}$ et $\mu = \neg a \wedge b$. Alors $[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1, K_2\})] = \{01, 11\}$ et $i_{d_s}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1, K_2\})) = 0$. Si l'agent 1 donne K_1' avec $[K_1'] = \{00\}$ à la place de K_1, alors le résultat est $[\Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1', K_2\})] = \{01\}$ et $i_{d_s}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,Max}(\{K_1', K_2\})) = 1$ (voir le tableau 3.12).

ω	K_1	K'_1	K_2	$\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K'_1,K_2\})$
00	1	0	2	2	2
01	0	1	1	**1**	**1**
10	2	1	1	2	1
11	1	2	0	**1**	2

TAB. 3.12 – Manipulabilité de $\Delta_{\mu}^{d_H,Max}$ pour i_{d_s} avec deux bases complètes.

– L'exemple proposé dans le tableau 3.13 montre que la manipulation est possible en présence de deux bases, même s'il n'y a pas de contrainte d'intégrité. Considérons K_1 et K_2 données par $[K_1] = \{01, 10\}$, $[K_2] = \{11\}$ et $\mu \equiv \top$. Alors $[\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K_1,\, K_2\})] = \{01, 10, 11\}$, et $i_{d_s}(K_1,\, \Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K_1, K_2\})) = 0$. Si l'agent 1 donne K'_1, avec $[K'_1] = \{00\}$, à la place de K_1, alors $[\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K'_1, K_2\})] = \{01, 10\}$ et $i_{d_s}(K_1, \Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K'_1, K_2\})) = 1$.

ω	K_1	K'_1	K_2	$\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K'_1,K_2\})$
00	1	0	2	2	2
01	0	1	1	**1**	**1**
10	0	1	1	**1**	**1**
11	1	2	0	**1**	2

TAB. 3.13 – Manipulabilité de $\Delta_{\mu}^{d_H,Max}$ pour i_{d_s} avec deux bases.

– Le dernier cas considéré est quand le profil contient trois bases, qu'il n'y a pas de contrainte d'intégrité et que la base utilisée pour manipuler est complète. On considère K_1, K_2 et K_3 données par $[K_1] = \{01\}$, $[K_2] = \{11\}$, et $[K_3] = \{01\}$. Alors $[\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{01, 11\}$, et $i_{d_s}(K_1, \Delta_{\top}^{d_H,Max}(\{K_1, K_2, K_3\})) = 0$. Si l'agent 1 donne K'_1 avec $[K'_1] = \{00\}$ à la place de K_1, alors $[\Delta_{\top}^{d_H,Max}(\{K'_1, K_2, K_3\})] = \{01\}$ et $i_{d_s}(K_1,\, \Delta_{\top}^{d_H,Max}(\{K'_1, K_2, K_3\})) = 1$ (voir le tableau 3.14).

ω	K_1	K'_1	K_2	K_3	$\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K_1,K_2,K_3\})$	$\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\{K'_1,K_2,K_3\})$
00	1	0	2	1	2	2
01	0	1	1	0	**1**	**1**
10	2	1	1	2	2	2
11	1	2	0	1	**1**	2

TAB. 3.14 – Manipulabilité de $\Delta_{\top}^{d_H,Max}$ pour i_{d_s} avec trois bases complètes.

□

3.2.2 Opérateurs à sélection de formules

On s'intéresse d'abord aux opérateurs les plus simples, pour lesquels on a des résultats de non-manipulabilité, ce qui s'explique sans doute par leur comportement drastique, et donc plus résistant à la manipulation.

Proposition 33. *L'opérateur de fusion par intersection totale Δ^{fm} n'est manipulable pour aucun des trois indices i_p, i_{d_w} ou i_{d_s}.*

Preuve:
Δ_μ^{fm} n'est pas manipulable pour i_p. En effet, si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent, alors tous les modèles de la base fusionnée sont des modèles de $K_1 \in E$, donc la satisfaction de K_1 est maximale pour i_p.

En revanche, si $\bigwedge E \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors la base fusionnée est équivalente à μ. Supposons que l'agent 1 reporte K_1' à la place de K_1. Si $K_1' \wedge \bigwedge\{K_2, \ldots, K_n\} \wedge \mu$ est cohérent, alors aucun modèle de la base fusionnée résultante n'est un modèle de K_1 (sinon $K_1 \wedge \bigwedge\{K_2, \ldots, K_n\} \wedge \mu$ aurait été cohérent), donc la valeur de la satisfaction de K_1 pour l'indice i_p est nulle et n'est donc pas augmentée. Il reste le cas où $K_1' \wedge \bigwedge\{K_2, \ldots, K_n\} \wedge \mu$ est incohérent. Dans ce cas la base fusionnée résultante est encore équivalente à μ, ce qui ne permet pas non plus d'augmenter la satisfaction de K_1. La proposition 25 montre que Δ_μ^{fm} est également non manipulable pour les deux indices drastiques.

□

Proposition 34. *L'opérateur de fusion basique Δ^b n'est manipulable pour aucun des trois indices i_p, i_{d_w} ou i_{d_s}.*

Preuve:
Δ_μ^b n'est pas manipulable pour i_p. Il y a trois cas possibles à considérer pour $\Delta_\mu^b(E)$:

- si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent, on retrouve la même situation que dans la preuve précédente : i_p est maximal, et aucune manipulation n'est possible.
- si $\bigwedge E \wedge \mu$ n'est pas cohérent, le résultat de la fusion a deux formes possibles :
  - soit $(\bigvee E) \wedge \mu$ est cohérent, et $\Delta_\mu^b(E) \equiv (\bigvee E) \wedge \mu$. Tous les modèles de $K_1 \wedge \mu$ sont alors des modèles de la base fusionnée. Pour augmenter la valeur de l'indice i_p, il n'est donc pas possible d'augmenter le nombre de modèles de K_1 dans le résultat de la fusion. Ainsi, pour réussir à manipuler, il est indispensable de diminuer le nombre de contre-modèles de K_1 dans la base fusionnée. Or, cela non plus n'est pas possible : supposons que l'agent 1 donne K_1' à la place de K_1. Si $K_1' \wedge \bigwedge\{K_2, \ldots, K_n\} \wedge \mu$ est cohérent, alors aucun modèle de la base fusionnée résultante n'est un modèle de K_1 (en effet, $\bigwedge E \wedge \mu \equiv K_1 \wedge \bigwedge\{K_2, \ldots, K_n\} \wedge \mu$ n'est pas cohérent), et la valeur de l'indice i_p est minimale.
    Donc $K_1' \wedge \bigwedge\{K_2, \ldots, K_n\} \wedge \mu$ n'est pas cohérent et on a $\Delta_\mu^b(K_1' \sqcup \{K_2, \ldots, K_n\}) \equiv (K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu$. Supposons que $K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}$ n'est pas cohérent. La seule possibilité pour que $(K_1 \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu$ soit cohérent et $K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu$ ne le soit pas est que $K_1' \wedge \mu$ et $(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu$ soient tous les deux incohérents. Dans ce cas, $\Delta_\mu^b(E) =\equiv (K_1 \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu \equiv K_1 \wedge \mu$: i_p est maximal avec K_1. On peut donc supposer que $K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}$ est cohérent. Alors :

$$i_p(K_1, \Delta_\mu^b(K_1 \sqcup \{K_2, \ldots, K_n\})) = \frac{\#([K_1 \wedge \mu])}{\#([(K_1 \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])}$$

et

$$i_p(K_1, \Delta_\mu^b(K_1' \sqcup \{K_2, \ldots, K_n\})) = \frac{\#([K_1 \wedge (K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])}{\#([(K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])}$$

Le numérateur de $i_p(K_1, \Delta_\mu^b(K_1 \sqcup \{K_2, \ldots, K_n\}))$ est maximal, donc pour augmenter $i_p(K_1, \Delta_\mu^b(K_1' \sqcup \{K_2, \ldots, K_n\}))$, on doit diminuer le dénominateur de $i_p(K_1, \Delta_\mu^b(K_1' \sqcup \{K_2, \ldots, K_n\}))$, c'est-à-dire $\#([(K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])$.
On peut écrire l'égalité :

$$\#([(K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu]) =$$

$$\#([(K_1' \wedge K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\})) \wedge \mu]) +$$

$$\#([(K_1' \wedge \neg K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\})) \wedge \mu]) +$$

$$\#([(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu]).$$

Dans cette somme, $\#([(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])$ ne peut pas être changé. Il faut donc diminuer au moins un des deux autres termes de cette somme. On va se placer dans la situation la plus propice à la manipulation, c'est-à-dire quand $\#([(K_1' \wedge \neg K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\})) \wedge \mu])$ est minimal. Cette valeur minimale est atteinte si K_1' est tel que $\#([(K_1' \wedge \neg K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\})) \wedge \mu]) = 0$. Dans la suite, on suppose donc que $\#([(K_1' \wedge \neg K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\})) \wedge \mu]) = 0$, et on montre que dans ce cas extrême, aucune manipulation n'est possible. Comme tout choix pour $\#([(K_1' \wedge \neg K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\})) \wedge \mu])$ autre que 0 entraîne une diminution de l'indice i_p (par augmentation du dénominateur sans modification du numérateur), cela prouve que la manipulation est impossible dans tous les cas.
Pour le premier terme de la somme, $\#([(K_1' \wedge K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\})) \wedge \mu])$, on peut écrire :

$$\#([(K_1' \wedge K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\})) \wedge \mu]) =$$

$$\#([(K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\})) \wedge \mu]) - \#([(K_1 \wedge \neg K_1' \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\})) \wedge \mu]).$$

Donc on obtient pour l'indice probabiliste :

$$i_p(K_1, \Delta_\mu^b(K_1' \sqcup \{K_2, \ldots, K_n\})) =$$

$$\frac{\#([K_1 \wedge \mu]) - \#([K_1 \wedge \neg K_1' \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])}{\#([K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu]) - \#(K_1 \wedge \neg K_1' \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu]) + \#([(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])}.$$

On peut remarquer que si k est un entier et si $a \leq b$, alors $\frac{a-k}{b-k} \leq \frac{a}{b}$. Donc si on soustrait le même entier $\#([K_1 \wedge \neg K_1' \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])$ du numérateur et du dénominateur, cela donne les inégalités suivantes :

$$\frac{\#([K_1 \wedge \mu]) - \#([K_1 \wedge \neg K_1' \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])}{\#([K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu]) - \#([K_1 \wedge \neg K_1' \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu]) + \#([(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])} \leq$$

$$\frac{\#([K_1 \wedge \mu])}{\#([K_1 \wedge \neg(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu]) + \#([(\bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu])}.$$

Donc :

$$i_p(K_1, \Delta_\mu^b(K_1' \sqcup \{K_2, \ldots, K_n\})) \leq i_p(K_1, \Delta_\mu^b(K_1 \sqcup \{K_2, \ldots, K_n\})).$$

Aucune manipulation n'est possible dans ce cas.

– soit $(\bigvee E) \wedge \mu$ n'est pas cohérent et $\Delta_\mu^b(E) \equiv \mu$. Si $K_1' \wedge \bigwedge\{K_2, \ldots, K_n\} \wedge \mu$ est cohérent, alors aucun modèle de la base fusionnée résultante n'est un modèle de K_1 (en effet, $\bigwedge E \wedge \mu \equiv K_1 \wedge \bigwedge\{K_2, \ldots, K_n\} \wedge \mu$ n'est pas cohérent), et la valeur de l'indice i_p est minimale.
Si $(K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu$ est cohérent, comme $(K_1 \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu$ ne l'est pas, cela implique que $(K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu$ ne contient aucun modèle de K_1 et i_p est donc minimal.
Donc $(K_1' \vee \bigvee\{K_2, \ldots, K_n\}) \wedge \mu$ n'est pas cohérent et $\Delta_\mu^b(\{K_1', K_2, \ldots, K_n\}) \equiv \mu \equiv \Delta_\mu^b(E)$: aucune manipulation n'est possible.

Δ_μ^b est donc non manipulable pour i_p. Grâce à la proposition 25, on conclut que Δ_μ^b est également non manipulable pour chacun des deux indices drastiques.

□

Pour d'autres opérateurs à sélection de formules, les opérateurs de combinaison, les résultats sont très différents. En effet, pour l'indice probabiliste, tous les opérateurs à sélection de formules $\triangle_\mu^{C1}$, $\triangle_\mu^{C3}$, $\triangle_\mu^{C4}$, et $\triangle_\mu^{C5}$ sont manipulables.

Proposition 35. *$\triangle_\mu^{C1}$, $\triangle_\mu^{C3}$, $\triangle_\mu^{C4}$, et $\triangle_\mu^{C5}$ sont manipulables pour i_p, même si $\mu \equiv \top$, K est complète et $\#(E) = 2$.*

Preuve:
l'exemple suivant prouve que l'opérateur $\triangle_\mu^{C1}$ est manipulable pour i_p, avec $\#(E) = 2$, une base complète K_1 et $\mu \equiv \top$. Considérons $E = \{K_1, K_2\}$, avec $K_1 = \{a \wedge b\}$ et $K_2 = \{\neg(a \wedge b)\}$. Alors $\triangle_\top^{C1}(E) \equiv \top$, et $i_p(K_1, \triangle_\top^{C1}(E)) = \frac{1}{4}$. En revanche, si l'agent 1 donne $K_1' = \{a, b\}$ à la place de K_1, alors $\triangle_\top^{C1}(\{K_1', K_2\}) \equiv a \vee b$ et $i_p(K_1, \triangle_\top^{C1}(\{K_1', K_2\})) = \frac{1}{3}$. Ainsi E est manipulable par K_1 complète pour i_p. Le même exemple reste valable pour $\triangle_\mu^{C4}$. Il suffit de remarquer que $\triangle_\top^{C1} = \triangle_\top^{C3} = \triangle_\top^{C5}$ pour conclure la preuve.

□

Cependant, pour les deux indices drastiques, il y a des situations où la non-manipulabilité peut être assurée pour les opérateurs de combinaison :

Proposition 36.

- *$\triangle_\mu^{C1}$ est non manipulable pour i_{dw} et pour i_{ds}.*
- *$\triangle_\mu^{C3}$ est non manipulable pour i_{dw} (resp. i_{ds}) si et seulement si $\mu \equiv \top$.*
- *$\triangle_\mu^{C4}$ est manipulable pour i_{dw} et pour i_{ds}, même si $\mu \equiv \top$, K est complète et $\#(E) = 2$.*
- *$\triangle_\mu^{C5}$ est non manipulable pour i_{dw} si et seulement si* $\begin{cases} \mu \equiv \top, \\ \textit{ou} \\ K \textit{ est complète.} \end{cases}$
- *$\triangle_\mu^{C5}$ est non manipulable pour i_{ds} si et seulement si $\mu \equiv \top$.*

Preuve:

- $\triangle_\mu^{C1}$ est non manipulable pour i_{dw} et pour i_{ds}.
  Indice drastique faible.
  Pour tout $K \in E$, il y a deux cas :
  - $K \wedge \mu$ est cohérent. Alors il y a au moins un sous-ensemble maximal cohérent M de $\bigcup_{K_i \in E} K_i$ qui contient μ et toutes les formules de K. Donc $\triangle_\mu^{C1}(E \sqcup \{K\}) \equiv M \vee R$ (où R représente la disjonction des autres maxcons) est cohérent avec K. Donc $i_{d_w}(K, \triangle_\mu^{C1}(E \sqcup \{K\})) = 1$ et aucune manipulation n'est possible.
  - $K \wedge \mu$ n'est pas cohérent. Comme pour tout K', on a $\triangle_\mu^{C1}(E \sqcup \{K'\})) \models \mu$, on a également $i_{d_w}(K, \triangle_\mu^{C1}(E \sqcup \{K'\})) = 0$ et aucune manipulation n'est possible.

  Indice drastique fort.
  Raisonnement par l'absurde. Supposons que $\triangle_\mu^{C1}$ soit manipulable pour i_{d_s}. Cela signifie que

$$\exists K \text{ tel que } \triangle_\mu^{C1}(E \sqcup \{K\}) \not\models K, \quad (3.6)$$

$$\exists K' \text{ tel que } \triangle_\mu^{C1}(E \sqcup \{K'\}) \models K. \quad (3.7)$$

  Par l'implication 3.7, on obtient que $\forall M \in \textsc{maxcons}(E \sqcup \{K'\}, \mu)$, $M \models K$. Donc si l'on considère $\triangle_\mu^{C1}(E \sqcup \{K'\} \sqcup \{K\})$, tout $M' \in \textsc{maxcons}(E \sqcup \{K'\} \sqcup \{K\}, \mu)$ est de la forme $M \cup \{K\}$, donc $M' \models K$ et $\triangle_\mu^{C1}(E \sqcup \{K'\} \sqcup \{K\}) \models K$ $(*)$.

Par l'implication 3.6, on sait que $\exists M \in \textsc{maxcons}(E \sqcup \{K\}, \mu)$, $M \not\models K$. Comme M est un sous-ensemble maximal, cela implique que $M \wedge K$ n'est pas cohérent. Alors si l'on considère $\triangle_{\mu}^{C1}(E \sqcup \{K'\} \sqcup \{K\})$, on a $M \subseteq M'$, avec $M' \in \textsc{maxcons}(E \sqcup \{K'\} \sqcup \{K\}, \mu)$. Donc $M' \wedge K$ n'est pas cohérent. Ainsi $M' \not\models K$ et $\triangle_{\mu}^{C1}(E \sqcup \{K\} \sqcup \{K'\}) \not\models K$, ce qui contredit $(*)$. Donc $\triangle_{\mu}^{C1}$ n'est pas manipulable pour i_{d_s}.

- $\triangle_{\mu}^{C3}$ est non manipulable pour i_{dw} (resp. i_{ds}) si et seulement si $\mu \equiv \top$. Comme on a $\triangle_{\top}^{C1} = \triangle_{\top}^{C3}$, il vient immédiatement que $\triangle_{\top}^{C3}$ n'est pas manipulable pour i_{d_w} et pour i_{d_s}.
  Indice drastique faible. Une manipulation pour i_{d_w} avec $\triangle_{\mu}^{C3}$ avec deux bases et une base initiale complète K_1 est donnée par l'exemple suivant : soient $K_1 = \{a \wedge b\}$, $K_2 = \{\neg a\}$, $\mu = \neg b$ et $K_1' = \{a\}$. On a $\Delta_{\mu}^{C3}(\{K_1, K_2\}) \equiv \neg a$, qui est incohérent avec K_1. On a aussi $\Delta_{\mu}^{C3}(\{K_1', K_2\}) \equiv \top$, qui est cohérent avec K_1.
  Indice drastique fort. Pour montrer qu'une manipulation est possible pour i_{d_s} avec $\triangle_{\mu}^{C3}$ avec deux bases dont une base initiale complète K_1, on considère l'exemple suivant : soient $K_1 = \{a \wedge b\}$, $K_2 = \{\neg a\}$, $\mu = \neg a \wedge \neg b$ et $K_1' = \{\neg a \wedge b\}$. On a $\Delta_{\mu}^{C3}(\{K_1, K_2\}) \equiv \neg a$, ainsi $\Delta_{\mu}^{C3}(\{K_1, K_2\}) \not\models K_1$. On a également $\Delta_{\mu}^{C3}(\{K_1', K_2\}) \equiv \bot$, ainsi $\Delta_{\mu}^{C3}(\{K_1', K_2\}) \models K_1$.
- $\triangle_{\mu}^{C4}$ est manipulable pour i_{dw} et pour i_{ds}, même si $\mu \equiv \top$, K est complète et $\#(E) = 2$.
  Indice drastique faible. Pour montrer que la manipulation pour i_{dw} est possible pour $\triangle_{\mu}^{C4}$ avec deux bases, une base initiale complète K_1 et $\mu \equiv \top$, on considère l'exemple suivant : soient $K_1 = \{a\}$, $K_2 = \{\neg a, \neg a \wedge \top\}$, $\mu = \top$ et $K_1' = \{a, a \wedge \top\}$. On a $\Delta_{\mu}^{C4}(\{K_1, K_2\}) \equiv \neg a$, ainsi $\Delta_{\mu}^{C4}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1$ n'est pas cohérent. On a aussi $\Delta_{\mu}^{C4}(\{K_1', K_2\}) \equiv \top$ et donc $\Delta_{\mu}^{C4}(\{K_1', K_2\}) \wedge K_1$ est cohérent.
  Indice drastique fort. Pour montrer que $\triangle_{\mu}^{C4}$ est manipulable pour i_{d_s} avec deux bases, une base initiale complète K_1 et $\mu = \top$, considérons l'exemple suivant : soit $K_1 = \{a\}$, $K_2 = \{\neg a\}$, $\mu \equiv \top$ et $K_1' = \{a, a \wedge \top\}$. On a $\Delta_{\mu}^{C4}(\{K_1, K_2\}) \equiv \top$, ainsi $\Delta_{\mu}^{C4}(\{K_1, K_2\}) \not\models K_1$. On a aussi $\Delta_{\mu}^{C4}(\{K_1', K_2\}) \equiv a$, ainsi $\Delta_{\mu}^{C4}(\{K_1', K_2\}) \models K_1$.
- $\triangle_{\mu}^{C5}$ est non manipulable pour i_{dw} si et seulement si $\begin{cases} \mu \equiv \top, \\ \text{ou} \\ K \text{ est complète.} \end{cases}$
  Comme $\triangle_{\top}^{C1} = \triangle_{\top}^{C5}$, on obtient immédiatement que $\triangle_{\top}^{C5}$ n'est pas manipulable pour i_{d_w}.
  On peut donner un exemple de manipulation pour i_{d_w} avec $\triangle_{\mu}^{C5}$ et deux bases : soient $K_1 = \{a\}$, $K_2 = \{b, \neg a\}$, $\mu = \neg a \vee \neg b$ et $K_1' = \{a \wedge \neg b\}$. On a $\Delta_{\mu}^{C5}(\{K_1, K_2\}) \equiv b \wedge \neg a$, ainsi $\Delta_{\mu}^{C5}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1$ n'est pas cohérent. On a aussi $\Delta_{\mu}^{C5}(\{K_1', K_2\}) \equiv (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$, et $\Delta_{\mu}^{C4}(\{K_1', K_2\}) \wedge K_1$ est cohérent.
  Enfin, aucune manipulation n'est possible pour $\triangle_{\mu}^{C5}$ quand la base initiale $K_1 = K_{\{\omega_1\}}$ est complète. Il y a deux cas :
  - $\omega_1 \models \mu$. Soit $M = \{\phi \in \bigcup_{K \in E} K \mid \omega_1 \models \phi\}$. Par construction, M est un élément de $\textsc{maxcons}(\bigcup_{K \in E} K, \top)$. Comme $\omega_1 \models \mu$, M est cohérent avec μ (ω_1 est un modèle de μ et de M). Comme on a à la fois $K_{\omega_1} \models M$ et $M \models \Delta_{\mu}^{C5}(E)$ (par définition de cet opérateur), on a également $K_{\omega_1} \models \Delta_{\mu}^{C5}(E)$. Ainsi $\Delta_{\mu}^{C5}(E) \wedge K_{\omega_1}$ est cohérent et cela empêche E d'être manipulable par K_{ω_1} pour i_{d_w} étant donné Δ_{μ}^{C5} et μ.
  - $\omega_1 \models \neg\mu$. Par définition de cet opérateur, pour toute base K_1' et tout profil E' (en particulier le profil obtenu en retirant K_{ω_1} de E), $\Delta_{\mu}^{C5}(\{K_1'\} \sqcup E')$ est cohérent et $\Delta_{\mu}^{C5}(\{K_1'\} \sqcup E') \models \mu$. Cela implique que $\Delta_{\mu}^{C5}(\{K_1'\} \sqcup E') \wedge K_{\omega_1}$ est incohérent et aucune manipulation n'est possible pour i_{d_w}.
- $\triangle_{\mu}^{C5}$ est non manipulable pour i_{ds} si et seulement si $\mu \equiv \top$.
  Comme $\triangle_{\top}^{C1} = \triangle_{\top}^{C5}$, on obtient immédiatement que $\triangle_{\top}^{C5}$ n'est pas manipulable pour i_{d_s}.

Une manipulation est possible pour $\triangle_{\mu}^{C5}$ et i_{d_s} avec deux bases et une base initiale complète K_1, comme le montre l'exemple suivant : soient $K_1 = \{a \wedge b\}$, $K_2 = \{\neg b\}$, $\mu = a$ et $K_1' = \{a \wedge b, b \vee \neg a\}$. On a $\Delta_{\mu}^{C5}(\{K_1, K_2\}) \equiv a$, ainsi $\Delta_{\mu}^{C5}(\{K_1, K_2\}) \not\models K_1$. On a aussi $\Delta_{\mu}^{C5}(\{K_1', K_2\}) \equiv a \wedge b$. Donc $\Delta_{\mu}^{C5}(\{K_1', K_2\}) \models K_1$.

□

Pour les autres opérateurs à sélection de formules $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$, $\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}$, $\triangle_{\mu}^{\widehat{C4}}$, $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$, nous avons obtenu des résultats légèrement différents. Les résultats de non-manipulabilité sont en effet plus nombreux ici que dans le théorème précédent, ce qui n'est pas étonnant puisque ces opérateurs sont plus spécifiques, et donc laissent moins de place à la manipulation. En particulier, pour l'indice probabiliste, les opérateurs de combinaison $\triangle_{\mu}^{C1}$, $\triangle_{\mu}^{C3}$, $\triangle_{\mu}^{C4}$ et $\triangle_{\mu}^{C5}$ sont manipulables, alors que les résultats sont plus contrastés pour les opérateurs $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$, $\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}$, $\triangle_{\mu}^{\widehat{C4}}$ et $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$:

Proposition 37.

– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$ *est non manipulable pour* i_p *si et seulement si* $\#(E) = 2$.
– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}$ *est non manipulable pour* i_p *si et seulement si* $\#(E) = 2$ *et* $\mu \equiv \top$.
– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C4}}$ *est non manipulable pour* i_p.
– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ *est non manipulable pour* i_p *si et seulement si* $\#(E) = 2$.

Preuve:

– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$ est non manipulable pour i_p si et seulement si $\#(E) = 2$.
Supposons que $\#(E) = 2$. Nous allons montrer que $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$ et $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ (les deux cas sont groupés car ils sont similaires) sont non manipulables pour i_p. Tous les cas possibles sont successivement étudiés :
  – si K_1 est cohérent avec μ, alors il y a deux cas :

$$\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2\}) \equiv \triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(\{K_1, K_2\}) \equiv \begin{cases} K_1 \wedge K_2 \wedge \mu & \text{si cohérent,} \\ (K_1 \vee K_2) \wedge \mu & \text{sinon.} \end{cases}$$

    – dans le premier cas, si $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ est cohérent, $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2\}) \models K_1$ et $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(\{K_1, K_2\}) \models K_1$ donc i_p prend sa valeur maximale, et aucune manipulation n'est possible.
    – considérons le deuxième cas, i.e. $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ n'est pas cohérent. On a $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2\}) \equiv (K_1 \vee K_2) \wedge \mu$ (pour $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$, l'étude est similaire).
    Comme pour toute base K_1', par définition de $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$, on a $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2\}) \models \mu$ et comme on a $K_1 \wedge \mu \models \triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2\})$, l'inéquation suivante est vraie pour toute base K_1' :

$$\#([K_1] \cap [\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2\})]) \leq \#([K_1] \cap [\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2\})]).$$

    Deux cas sont possibles :

    1. si $K_1' \wedge K_2 \wedge \mu$ est cohérent, alors $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2\}) \equiv K_1' \wedge K_2 \wedge \mu$, ainsi $\#([K_1] \cap [\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2\})]) = 0$ est minimal (puisque $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ est incohérent) : on ne peut pas manipuler.
    2. si $K_1' \wedge K_2 \wedge \mu$ est incohérent, alors il y a deux cas :

(a) $K_1' \wedge \mu$ est incohérent et $K_2 \wedge \mu$ est incohérent. On a $\triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2\}) \equiv \mu$. Comme on a supposé $K_1 \wedge \mu$ cohérent, on a aussi $\triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2\}) \equiv K_1 \wedge \mu$. Ainsi :

$$i_p(K_1, \triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2\})) = \frac{\#([K_1] \cap [\mu])}{\#([\mu])},$$

et

$$i_p(K_1, \triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2\})) = \frac{\#([K_1] \cap [K_1 \wedge \mu])}{\#([K_1 \wedge \mu])}.$$

Comme les numérateurs des deux fractions coïncident, et que pour les dénominateurs on a $\#([K_1 \wedge \mu]) \leq \#([\mu])$, aucune manipulation n'est possible dans ce cas.

(b) $K_1' \wedge \mu$ est cohérent ou $K_2 \wedge \mu$ est cohérent. On a $\triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2\}) \equiv (K_1' \vee K_2) \wedge \mu$. Comme $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ est incohérent, on a

$$i_p(K_1, \triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2\})) = \frac{\#([K_1 \wedge K_1' \wedge \mu])}{\#([(K_1' \vee K_2) \wedge \mu])}.$$

On a également :

$$i_p(K_1, \triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2\})) = \frac{\#([K_1 \wedge \mu])}{\#([(K_1 \vee K_2) \wedge \mu])}.$$

A présent, comme $K_1' \wedge K_2 \wedge \mu$ est incohérent, on a $\#([(K_1' \vee K_2) \wedge \mu]) = \#([K_1' \wedge \mu]) + \#([K_2 \wedge \mu])$. De la même façon, comme $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ est incohérent, on a $\#([(K_1 \vee K_2) \wedge \mu]) = \#([K_1 \wedge \mu]) + \#([K_2 \wedge \mu])$. Supposons que

$$i_p(K_1, \triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2\})) > i_p(K_1, \triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2\})).$$

Cela est possible si et seulement si :

$$\frac{\#([K_1 \wedge K_1' \wedge \mu])}{\#([(K_1' \vee K_2) \wedge \mu])} > \frac{\#([K_1 \wedge \mu])}{\#([(K_1 \vee K_2) \wedge \mu])}.$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\#([K_1 \wedge K_1' \wedge \mu])}{\#([K_1' \wedge \mu]) + \#([K_2 \wedge \mu])} > \frac{\#([K_1 \wedge \mu])}{\#([K_1 \wedge \mu]) + \#([K_2 \wedge \mu])}.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\#([K_1 \wedge K_1' \wedge \mu])(\#([K_1 \wedge \mu]) + \#([K_2 \wedge \mu])) > \#([K_1 \wedge \mu])(\#([K_1' \wedge \mu]) + \#([K_2 \wedge \mu])).$$

En notant $a = \#([K_1 \wedge K_1' \wedge \mu])$ et $b = \#([K_2 \wedge \mu])$, alors il existe deux entiers naturels a' et a'' tels que $\#([K_1 \wedge \mu]) = a + a'$ et $\#([K_1' \wedge \mu]) = a + a''$. En remplaçant dans l'inéquation précédente, on obtient :

$$a(a + a' + b) > (a + a')(a + a'' + b)$$

Cela se simplifie en $0 > aa'' + a'a'' + a'c$, ce qui est impossible. Aucune manipulation n'est possible dans ce cas non plus.

– si K_1 n'est pas cohérent avec μ, alors, comme $\forall E', \triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(E') \models \mu$ et $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(E') \models \mu$, on a : $\forall E', i_p(K_1, \triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(E')) = 0$ et $i_p(K_1, \triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(E')) = 0$, donc aucune manipulation n'est possible.

L'exemple suivant montre que la non-manipulabilité pour i_p n'est pas vraie pour $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$ ou $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ lorsque trois bases (ou plus) sont considérées, la base initiale est complète et $\mu \equiv \top$. On considère $K_1 = \{a \wedge b\}, K_2 = \{a \wedge b\}$ et $K_3 = \{\neg a\}$, avec une contrainte d'intégrité $\mu \equiv \top$. Il y a deux ensembles cohérents maximaux dans $\textsc{maxcons}(\{K_1, K_2, K_3\}, \mu)$: $\{a \wedge b, \top\}$ et $\{\neg a, \top\}$. On a donc $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2, K_3\}) \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a)$. On obtient $i_p(K_1, \triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2, K_3\})) = \frac{1}{3}$. Si l'agent 1 donne $K_1' = \{\neg a \wedge b\}$ à la place de K_1, alors il y a encore deux ensembles cohérents maximaux $\{a \wedge b, \top\}$ et $\{\neg a \wedge b, \neg a, \top\}$ dans $\textsc{maxcons}(\{K_1', K_2, K_3\}, \mu)$, donc $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2, K_3\}) \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b)$. On a alors $i_p(K_1, \triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2, K_3\})) = \frac{1}{2}$, donc c'est un exemple de manipulation pour i_p de $\triangle_{\top}^{\widehat{C1}}$.

Comme $\triangle_{\top}^{\widehat{C1}} = \triangle_{\top}^{\widehat{C5}}$, cet exemple montre aussi la manipulabilité pour i_p de $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$.

– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}$ est non manipulable pour i_p si et seulement si $\#(E) = 2$ et $\mu \equiv \top$.

Comme $\triangle_{\top}^{\widehat{C1}} = \triangle_{\top}^{\widehat{C3}}$, il découle immédiatement de la preuve précédente pour $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$ que $\triangle_{\top}^{\widehat{C3}}$ est non manipulable pour i_p lorsque deux bases sont considérées, et que ce n'est plus le cas quand trois agents ou plus interviennent dans le processus de fusion.

Pour montrer qu'une manipulation est possible pour $\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}$ avec deux bases et une base initiale complète K_1, quand la contrainte d'intégrité μ n'est pas équivalente à $\top$, on considère l'exemple suivant : soient $K_1 = \{a \wedge b\}$, $K_2 = \{\neg a\}$, $\mu = \neg b$ et $K_1' = \{a\}$. On a $\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}(\{K_1, K_2\}) \equiv \neg a$, ce qui est incohérent avec K_1, donc $i_p(K_1, \triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}(\{K_1, K_2\})) = 0$. On a aussi $\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}(\{K_1', K_2\}) \equiv \top$, ce qui est cohérent avec K_1, donc $i_p(K_1, \triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}(\{K_1', K_2\})) > 0$.

– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C4}}$ est non manipulable pour i_p.

La preuve pour cet opérateur découle directement du fait que $\triangle_{\mu}^{\widehat{C4}} \equiv \Delta_{\mu}^{d_D, GMax}$ (car les modèles de $\Delta_{\mu}^{d_D, GMax}$ sont exactement les modèles qui satisfont un nombre maximal de bases si les bases sont interprétées conjonctivement), et on a déjà vu que cet opérateur est non manipulable (proposition 26).

– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ est non manipulable pour i_p si et seulement si $\#(E) = 2$.

La preuve pour $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ est similaire à la preuve pour $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$.

□

Pour les indices drastiques, les situations où on peut assurer la non-manipulabilité sont plus nombreuses :

Proposition 38.

– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$ *est non manipulable pour* i_{d_w} *et pour* i_{d_s}.
– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}$ *est non manipulable pour* i_{d_w} *(resp.* i_{d_s}*) si et seulement si* $\mu = \top$.
– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C4}}$ *est non manipulable pour* i_{d_w} *et pour* i_{d_s}.
– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ *est non manipulable pour* i_{d_w} *si et seulement si* $\begin{cases} \#(E) = 2, \\ \textit{ou} \\ \mu \equiv \top, \\ \textit{ou} \\ K \textit{ est complète.} \end{cases}$

– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ *est non manipulable pour* i_{d_s} *si et seulement si* $\begin{cases} \#(E) = 2, \\ \textit{ou} \\ \mu \equiv \top. \end{cases}$

Preuve:

– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$ est non manipulable pour i_{d_w} et pour i_{d_s}.
La non-manipulabilité de $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$ vient de la non-manipulabilité $\triangle_{\mu}^{C1}$ prouvée à la proposition 36, puisque $\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$ est une spécialisation de $\triangle_{\mu}^{C1}$.
– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}$ est non manipulable pour i_{d_w} (resp. i_{d_s}) si et seulement si $\mu \equiv \top$.
Comme $\triangle_{\top}^{C3}$ est non manipulable pour i_{d_w} et pour i_{d_s}, sa spécialisation $\triangle_{\top}^{\widehat{C3}}$ est également non-manipulable pour i_{d_w} et pour i_{d_s}.
Dans les exemples montrant la manipulation pour $\triangle_{\mu}^{C3}$ avec deux bases et une base initiale complète K_1, toutes les bases sont des singletons, donc les exemples restent valables pour $\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}$.
– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C4}}$ est non manipulable pour i_{d_w} et pour i_{d_s}.
La preuve pour cet opérateur découle directement du fait que $\triangle_{\mu}^{\widehat{C4}}$ est non manipulable pour l'indice probabiliste i_p, il est donc non manipulable pour les indices drastiques.
– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ est non manipulable pour i_{d_w} si et seulement si $\begin{cases} \#(E) = 2, \\ \text{ou} \\ \mu \equiv \top, \\ \text{ou} \\ K \text{ est complète.} \end{cases}$
Comme $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ n'est pas manipulable pour i_p avec deux bases, il est également non manipulable pour i_{d_w} dans ce cas (proposition 25).
Comme $\triangle_{\top}^{C5}$ n'est pas manipulable pour i_{d_w}, $\triangle^{\widehat{C5}}{}_{\top}$ est également non manipulable pour i_{d_w}.
Finalement, comme aucune manipulation n'est possible pour i_{d_w} avec $\triangle_{\mu}^{C5}$ quand la base initiale K_1 est complète (proposition 36), aucune manipulation n'est possible pour i_{d_w} avec $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ dans ce cas.
En revanche, un exemple de manipulation existe pour $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ si $\#(E) \neq 2$, $\mu \not\equiv \top$ et pour une base initiale K_1 non complète. On considère $K_1 = \{b\}$, $K_2 = \{\neg a\}$, $K_3 = \{a \wedge \neg b\}$, et $\mu = \{a\}$. On a $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(\{K_1, K_2, K_3\}) \equiv a \wedge \neg b$, donc $i_{d_w}(K_1, \triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(\{K_1, K_2, K_3\})) = 0$. Avec $K_1' = \{b \wedge a\}$, on a $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(\{K_1', K_2, K_3\}) \equiv a$, et $i_{d_w}(K_1, \triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(\{K_1', K_2, K_3\})) = 1$.
– $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ est non manipulable pour i_{d_s} si et seulement si $\begin{cases} \#(E) = 2, \\ \text{ou} \\ \mu \equiv \top. \end{cases}$
Comme $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ n'est pas manipulable pour i_p quand il y a deux bases dans E, il est également non manipulable pour i_{d_s} dans ce cas, puisque pour tout profil E, $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(E)$ est cohérent (proposition 25).
Comme $\triangle_{\top}^{C5}$ n'est pas manipulable pour i_{d_s}, $\triangle_{\top}^{\widehat{C5}}$ est également non manipulable pour i_{d_s} .
Finalement, un exemple de manipulation existe pour $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$ si $\#(E) \neq 2$ et $\mu \not\equiv \top$, même si la base initiale K_1 est complète : $K_1 = \{a \wedge b\}$, $K_2 = \{a \wedge b\}$, $K_3 = \{\neg a \vee \neg b\}$, et $\mu = \{a\}$. Il y a deux ensembles maximaux cohérents dans $\text{MAXCONS}(\{K_1, K_2, K_3\}, \top)$: $\{a \wedge b\}$ et $\{\neg a \vee \neg b\}$. On a donc $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(\{K_1, K_2, K_3\}) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$. On obtient $i_{d_s}(K_1, \triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(\{K_1, K_2, K_3\})) = 0$. Avec $K_1' = \{\neg a \wedge \neg b\}$, il y a deux ensembles maximaux cohérents dans $\text{MAXCONS}(\{K_1, K_2, K_3\}, \top)$:

$\{a \wedge b\}$ et $\{\neg a \wedge \neg b\}$. On obtient $\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(\{K_1', K_2, K_3\}) \equiv (a \wedge b)$, et $i_{d_s}(K_1, \triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}(\{K_1', K_2, K_3\})) = 1$.

□

3.3 Empêcher la manipulation : le cas des bases complètes

On s'intéresse ici à une restriction très spécifique : la situation où toutes les bases sont complètes. Bien que cette situation soit peu fréquente lorsque l'on utilise des bases de croyances usuelles, elle peut être imposé dans le cadre de la fusion de buts, en particulier pour empêcher toute manipulation. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à ce cas.

Proposition 39. *Les résultats de manipulabilité pour différents opérateurs de fusion dans le cas où toutes les bases sont complètes sont donnés dans le tableau 3.15. f représente une fonction d'agrégation quelconque, d est une distance quelconque, nm signifie non manipulable, m signifie manipulable même si $\#(E) = 2$ et $\mu \equiv \top$, m^* signifie manipulable même si soit $\#(E) = 2$ ou $\mu \equiv \top$, mais non manipulable si à la fois $\#(E) = 2$ et $\mu \equiv \top$. Enfin, $m^\top$ signifie manipulable même si $\#(E) = 2$, mais non manipulable lorsque $\mu \equiv \top$.*

Δ	i_p	i_{d_w}	i_{d_s}
$\Delta_{\mu}^{d_D,f}$	nm	nm	nm
$\Delta_{\mu}^{d,\Sigma}$	nm	nm	nm
$\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$	m	m	m^*
Δ_{μ}^{fm}	nm	nm	nm
Δ_{μ}^{b}	nm	nm	nm
$\triangle_{\mu}^{C1}$	m	nm	nm
$\triangle_{\mu}^{C3}$	m	$m^\top$	$m^\top$
$\triangle_{\mu}^{C4}$	m	m	m
$\triangle_{\mu}^{C5}$	m	nm	$m^\top$
$\triangle_{\mu}^{\widehat{C1}}$	nm	nm	nm
$\triangle_{\mu}^{\widehat{C3}}$	nm	nm	nm
$\triangle_{\mu}^{\widehat{C4}}$	nm	nm	nm
$\triangle_{\mu}^{\widehat{C5}}$	nm	nm	nm

TAB. 3.15 – Prévenir la manipulation : le cas des bases complètes.

Preuve:

1. La première ligne du tableau ($\Delta_{\mu}^{d_D,f}$) est une conséquence directe de la proposition 26.
2. La deuxième ligne du tableau ($\Delta_{\mu}^{d,\Sigma}$) est une conséquence directe de la proposition 29.
3. La troisième ligne du tableau ($\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$) vient de la preuve de la proposition 31.
4. La quatrième ligne du tableau (Δ_{μ}^{fm}) est une conséquence directe de la proposition 33.
5. La cinquième ligne du tableau (Δ_{μ}^{b}) est une conséquence directe de la proposition 34.

6. La première colonne de la sixième ligne ($\triangle_\mu^{C1}$ et i_p) vient de l'exemple suivant. Soient $K_1 = \{a, b\}$, $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$, $K'_1 = \{a \wedge b\}$ et $\mu = \top$. On a $\triangle_\mu^{C1}(\{K_1, K_2\}) \equiv \top$, ainsi $i_p(K_1, \triangle_\mu^{C1}(\{K_1, K_2\})) = \frac{1}{4}$, alors que l'on a $\triangle_\mu^{C1}(\{K'_1, K_2\}) \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$, et donc $i_p(K_1, \triangle_\mu^{C1}(\{K'_1, K_2\})) = \frac{1}{2}$.
   Les colonnes les plus à droite de la sixième ligne ($\triangle_\mu^{C1}$ et i_{d_w}, i_{d_s}) viennent directement de la proposition 36.
7. La première colonne de la septième ligne ($\triangle_\mu^{C3}$ et i_p) vient de la première colonne de la sixième ligne étant donné que l'exemple est tel que $\mu \equiv \top$ (dans ce cas les deux opérateurs coïncident).
   De façon similaire, pour la deuxième et la troisième colonne ($\triangle_\mu^{C3}$ et i_{d_w}, i_{d_s}) dans le cas $\mu \equiv \top$ ($\triangle_\top^{C3}$ coïncide avec $\triangle_\top^{C1}$). Dans le cas restant, $\triangle_\mu^{C3}$ est manipulable pour i_{d_w} même si $\#(E) = 2$ comme l'exemple suivant le montre : prenons $E = \{K_1, K_2\}$ avec $K_1 = \{a \wedge b \wedge c\}$, $K_2 = \{\neg a \wedge \neg b, c\}$ et $\mu = \neg b$; on a $\triangle_\mu^{C3}(E) \equiv \neg a \wedge \neg b \wedge c$, ce qui est incohérent avec K_1 ; si l'agent donne $K'_1 = \{a, b \wedge \neg c\}$ à la place de K_1, on obtient $\triangle_\mu^{C3}(\{K'_1, K_2\}) \equiv (a \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$, qui est cohérent avec K_1.
   Finalement, $\triangle_\mu^{C3}$ est manipulable pour i_{d_s} même si $\#(E) = 2$ quand $\mu \not\equiv \top$; soient $K_1 = \{a, \neg b\}$, $K_2 = \{\neg a, b\}$, $K'_1 = \{a \wedge \neg b\}$ et $\mu = \neg b$. On a $\triangle_\mu^{C3}(\{K_1, K_2\}) \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$, donc $i_{d_s}(K_1, \triangle_\mu^{C3}(\{K_1, K_2\})) = 0$, alors qu'on a $\triangle_\mu^{C3}(\{K'_1, K_2\}) \equiv a \wedge \neg b$, ce qui montre que $i_{d_s}(K_1, \triangle_\mu^{C3}(\{K'_1, K_2\})) = 1$.
8. La huitième ligne ($\triangle_\mu^{C4}$) vient de la preuve de la proposition 36.
9. La première colonne de la neuvième ligne ($\triangle_\mu^{C5}$ et i_p) vient de la première colonne de la sixième ligne étant donné que cet exemple est tel que $\mu \equiv \top$ (dans ce cas les deux opérateurs coïncident).
   La deuxième colonne ($\triangle_\mu^{C5}$ et i_{d_w}) vient directement de la proposition 36.
   La troisième colonne ($\triangle_\mu^{C5}$ et i_{d_s}) dans le cas $\mu \equiv \top$ vient de la troisième colonne de la sixième ligne ($\triangle_\top^{C5}$ coïncide avec $\triangle_\top^{C1}$).
   Finalement, $\triangle_\mu^{C5}$ est manipulable pour i_{d_s} même si $\#(E) = 2$ quand $\mu \not\equiv \top$; soit $K_1 = \{a, \neg b\}$, $K_2 = \{\neg a, b\}$, $K'_1 = \{a \wedge \neg b\}$ et $\mu = \neg b$. On a $\triangle_\mu^{C5}(\{K_1, K_2\}) \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$, donc $i_{d_s}(K_1, \triangle_\mu^{C5}(\{K_1, K_2\})) = 0$, alors que l'on a $\triangle_\mu^{C5}(\{K'_1, K_2\}) \equiv a \wedge \neg b$, ce qui montre que $i_{d_s}(K_1, \triangle_\mu^{C5}(\{K'_1, K_2\})) = 1$.
10. Finalement, il reste à considérer les opérateurs $\triangle_\mu^{\widehat{C}}$. On sait grâce à la proposition 35 que $\triangle_\mu^{\widehat{C4}}$ est non manipulable pour i_p (et donc pour i_{d_w} et i_{d_s}) puisque $\triangle_\mu^{C4}$ n'est pas manipulable pour i_p quand toutes les bases sont des singletons.
11. Intéressons-nous à présent à $\triangle_\mu^{\widehat{C1}}$, $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}$ et $\triangle_\mu^{\widehat{C5}}$. Comme toutes les bases sont complètes et peuvent être supposées être des singletons sans perte de généralité, on a :

$$\triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1, \ldots, K_n\}) \equiv \triangle_\mu^{\widehat{C5}}(\{K_1, \ldots, K_n\}) \equiv \begin{cases} (\bigvee_{i=1}^n K_i) \wedge \mu & \text{si cohérent,} \\ \mu & \text{sinon.} \end{cases}$$

   On a également :

$$\triangle_\mu^{\widehat{C3}}(\{K_1, \ldots, K_n\}) \equiv \begin{cases} (\bigvee_{i=1}^n K_i) \wedge \mu & \text{si cohérent,} \\ \bot \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Soit $\triangle_\mu^{\widehat{C}}$ un opérateur parmi $\triangle_\mu^{\widehat{C1}}$, $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}$ et $\triangle_\mu^{\widehat{C5}}$. Il y a deux cas :
   – $\triangle_\mu^{\widehat{C}}(E)$ cohérent. Il y a encore deux cas :

- $K_1 \models \neg\mu$. Comme pour tout profil E', on a $\triangle_\mu^{\widehat{C1}}(E') \models \mu$ et $\triangle_\mu^{\widehat{C5}}(E') \models \mu$, on a aussi $\triangle_\mu^{\widehat{C1}}(E') \wedge K_1$ incohérent et $\triangle_\mu^{\widehat{C5}}(E') \wedge K_1$ incohérent, ce qui prouve qu'aucune manipulation n'est possible pour i_p, et donc pour i_{d_w} et i_{d_s}. Dans le cas très spécifique que nous considérons ici (toutes les bases sont des singletons et sont complètes), on a également pour tout profil E', $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}(E') \models \mu$. En effet, chaque base de E' qui est conservée comme un élément de $\text{MAXCONS}(E', \top)$ doit satisfaire μ. De plus, si aucune base n'est conservée, $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}(E')$ est incohérent, ainsi $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}(E') \models \mu$ est trivialement vrai. L'argument précédent peut être utilisé pour montrer qu'aucune manipulation n'est possible avec $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}$ pour i_p, et donc pour i_{d_w} (et i_{d_s} sous l'hypothèse que $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}(E)$ est cohérent).
- $K_1 \models \mu$. On a nécessairement $\#([K_1] \cap [\triangle_\mu^{\widehat{C}}(\{K_1, \ldots, K_n\})]) = 1$. Par *raisonnement par l'absurde*. Une manipulation pour i_p est possible seulement si l'on trouve une base complète K'_1 telle que
$$K_1 \models \triangle_\mu^{\widehat{C}}(\{K'_1, \ldots, K_n\}) \tag{3.8}$$
et
$$\#([\triangle_\mu^{\widehat{C}}(\{K'_1, \ldots, K_n\})]) < \#([\triangle_\mu^{\widehat{C}}(\{K_1, \ldots, K_n\})]). \tag{3.9}$$
L'inégalité 3.9 implique que $K'_1 \models \neg\mu$. La condition 3.8 impose que $K_1 \models K'_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_n$. Comme $K_1 \models \mu$ alors que $K'_1 \models \neg\mu$, on a $K_1 \not\equiv K'_1$. En conséquence, il existe K_j ($j \in 2, \ldots, n$) telle que $K_1 \equiv K_j$. Comme K_j est un modèle de $\triangle_\mu^{\widehat{C}}(\{K'_1, \ldots, K_n\})$, l'inéquation (2) ne peut pas être satisfaite. Ainsi, $\triangle_\mu^{\widehat{C}}$ est non manipulable pour i_p, et donc pour i_{d_w}. Comme $\triangle_\mu^{\widehat{C}}(E)$ est supposé cohérent, aucune manipulation n'est possible pour i_{d_s}.

- $\triangle_\mu^{\widehat{C}}(E)$ incohérent. Cela est seulement possible pour $\triangle_\mu^{\widehat{C}} = \triangle_\mu^{\widehat{C3}}$ et nécessite que chaque K_i ($i \in 1, \ldots, n$) soit telle que $K_i \models \neg\mu$. Comme $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}(E)$ est incohérent, on a $i_p(K_1, \triangle_\mu^{\widehat{C3}}(E)) = 0$. Comme pour toute base K'_1 complète, K_1 n'est pas un modèle de $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}(\{K'_1, \ldots, K_n\})$, on a $i_p(K_1, \triangle_\mu^{\widehat{C3}}(\{K'_1, \ldots, K_n\})) = 0$ aussi. Cela montre que $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}$ est non manipulable pour i_p et donc pour i_{d_w}. Finalement, quand $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}(E)$ est incohérent, on a $\triangle_\mu^{\widehat{C3}}(E) \models K_1$, ce qui prouve qu'aucune manipulation n'est possible pour i_{d_s} également.

$\square$

Comme le montre la proposition 39, aucun opérateur parmi $\Delta_\mu^{d_H, GMax}$ et les opérateurs de combinaison n'interdit totalement la manipulation dans le cas particulier où deux bases complètes sont fusionnées. En revanche, tous les autres opérateurs sont non manipulables pour chacun des trois indices lorsque toutes les bases sont complètes.

3.4 Indice de Dalal

Nous avons déjà vu à plusieurs reprises que le fait que i_p soit basé sur un comptage permet une forme de graduation pour la notion correspondante de satisfaction, ce qui est très différent des indices drastiques, pour lesquels l'agent est soit pleinement satisfait, soit absolument pas. On peut penser à définir d'autres indices non drastiques. En particulier, dans le cas où un agent sait que le résultat de la fusion ne pourra pas être cohérent avec ses croyances/buts (par exemple si ses croyances/buts ne sont pas cohérents avec la contrainte d'intégrité), il peut quand même vouloir obtenir un résultat le plus proche possible de ses croyances/buts. La proximité peut être obtenue par une notion de distance et un indice de satisfaction possible serait l'« indice de Dalal » suivant :

Définition 37 (Indice de Dalal)**.** L'*indice de Dalal* est défini par :

$$i_{Dalal}(K, K_\Delta) = 1 - \frac{min(\{d_H(\omega, K_\Delta) \mid \omega \models K\})}{\#(\mathcal{P})}.$$

Exemple 35. *Considérons* $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$ *et deux bases* $K = \{a \wedge b\}$ *et* $K_\Delta = \{\neg a \wedge c\}$*.* K *a deux modèles* 110 *et* 111*, donc* $min(\{d_H(\omega, K_\Delta) \mid \omega \models K\}) = d_H(111, K_\Delta) = 1$*. On a alors* $i_{Dalal}(K, K_\Delta) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

La définition proposée suit une volonté d'homogénéité avec les autres indices : plus $i_{Dalal}(K, K_\Delta)$ est élevé, plus l'agent associé à K est satisfait. i_{Dalal} augmente de façon antimonotone avec la distance de Hamming entre les deux bases considérées, i.e. la distance minimale entre un modèle de la première base et un modèle de la seconde. Ainsi, cet indice prend sa valeur minimale 0 lorsque toutes les variables doivent changer de valeur pour obtenir un modèle de K_Δ à partir d'un modèle de K, alors qu'il prend sa valeur maximale 1 lorsque K est cohérent avec K_Δ (aucune modification n'est nécessaire).

Une observation directe est que $i_{Dalal}(K, K_\Delta) \geq i_{d_w}(K, K_\Delta)$, quelles que soient les bases K et K_Δ. Ainsi, déterminer la manipulabilité d'un profil E pour l'indice de Dalal étant donné un opérateur de fusion Δ et une contrainte d'intégrité μ n'a de sens que dans le cas où $K \wedge \Delta_\mu(E)$ n'est pas cohérent. En effet, dans le cas contraire, $i_{Dalal}(K, \Delta_\mu(E))$ prend sa valeur maximale 1 et aucune manipulation n'est possible.

L'indice de Dalal a un comportement assez différent des trois indices précédemment étudiés, puisque les opérateurs de fusion sont manipulables pour cet indice, même dans des situations très contraintes.

Proposition 40. *Les opérateurs* $\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$*,* $\Delta_\mu^{d_D,G_{Max}}$*,* $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ *et* $\Delta_\mu^{d_H,G_{Max}}$ *sont manipulables pour* i_{Dalal}*, même dans le cas où on fusionne deux bases complètes.*

Preuve:

- $\Delta_\mu^{d_D,\Sigma} = \Delta_\mu^{d_D,G_{Max}}$. On considère K_1 et K_2 données par $[K_1] = \{000\}$, $[K_2] = \{110\}$ et $\mu = a \vee b \vee c$ avec $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$. On a $[\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}(\{K_1, K_2\})] = \{110\}$ et $i_{Dalal}(K_1, \Delta_\mu^{d_D,\Sigma}(\{K_1, K_2\})) = 1 - \frac{2}{3}$. Avec K_1' donnée par$[K_1'] = \{001\}$, on obtient $[\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}(\{K_1', K_2\})] = \{110, 001\}$ et $i_{Dalal}(K_1, \Delta_\mu^{d_D,\Sigma}(\{K_1', K_2\})) = 1 - \frac{1}{3}$, ce qui donne un exemple de manipulation (les détails sont reportés dans le tableau 3.16).

ω	K_1	K_1'	K_2	$\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}(\{K_1, K_2\})$	$\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}(\{K_1', K_2\})$
000	0	1	1	1	2
001	1	0	1	2	**1**
010	1	1	1	2	2
011	1	1	1	2	2
100	1	1	1	2	2
101	1	1	1	2	2
110	1	1	0	**1**	**1**
111	1	1	1	2	2

TAB. 3.16 – Manipulation de $\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$ pour i_{Dalal} avec deux bases complètes.

- $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$. On considère K_1, K_2 et μ donnés par $[K_1] = \{000\}$, $[K_2] = \{110\}$ et $[\mu] = \{001, 011, 101, 110, 111\}$. On a $[\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})] = \{110\}$ et $i_{Dalal}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1, K_2\})) = 1 - \frac{2}{3}$. Avec K_1' donnée par $[K_1'] = \{001\}$, on obtient $[\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})] = \{110, 001, 011, 111\}$ et $i_{Dalal}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1', K_2\})) = 1 - \frac{1}{3}$, montrant la manipulation (les détails sont reportés dans le tableau 3.17).

ω	K_1	K'_1	K_2	$\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(\{K'_1,K_2\})$
000	0	1	2	2	3
001	1	0	3	4	**3**
010	1	2	1	2	3
011	2	1	2	4	**3**
100	1	2	1	2	3
101	2	1	2	4	**3**
110	2	3	0	**2**	**3**
111	3	2	1	4	**3**

TAB. 3.17 – Manipulation de $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ pour i_{Dalal} avec deux bases complètes.

– $\Delta_\mu^{d_H,G_{Max}}$. On considère K_1, K_2 et μ donnés par $[K_1] = \{0001\}$, $[K_2] = \{0111\}$ et $[\mu] = \{0000, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1100, 1111\}$. On a $[\Delta_\mu^{d_H,G_{Max}}(\{K_1,K_2\})] = \{0111\}$ et $i_{Dalal}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,G_{Max}}(\{K_1,K_2\})) = 1 - \frac{2}{4}$. Avec K'_1 donné par $[K'_1] = \{1000\}$, on obtient $[\Delta_\mu^{d_H,G_{Max}}(\{K'_1,K_2\})] = \{0000, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111\}$ et $i_{Dalal}(K_1, \Delta_\mu^{d_H,G_{Max}}(\{K'_1,K_2\})) = 1 - \frac{1}{4}$, montrant la manipulation (les détails sont reportés dans le tableau 3.18).

ω	K_1	K'_1	K_2	$\Delta_\mu^{d_H,G_{Max}}(\{K_1,K_2\})$	$\Delta_\mu^{d_H,G_{Max}}(\{K'_1,K_2\})$
0000	1	1	3	$(3,1)$	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$
0001	0	2	2	$(2,0)$	$(2,2)$
0010	2	2	2	$(2,2)$	$(2,2)$
0011	1	3	1	$(1,1)$	$(3,1)$
0100	2	2	2	$(2,2)$	$(2,2)$
0101	1	3	1	$(1,1)$	$(3,1)$
0110	3	3	1	$(3,1)$	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$
0111	2	4	0	$(2,0)$	$(4,0)$
1000	2	0	4	$(4,2)$	$(4,0)$
1001	1	1	3	$(3,1)$	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$
1010	3	1	3	$(3,3)$	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$
1011	2	2	2	$(2,2)$	$(2,2)$
1100	3	1	3	$(3,3)$	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$
1101	2	2	2	$(2,2)$	$(2,2)$
1110	4	2	2	$(4,2)$	$(2,2)$
1111	3	3	1	$(3,1)$	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$

TAB. 3.18 – Manipulation de $\Delta_\mu^{d_H,GMax}$ pour i_{Dalal} avec deux bases complètes.

$\square$

En revanche, pour les opérateurs à sélection de formules, on obtient un résultat de non-manipulabilité pour deux opérateurs :

Proposition 41. *Les opérateurs par intersection totale Δ^{fm} et basique Δ^b ne sont pas manipulables pour i_{Dalal}.*

Preuve:

– Soient E un profil, K une base de croyances, et μ une contrainte d'intégrité. Alors

$$\Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K\}) \equiv \begin{cases} \bigwedge E \wedge K \wedge \mu & \text{si cohérent,} \\ \mu & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\bigwedge E \wedge K \wedge \mu$ est cohérent, alors K est cohérent avec $\Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K\})$, donc

$d_H(K, \Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K\})) = 0$[4] et $i_{Dalal}(K, \Delta^{fm}(E \sqcup \{K\}))$ est maximal : on ne peut pas manipuler. Dans le cas contraire, si $\bigwedge E \wedge K \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors $\Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K\}) \equiv \mu$. Dans ce cas, quelle que soit la base K', on a $\Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K'\}) \models \mu$. De ce fait, $d_H(K, \mu) \leq d_H(K, \Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K'\}))$ ce qui rend toute manipulation impossible dans ce cas également.

– Soient E un profil, K une base de croyances, et μ une contrainte d'intégrité. Alors

$$\Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K\}) \equiv \begin{cases} \bigwedge E \wedge K \wedge \mu & \text{si cohérent, sinon} \\ (\bigvee E \vee K) \wedge \mu & \text{si cohérent, sinon} \\ \mu. & \end{cases}$$

Si $\bigwedge E \wedge K \wedge \mu$ ou $(\bigvee E \vee K) \wedge \mu$ sont cohérents, alors $d_H(K, \Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K\})) = 0$ et $i_{Dalal}(K, \Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K\}))$ est maximal : on ne peut pas manipuler. Dans le cas contraire, $\Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K\}) \equiv \mu$. Dans ce cas, quelle que soit la base K', on a $\Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K'\}) \models \mu$. De ce fait, $d_H(K, \mu) \leq d_H(K, \Delta^{fm}(E \sqcup \{K'\}))$ ce qui rend toute manipulation impossible dans ce cas également.

□

Quant aux opérateurs de combinaison, ils sont tous manipulables pour i_{Dalal} :

Proposition 42. *Les opérateurs $\triangle_\mu^{\widehat{C}}$ (et donc les opérateurs $\triangle_\mu^{C}$) sont manipulables pour i_{Dalal}, même dans le cas où on fusionne deux bases complètes.*

Preuve:
On considère les bases complètes $K_1 = \{a \wedge b\}$ et $K_2 = \{\neg a \wedge \neg b\}$, avec $\mu = \neg(a \wedge b)$. On a $\textsc{maxcons}(\{K_1, K_2\}, \mu) = \{\{\neg a \wedge \neg b, \neg(a \wedge b)\}\} = \textsc{maxcons}_{card}(\{K_1, K_2\}, \mu)$ et $\textsc{maxcons}(\{K_1, K_2\}, \top) = \{\{\neg a \wedge \neg b, \top\}, \{a \wedge b, \top\}\}$, ainsi $\triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1, K_2\}) \equiv \triangle_\mu^{\widehat{C3}}(\{K_1, K_2\}) \equiv \triangle_\mu^{\widehat{C4}}(\{K_1, K_2\}) \equiv \triangle_\mu^{\widehat{C5}}(\{K_1, K_2\}) \equiv \neg a \wedge \neg b$. On obtient $i_{Dalal}(K_1, \triangle_\mu^{\widehat{C}}(\{K_1, K_2\})) = 1 - \frac{2}{2} = 0$.
Avec $K_1' = \{\neg a \wedge b\}$, on a $\textsc{maxcons}(\{K_1', K_2\}, \mu) = \{\{\neg a \wedge \neg b, \neg(a \wedge b)\}, \{\neg a \wedge b, \neg(a \wedge b)\}\} = \textsc{maxcons}_{card}(\{K_1', K_2\}, \mu)$ et $\textsc{maxcons}(\{K_1', K_2\}, \top) = \{\{\neg a \wedge \neg b, \top\}, \{\neg a \wedge b, \top\}\}$. Ainsi $\triangle_\mu^{\widehat{C1}}(\{K_1', K_2\}) \equiv \triangle_\mu^{\widehat{C3}}(\{K_1', K_2\}) \equiv \triangle_\mu^{\widehat{C4}}(\{K_1', K_2\}) \equiv \triangle_\mu^{\widehat{C5}}(\{K_1', K_2\}) \equiv (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \equiv \neg a$.
On obtient $i_{Dalal}(K_1, \triangle_\mu^{\widehat{C}}(\{K_1', K_2\})) = 1 - \frac{1}{2}$, montrant la manipulation.

□

3.5 Stratégies restreintes

Nous avons déjà évoqué auparavant l'existence de situations où les agents participant au processus de fusion ont des informations sur les croyances/buts véritables des autres agents. Par exemple, dans un cadre de résolution coopérative de problèmes, il peut être décidé que lorsqu'un agent est capable de répondre à une requête au bout d'un temps limité, il doit communiquer sa réponse aux autres agents. A l'opposé, le protocole de communication peut l'obliger à informer les autres agents qu'il est définitivement incapable de répondre à la demande. De tels échanges d'informations permettent aux autres agents d'avoir une vue partielle des modèles ou des contre-modèles des véritables croyances ou buts de l'agent, et si cela vient en contradiction avec la base reportée, l'agent manipulateur peut être démasqué (ce qui peut être gênant pour lui).

[4]Par souci de simplification, on note $d_H(K, \Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K\})$ pour $min_{\omega \models K, \omega' \models \Delta_\mu^{fm}(E \sqcup \{K\})} d_H(\omega, \omega')$.

On considère ici deux restrictions sur les stratégies autorisées (et les notions correspondantes de manipulation) : la manipulation par érosion (resp. dilatation) est obtenue lorsque la base reportée K' est nécessairement logiquement plus forte (resp. plus faible) que la base réelle K. La manipulation par érosion (resp. dilatation) est possible pour l'agent manipulateur lorsque les autres agents ont seulement accès à un sous-ensemble des contre-modèles (resp. modèles) des véritables croyances ou buts.

Définition 38.

– Un opérateur Δ est *manipulable par érosion* pour un indice i s'il existe un profil E, une contrainte d'intégrité μ, deux bases de croyances K et K' avec $K' \models K$, tels que :

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})) < i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})).$$

– Un opérateur Δ est *manipulable par dilatation* pour un indice i s'il existe un profil E, une contrainte d'intégrité μ, deux bases de croyances K et K' avec $K \models K'$, tels que :

$$i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\})) < i(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'\})).$$

Le premier résultat illustre l'impossibilité d'une manipulation par dilatation pour les opérateurs à sélection de modèles :

Proposition 43. *Soient d une pseudo-distance et f une fonction d'agrégation quelconques. $\Delta_\mu^{d,f}$ est non manipulable par dilatation pour chacun des indices i_p, i_{d_w} et i_{d_s}.*

Preuve:
Grâce à la proposition 25, il est suffisant de montrer que $\Delta_\mu^{d,f}$ n'est pas manipulable pour i_p. *Raisonnement par l'absurde*. On suppose qu'il existe un opérateur $\Delta_\mu^{d,f}$, où d et f sont respectivement une pseudo-distance et une fonction d'agrégation, qui est manipulable par dilatation pour i_p. Avec cette hypothèse, on peut trouver une contrainte d'intégrité μ, un profil E, deux bases K et K' avec $K \models K'$, tels que $i_p(K, \Delta_\mu^{d,f}(\{K\} \sqcup E)) < i_p(K, \Delta_\mu^{d,f}(\{K'\} \sqcup E))$. En utilisant la notation $E \bigtriangleup_\mu K$ plus légère pour $\Delta_\mu^{d,f}(\{K\} \sqcup E)$, on a :

$$\frac{\#([K] \cap [E \bigtriangleup_\mu K])}{\#([E \bigtriangleup_\mu K])} < \frac{\#([K] \cap [E \bigtriangleup_\mu K'])}{\#([E \bigtriangleup_\mu K'])}.$$

Comme $K \models K'$, pour toute pseudo-distance d, on a $\forall \omega \in \mathcal{W}, d(\omega, K) \geq d(\omega, K')$. Donc, pour toute fonction d'agrégation f (croissante) :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, d(\omega, E \sqcup \{K\}) \geq d(\omega, E \sqcup \{K'\}). \tag{3.10}$$

On note $d_{min}(E \sqcup_\mu \{K\}) = min(\{d(\omega, E \sqcup \{K\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq)$. Avec (3.10), on peut immédiatement déduire : $d_{min}(E \sqcup_\mu \{K\}) \geq d_{min}(E \sqcup_\mu \{K'\})$. Deux cas sont à considérer :

– $d_{\min}(E \sqcup_\mu \{K\}) > d_{min}(E \sqcup_\mu \{K'\})$ (*).
Si ω_1 est un modèle de $K \wedge \mu$ alors, comme $K \models K'$, $d(\omega_1, K) = d(\omega_1, K') = 0$, donc $d(\omega_1, E \sqcup \{K\}) = d(\omega_1, E \sqcup \{K'\})$. Si en plus ω_1 est un modèle de $E \bigtriangleup_\mu K'$, alors $d(\omega_1, E \sqcup \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu \{K'\})$ et $d(\omega_1, E \sqcup \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu \{K'\})$. Par définition du min, on a $d(\omega_1, E \sqcup \{K\}) \geq d_{min}(E \sqcup_\mu \{K\})$, puisque $\omega_1 \models \mu$. Alors on peut conclure que $d_{min}(E \sqcup_\mu \{K\}) \leq d_{min}(E \sqcup_\mu \{K'\})$, ce qui contredit (*). Ainsi, aucun modèle de $K \wedge \mu$ n'est un modèle de $E \bigtriangleup_\mu K'$. En conséquence, $i_p(K, E \bigtriangleup_\mu K') = 0$ et est minimal, ce qui interdit toute manipulation pour $\Delta_\mu^{d,f}$. Donc, on peut exclure le cas (*).

– $d_{min}(E \sqcup_\mu \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu \{K'\})$ (**).
Si ω est un modèle de $E \triangle_\mu K$, alors on a à la fois $\omega \models \mu$ et $d(\omega, E \sqcup \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu \{K\})$. En conséquence, $d(\omega, E \sqcup \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu \{K'\})$ avec l'équation (**). De plus, avec l'inéquation (3.10), on peut déduire que $d(\omega, E \sqcup \{K\}) \geq d(\omega, E \sqcup \{K'\})$. Ainsi, $d(\omega, E \sqcup \{K'\}) \leq d_{min}(E \sqcup_\mu \{K'\})$. Comme ω est un modèle de μ et que $d(\omega, E \sqcup \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu \{K'\})$, on peut finalement déduire que ω est un modèle de $E \triangle_\mu K'$ également. Donc tout modèle de $E \triangle_\mu K$ est un modèle de $E \triangle_\mu K'$ et :

$$\#([E \triangle_\mu K]) \leq \#([E \triangle_\mu K']). \tag{3.11}$$

On peut aussi en déduire que tout modèle de $E \triangle_\mu K$ qui est un modèle de $K \wedge \mu$ est un modèle de $E \triangle_\mu K'$, donc :

$$\#([K] \cap [E \triangle_\mu K]) \leq \#([K] \cap [E \triangle_\mu K']).$$

De plus, si $\omega_1 \models K \wedge \mu$ est un modèle de $E \triangle_\mu K'$, alors on a à la fois :
– $d(\omega_1, E \sqcup \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu \{K\})$ avec (**) et
– comme $K \models K'$ et $\omega_1 \models K$, on a $\omega_1 \models K'$. Donc $d(\omega_1, K) = d(\omega_1, K') = 0$ et $d(\omega_1, E \sqcup \{K\}) = d(\omega_1, E \sqcup \{K'\})$.

On obtient : $d(\omega_1, E \sqcup \{K\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu \{K\})$ et $\omega_1 \models \mu$, donc ω_1 est un modèle de $E \triangle_\mu K$. On vient de montrer que tout modèle de $K \wedge \mu$ qui est un modèle de $E \triangle_\mu K'$ est également un modèle de $E \triangle_\mu K$ donc on peut écrire : $\#([K] \cap [E \triangle_\mu K]) \geq \#([K] \cap [E \triangle_\mu K'])$. Alors on obtient :

$$\#([K] \cap [E \triangle_\mu K]) = \#([K] \cap [E \triangle_\mu K']). \tag{3.12}$$

Avec (3.11) et (3.12), on obtient immédiatement :

$$\frac{\#([K] \cap [E \triangle_\mu K])}{\#([E \triangle_\mu K])} \geq \frac{\#([K] \cap \#([E \triangle_\mu K'])}{\#([E \triangle_\mu K'])}. \tag{3.13}$$

En conséquence, $i_p(K, \Delta_\mu^{d,f}(\{K\} \sqcup E) \geq i_p(K, \Delta_\mu^{d,f}(\{K'\} \sqcup E))$. Cette inéquation montre que $\Delta_\mu^{d,f}$ n'est pas manipulable pour i_p, ce qui contredit l'hypothèse. Le cas (**) doit donc être écarté également, ce qui conclut la preuve.

□

Ce résultat doit être comparé au cas général (développé dans les sections précédentes) où la plupart des opérateurs sont manipulables.

On obtient des résultats très différents pour la manipulation par érosion. On peut en effet trouver des profils manipulables en utilisant une stratégie par érosion (par exemple l'exemple récurrent). Ce qui est intéressant, c'est que, dans certaines situations, s'intéresser uniquement à la manipulation par érosion peut être suffisant pour prouver la non-manipulabilité du profil. En effet, lorsque d est une distance quelconque, Σ est la fonction d'agrégation utilisée et qu'un des indices drastiques i_d est considéré, $\Delta_\mu^{d,\Sigma}$ est manipulable pour i_d si et seulement si il est manipulable par érosion pour i_d :

Proposition 44. *Soit d une distance quelconque. Si $\Delta_\mu^{d,\Sigma}$ est manipulable pour i_{d_w} (resp. i_{d_s}), alors il est manipulable par érosion pour i_{dw} (resp. i_{ds}).*

Preuve:
On prouve d'abord un lemme très utile :

Lemme 45. *Soit d une pseudo-distance et f une fonction d'agrégation. Si un profil E est manipulable par K pour i_{d_w} (resp. i_{d_s}) étant donné $\Delta_\mu^{d,f}$ et μ, alors il existe une base complète K'_ω telle que :*

$$i_{d_w}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'_\omega\})) > i_{d_w}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\}))$$

(resp. $i_{d_s}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K'_\omega\})) > i_{d_s}(K, \Delta_\mu(E \sqcup \{K\}))$).

Preuve:

Indice drastique faible. On suppose que $\Delta_\mu^{d,f}$ est manipulable pour i_{d_w}, i.e. on peut trouver une contrainte d'intégrité μ, un profil $E = \{K_1, \dots, K_n\}$, et deux bases K et K' tels que :

$$i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,f}(\{K\} \sqcup E)) < i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,f}(\{K'\} \sqcup E)). \tag{3.14}$$

Ce qui est équivalent à : $i_{d_w}(K, E \bigtriangleup_\mu K) = 0$ et $i_{d_w}(K, E \bigtriangleup_\mu K') = 1$, où $\Delta_\mu^{d,f}(\{K\} \sqcup E)$ est noté $E \bigtriangleup_\mu K$ pour simplifier les notations.

L'inégalité (3.15) vient de $i_{d_w}(K, E \bigtriangleup_\mu K) = 0$: aucun modèle de K n'est un modèle de $E \bigtriangleup_\mu K$.

$$\forall \omega \models K \wedge \mu, \exists \omega' \models (\neg K) \wedge \mu, d(\omega', E \sqcup \{K\}) < d(\omega, E \sqcup \{K\}). \tag{3.15}$$

Comme dans (3.15) le choix de ω' peut être fait indépendamment de ω, (3.15) est équivalent à :

$$\exists \omega' \models (\neg K) \wedge \mu, \forall \omega \models K \wedge \mu, d(\omega', E \sqcup \{K\}) < d(\omega, E \sqcup \{K\}). \tag{3.16}$$

L'inégalité (3.17) vient de $i_{d_w}(K, E \bigtriangleup_\mu K') = 1$: il y a au moins un modèle de K dans ceux de $E \bigtriangleup_\mu K'$:

$$\exists \omega_1 \models K \wedge \mu, \forall \omega \models \mu, d(\omega_1, E \sqcup \{K'\}) \leq d(\omega, E \sqcup \{K'\}). \tag{3.17}$$

Soit $\omega'' \models K'$ tel que $d(\omega_1, K') = d(\omega_1, \omega'')$. On considère la base complète $K''_{\omega''}$ telle que $[K''_{\omega''}] = \{\omega''\}$. On va montrer dans le reste de la preuve que $\Delta_\mu^{d,f}$ est manipulable avec cette base. Si l'agent dont les croyances sont K donne $K''_{\omega''}$ comme base à la place de K, alors, comme $d(\omega_1, K''_{\omega''}) = d(\omega_1, K')$, on a :

$$d(\omega_1, E \sqcup \{K''_{\omega''}\}) = d(\omega_1, E \sqcup \{K'\}), \tag{3.18}$$

et donc avec (3.17) et (3.18) :

$$\forall \omega \models \mu, d(\omega_1, E \sqcup \{K''_{\omega''}\}) \leq d(\omega, E \sqcup \{K'\}), \tag{3.19}$$

De plus, comme la fonction d'agrégation f est croissante (par définition) et comme $K''_{\omega''} \models K'$, on a $\forall \omega \models \mu, d(\omega, E \sqcup \{K'\}) \leq d(\omega, E \sqcup \{K''_{\omega''}\})$, donc on obtient directement avec (3.19) :

$$\forall \omega \models \mu : d(\omega_1, E \sqcup \{K''_{\omega''}\}) \leq d(\omega, E \sqcup \{K''_{\omega''}\}). \tag{3.20}$$

Donc ω_1 est un modèle de $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K''_{\omega''}\})$ et on a $i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,f}(\{K''_{\omega''}\} \sqcup E)) = 1$ et $i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,f}(\{K\} \sqcup E)) < i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,f}(\{K''_{\omega''}\} \sqcup E))$. Cela prouve que $\Delta_\mu^{d,f}$ est manipulable pour une base complète $K''_{\omega''}$.

Indice drastique fort. Supposons qu'un opérateur $\Delta_\mu^{d,f}$, où d est une pseudo-distance et f une fonction d'agrégation, soit manipulable pour l'indice drastique fort i_{d_s}. Alors on peut trouver une contrainte d'intégrité μ, un profil E et deux bases K et K' tels que :

$$i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K\})) < i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K'\})).$$

Cela implique que $i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K\})) = 0$, et $i_{d_s}(K,\ \Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K'\})) = 1$. Cela signifie, par définition de cet indice, que $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K\}) \not\models K$, et $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K'\}) \models K$.

Etant donné un modèle ω_1 de $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K'\})$ et un modèle ω_2 de K' tels que $d(\omega_1, K') = d(\omega_1, \omega_2)$, on définit K''_{ω_2} par $[K''_{\omega_2}] = \{\omega_2\}$. Alors on a $d(\omega_1, K''_{\omega_2}) = d(\omega_1, K')$ et $d(\omega_1, E \sqcup \{K''_{\omega_2}\}) = d(\omega_1, E \sqcup \{K'\})$.

On note $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K'\}) = min(\{d(\omega, E \sqcup \{K'\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq)$. Comme ω_1 est un modèle de $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K'\})$, on a $d(\omega_1, E \sqcup \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K'\})$.

Ainsi :

$$d(\omega_1, E \sqcup \{K''_{\omega_2}\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K'\}). \tag{3.21}$$

Par définition du min et comme $\omega_1 \models \mu$, on a aussi : $d(\omega_1, E \sqcup \{K''_{\omega_2}\}) \geq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K''_{\omega_2}\})$. On obtient :

$$d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K'\}) \geq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K''_{\omega_2}\}). \tag{3.22}$$

D'un autre côté, comme $K''_{\omega_2} \models K'$, on a : $\forall \omega \in \mathcal{W}, d(\omega, K') \leq d(\omega, K''_{\omega_2})$. La fonction d'agrégation f est croissante, donc on peut écrire :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, d(\omega, E \sqcup \{K'\}) \leq d(\omega, E \sqcup \{K''_{\omega_2}\}), \tag{3.23}$$

et donc $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K'\}) \leq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K''_{\omega_2}\})$. Avec (3.22) on obtient $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K''_{\omega_2}\})$. Avec (3.21), on obtient $d(\omega_1, E \sqcup \{K''_{\omega_2}\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K''\})$. Comme $\omega_1 \models \mu$, on conclut que ω_1 est également un modèle de $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K''_{\omega_2}\})$.

Soit ω un modèle de $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K''_{\omega_2}\})$. Alors $\omega \models \mu$ et $d(\omega, E \sqcup \{K''_{\omega_2}\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K''_{\omega_2}\})$.

Donc, comme $d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K''_{\omega_2}\})$, on a $d(\omega, E \sqcup \{K''_{\omega_2}\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K'\})$. De (3.23), on déduit que $d(\omega, E \sqcup \{K'\}) \leq d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K'\})$.

Donc, par définition du min on a $d(\omega, E \sqcup \{K'\}) = d_{min}(E \sqcup_\mu^{d,f} \{K'\})$.

Cela implique que ω est également un modèle de $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K'\})$ (puisque $\omega \models \mu$). On vient de montrer que tout modèle de $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K''_{\omega_2}\})$ est un modèle de $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K'\})$, donc on peut écrire : $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K''_{\omega_2}\}) \models \Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K'\})$. Comme on a $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K'\}) \models K$, on peut inférer que $\Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K''_{\omega_2}\}) \models K$ et donc $i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,f}(E \sqcup \{K''_{\omega_2}\})) = 1$.

On obtient donc une manipulation pour i_{d_s} avec une base complète K''_{ω_2}, ce qui complète la preuve du lemme.

□

On peut à présent donner une preuve pour la proposition principale :

Indice drastique faible. *Raisonnement par l'absurde*. On suppose que $\Delta_\mu^{d,\Sigma}$ est un opérateur manipulable et qu'il n'est pas manipulable par érosion. Alors on peut trouver une contrainte d'intégrité μ, un profil E, et deux bases K et K' avec $K' \not\models K$ tels que :

$$i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\})) < i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K'\})).$$

Le lemme 45 montre que l'on peut supposer $[K'] = \{\omega'_1\}$ complète ; il vient donc :

$$i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\})) < i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{\omega'_1\})).$$

Comme l'indice drastique faible ne prend que les valeurs 0 et 1, on a :

$$i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\}) = 0 \tag{3.24}$$

$$i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{\omega_1'\}) = 1.$$

Cela signifie qu'il n'existe aucun modèle de $K \wedge \mu$ qui est un modèle de $\Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\})$, et qu'il y a au moins un modèle ω_1 de $K \wedge \mu$ qui est un modèle de $\Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{\omega_1'\})$. On peut exprimer ces faits par deux inéquations :

$$\forall \omega \models K \wedge \mu, \exists \omega' \models \neg K \wedge \mu, d(\omega', E \sqcup \{K\}) < d(\omega, E \sqcup \{K\})$$

et :

$$\exists \omega_1 \models K \wedge \mu, \forall \omega \models \mu, d(\omega_1, E \sqcup \{\omega_1'\}) \leq d(\omega, E \sqcup \{\omega_1'\}).$$

Ainsi :

$$\exists \omega_1 \models K \wedge \mu, \forall \omega \models \mu, d(\omega_1, \omega_1') + d(\omega_1, E) \leq d(\omega, \omega_1') + d(\omega, E) \tag{3.25}$$

On définit à présent une nouvelle base $K''_{\omega_1} = \{\omega_1\}$. Comme on a supposé que l'opérateur n'est pas manipulable par érosion et comme $K''_{\omega_1} \models K$, on peut en déduire qu'il n'est pas manipulable pour i_{d_w} avec K''_{ω_1} : $i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\})) \geq i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K''_{\omega_1}\}))$. Cela implique que :

- soit $i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\})) = 1$,
- soit $i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\})) = i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K''_{\omega_1}\})) = 0$.

Grâce à l'équation (3.24), qui établit que $i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\})) = 0$, on peut inférer que $i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K''_{\omega_1}\})) = 0$ et on a :

$$\forall \omega \models K \wedge \mu, \exists \omega' \models \neg K \wedge \mu, d(\omega', E \sqcup \{K''_{\omega_1}\}) < d(\omega, E \sqcup \{K''_{\omega_1}\}).$$

Comme $K''_{\omega_1} = \{\omega_1\}$ et que le choix de ω' peut être fait indépendamment de ω_1, on a $\exists \omega_2 \models (\neg K) \wedge \mu, \forall \omega \models K \wedge \mu, d(\omega_2, E \sqcup \{\omega_1\}) < d(\omega, E \sqcup \{\omega_1\})$, c'est-à-dire :

$$\exists \omega_2 \models \neg K \wedge \mu, \forall \omega \models K \wedge \mu, d(\omega_2, \omega_1) + d(\omega_2, E) < d(\omega, \omega_1) + d(\omega, E).$$

En particulier, cette inéquation est vraie pour $\omega = \omega_1$, parce que $\omega_1 \models K \wedge \mu$. Ainsi :

$$d(\omega_2, \omega_1) + d(\omega_2, E) < d(\omega_1, \omega_1) + d(\omega_1, E).$$

Comme $d(\omega_1, \omega_1) = 0$, on obtient finalement :

$$d(\omega_2, \omega_1) + d(\omega_2, E) < d(\omega_1, E). \tag{3.26}$$

D'un autre côté, comme $\omega_2 \models \mu$, avec (3.25), on obtient :

$$d(\omega_1, \omega_1') + d(\omega_1, E) \leq d(\omega_2, \omega_1') + d(\omega_2, E). \tag{3.27}$$

En additionnant (3.26) et (3.27) membre à membre, on obtient :

$$d(\omega_2, \omega_1) + d(\omega_2, E) + d(\omega_1, \omega_1') + d(\omega_1, E) < d(\omega_1, E) + d(\omega_2, \omega_1') + d(\omega_2, E).$$

En simplifiant par $d(\omega_1, E)$ et $d(\omega_2, E)$, on a :

$$d(\omega_2, \omega_1) + d(\omega_1, \omega_1') < d(\omega_2, \omega_1').$$

Cela contredit l'inégalité triangulaire. Ainsi, si une manipulation est possible, elle est possible par érosion avec une base complète $[K''_{\omega_1}] = \{\omega_1\}$.

Indice drastique fort. Supposons que $\Delta_\mu^{d,\Sigma}$ soit manipulable pour i_{d_s}. Alors, on peut trouver un profil E, une contrainte d'intégrité μ et deux bases K et K' tels que :

$$i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\})) < i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K'\})).$$

Cela implique que :

$$i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\}) = 0 \tag{3.28}$$

et

$$i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K'\}) = 1.$$

Cela signifie qu'il y a au moins un modèle de $\Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\})$ qui n'est pas un modèle de K, et que tout modèle de $\Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K'\})$ est un modèle de $K \wedge \mu$. Considérons un modèle ω_1 de $\Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K'\})$. On peut écrire que $\omega_1 \models K \wedge \mu$ et :

$$\forall \omega \models \mu, d(\omega_1, E \sqcup \{K'\}) \leq d(\omega, E \sqcup \{K'\}).$$

Alors on a :

$$\forall \omega \models \mu, d(\omega_1, K') + d(\omega_1, E) \leq d(\omega, K') + d(\omega, E).$$

Définissons $[K''_{\omega_1}] = \{\omega_1\}$ et montrons qu'il y a manipulation avec cette base. On suppose que l'on peut trouver $\omega'' \models \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K''_{\omega_1}\})$ t.q. $\omega'' \not\models K$. Comme $\omega'' \models \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{\omega_1\})$, on a $\omega'' \models \mu$ et

$$d(\omega", E \sqcup \{\omega_1\}) \leq d(\omega_1, E \sqcup \{\omega_1\}),$$

et donc :

$$d(\omega", \omega_1) + d(\omega", E) \leq d(\omega_1, E)$$

(comme $d(\omega_1, \omega_1) = 0$).
On sait que $\omega'' \not\models K$ et $\omega'' \models \mu$, donc on peut déduire que $\omega'' \not\models \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K'\})$ (sinon on devrait avoir $\omega'' \models K$, puisque $\Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K'\}) \models K$). Comme ω_1 est un modèle de $\Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K'\})$, on a :

$$d(\omega", E \sqcup \{K'\}) > d(\omega_1, E \sqcup \{K'\}).$$

De façon équivalente :

$$d(\omega", K') + d(\omega", E) > d(\omega_1, K') + d(\omega_1, E).$$

Comme $d(\omega_1, E) \geq d(\omega", \omega_1) + d(\omega", E)$, on obtient :

$$d(\omega", K') + d(\omega", E) > d(\omega_1, K') + d(\omega", \omega_1) + d(\omega'', E).$$

En simplifiant cette équation par $d(\omega", E)$, on trouve :

$$d(\omega", K') > d(\omega_1, K') + d(\omega", \omega_1).$$

Si ω_2 est un modèle de K' tel que $d(\omega_1, K') = d(\omega_1, \omega_2)$, on a :

$$d(\omega", K') > d(\omega_1, \omega_2) + d(\omega", \omega_1),$$

et finalement, comme $d(\omega", \omega_2) \geq d(\omega", K')$ par définition du min, on obtient :

$$d(\omega", \omega_2) > d(\omega_1, \omega_2) + d(\omega", \omega_1).$$

Cela est en contradiction avec l'inégalité triangulaire.

On a montré que tout modèle de $\Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K''_{\omega_1}\})$ est un modèle de K. Donc $i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K''_{\omega_1}\}) = 1$. Comme $i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\}) = 0$ avec (3.28), on a :

$$i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\})) < i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K''_{\omega_1}\})),$$

et une manipulation par érosion avec une base complète est possible.

□

Ce résultat a un corollaire, qui montre qu'il est suffisant de s'intéresser à chaque base complète qui implique K pour déterminer si un profil E est manipulable par une base K pour i_{d_w} :

Corollaire 46. *Un profil de croyances E est manipulable par K pour i_{d_w} (resp. i_{d_s}) étant donné $\Delta_\mu^{d,\Sigma}$ et μ si et seulement si la manipulation est possible en utilisant une base complète $K_\omega \models K$, i.e. il existe $K_\omega \models K$ telle que $i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K_\omega\})) > i_{d_w}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\}))$ (resp. $i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K_\omega\})) > i_{d_s}(K, \Delta_\mu^{d,\Sigma}(E \sqcup \{K\}))$).*

Chapitre 4

Travaux connexes

4.1 Manipulation pour la fusion

Une étude de la manipulation de certains opérateurs de fusion d'OCF est décrite dans [MGC01]. Le cadre de travail considéré dans cet article est clairement distinct de celui utilisé dans notre travail. Tout d'abord, les agents fournissent des relations de préférence complètes (encodées comme des *fonctions ordinales conditionnelles* ou OCF). De plus, les opérateurs de fusion considérés échappent au théorème de Gibbard-Satterthwaite (ainsi qu'au théorème d'Arrow) parce qu'une hypothèse de commensurabilité entre les préférences des agents est faite (la même remarque s'applique aussi à la fusion de bases possibilistes définie dans [BDKP02]). L'hypothèse de commensurabilité a un sens dans de nombreuses situations, mais lorsque l'on traite des préférences d'agents, elle doit être utilisée avec précaution. En effet, pour des agents humains, on considère généralement en Théorie du Choix Social que cette hypothèse est très forte : les préférences humaines sont parfois difficilement comparables, l'intensité avec laquelle x est préféré à y n'est pas forcément identique pour tous les agents.

La notion de manipulation et les opérateurs de fusion de [MGC01] sont définis dans le cadre de travail des fonctions ordinales conditionnelles. Dans ce paragraphe, nous étudions les opérateurs correspondants dans le cadre propositionnel « pur », i.e., lorsque le profil contient des bases de croyances/buts « plates », afin de pouvoir comparer l'approche utilisée dans cet article à la nôtre.

Comme on l'a vu dans la première partie du mémoire (paragraphe 1.2.2), une fonction ordinale conditionnelle (OCF) κ est une fonction totale de l'ensemble des interprétations $\mathcal{W}$ dans l'ensemble des ordinaux, et est telle qu'au moins une interprétation est associée à zéro. Dans [MGC01], seules les OCFs à valeur entière sont considérées. Meyer et al. ne considèrent pas des OCFs normalisées (c'est-à-dire qu'il n'y a pas nécessairement une interprétation associée à zéro). Intuitivement, plus la valeur attribuée à une interprétation est élevée, moins cette interprétation est crue. A chaque OCF κ on peut associer une base de croyances $Bel(\kappa)$ définie comme $[Bel(\kappa)] = \{\omega \in \mathcal{W} \mid \kappa(\omega) = min_{\omega' \in \mathcal{W}}(\kappa(\omega'))\}$. Le but des opérateurs de fusion OCF est, à partir d'un profil d'OCFs $E = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_n\}$, de définir une OCF $\kappa_\Delta(E)$ qui représente au mieux le profil.

Le moyen le plus direct de traduire le cadre de travail de la fusion propositionnelle en fonctions ordinales conditionnelles est de considérer une base propositionnelle comme un cas spécial d'OCF : une base propositionnelle est une OCF à deux strates, avec les modèles des bases qui reçoivent le rang 0 et les contre-modèles qui reçoivent le rang 1. Si l'on considère uniquement des OCFs à deux strates κ_i et que l'on note $K_i = Bel(\kappa_i)$ et $\Delta = Bel(\kappa_\Delta)$, les opérations de fusion définies dans [MGC01] deviennent :

Proposition 47. – $\Delta_{max}(E) \equiv \Delta_{min_1}(E) \equiv \begin{cases} \bigwedge E & \textit{si cohérent,} \\ \top & \textit{sinon.} \end{cases}$

– $\Delta_{min_2}(E) \equiv \begin{cases} \bigwedge E & \textit{si cohérent,} \\ \bigvee E & \textit{sinon.} \end{cases}$
– $\Delta_{\Sigma}(E) \equiv \Delta^{d_D,\Sigma}(E)$.

La preuve est immédiate.

Exemple 36. *On considère à nouveau l'exemple 21 introduit dans le paragraphe 1.2.2 pour illustrer le fonctionnement des opérations de fusion OCF introduits dans [MGC01]. Soient $\mathcal{P} = \{a, b\}$, et deux états épistémiques κ_1 et κ_2 définies sur $\mathcal{W}$ par :*

– $\kappa_1(a \wedge b) = 0$
– $\kappa_1(a \wedge \neg b) = \kappa_1(\neg a \wedge \neg b) = 1$
– $\kappa_1(\neg a \wedge b) = 2$

et

– $\kappa_2(a \wedge \neg b) = 0$
– $\kappa_2(a \wedge b) = \kappa_2(\neg a \wedge b) = \kappa_2(\neg a \wedge \neg b) = 1$

Les bases propositionnelles correspondantes sont respectivement $K_1 \equiv \{a \wedge b\}$ et $K_2 \equiv \{a \wedge \neg b\}$ Alors on a pour $E = \{K_1, K_2\}$:

– $\Delta_{\max}(E) \equiv \top$.
– $\Delta_{\min_1}(E) \equiv \top$.
– $[\Delta_{\min_2}(E)] \equiv \{a \wedge b, a \wedge \neg b\}$.
– $[\Delta_{\Sigma}(E)] \equiv \{a \wedge b, a \wedge \neg b\}$.

Les opérateurs de fusion propositionnels résultants Δ_{max}, Δ_{min_1}, Δ_{min_2}, et Δ_{Σ} sont assez simples et bien connus.

– Δ_{max} (ou de façon équivalente Δ_{min_1}) est l'opérateur de fusion appelé opérateur de fusion par intersection totale Δ^{fm} (en l'absence de contrainte d'intégrité) [KP99].
– Δ_{min_2} est l'opérateur de fusion basique Δ^{b} [Kon00] sans contrainte d'intégrité, c'est aussi l'opérateur à quota 1 de [EKM05] (sans contrainte d'intégrité) (voir partie III.
– Δ_{Σ} correspond à l'opérateur intersection de [Kon00].

Aucun de ces opérateurs n'est manipulable pour nos indices :

Proposition 48. *Δ_{max}, Δ_{min_1}, Δ_{min_2} et Δ_{Σ} ne sont manipulables pour aucun des indices i_{d_w}, i_{d_s} et i_p.*

Preuve:
Les résultats pour ces opérateurs sont des conséquences directes de l'étude présentée au paragraphe 3.2. Plus précisément, le résultat pour Δ_{max} et Δ_{min_1} vient de la proposition 33, celui pour Δ_{min_2} de la proposition 34, et celui pour Δ_{Σ} de la proposition 26.

□

Meyer, Chopra et Ghose ont proposé des définitions générales de la non-manipulabilité pour la fusion d'OCFs. Plus précisément, ils ont étudié deux propriétés caractérisant la résistance à la manipulation. La première est la propriété **(IP)** [MGC01] :

Définition 39 (IP). Un opérateur de fusion OCF κ_{Δ} satisfait la propriété **(IP)** si pour tout profil d'OCFs E, pour tout agent i, on a quelle que soit l'OCF κ :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, |\kappa_{\Delta}(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)| \leq |\kappa_{\Delta}(rep(E, \{i\}, \kappa)(\omega) - \kappa_i(\omega)|$$

où $rep(E, \{i\}, \kappa)$ est le profil E dans lequel l'OCF κ_i est remplacé par κ.

La propriété **(IP)** traduit une forte résistance de l'opérateur de fusion à la manipulabilité, puisqu'un opérateur satisfait cette propriété **(IP)** si pour tous les mondes, l'entier associé à la base fusionnée est plus proche de celui associé à l'agent manipulateur s'il est sincère que s'il ment.

En ne considérant que des OCFs à deux strates, un opérateur de fusion $\Delta (= Bel(\kappa_\Delta))$ est non manipulable pour **(IP)** si et seulement si κ_Δ satisfait la propriété **(IP)** pour tout agent étant donné un profil quelconque. On obtient la caractérisation suivante :

Proposition 49. *Δ est non manipulable pour* **(IP)** *si et seulement si pour tout profil E et tout couple de bases K et K' :*
- $K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K\}) \models \neg\Delta(E \sqcup \{K'\})$, *et*
- $\neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K\}) \models \Delta(E \sqcup \{K'\})$.

Preuve:

- Partie $\Leftarrow$ de la preuve. Supposons qu'un opérateur de fusion $\Delta = Bel(\kappa_\Delta))$ ne satisfasse pas la propriété **(IP)**. Alors il existe un profil E, un agent i, une OCF κ, une interprétation $\omega \in \mathcal{W}$ tels que
$$|\kappa_\Delta(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)| > |\kappa_\Delta(rep(E, \{i\}, \kappa)(\omega) - \kappa_i(\omega)|$$
où $rep(E, \{i\}, \kappa)$ est le profil E dans lequel l'OCF κ_i est remplacée par κ. Dans la suite, on note $\Delta(E \sqcup \{K\})$ pour $Bel(\kappa_\Delta(E))$: c'est la base fusionnée initiale lorsque l'agent i reporte ses véritables croyances $K \equiv Bel(\kappa_i)$, et on note $\Delta(E \sqcup \{K'\})$ pour $Bel(\kappa_\Delta(rep(E, \{i\}, \kappa))$: c'est la base fusionnée obtenue en remplaçant la base de croyances/buts K de l'agent i par une autre $K' \equiv Bel(\kappa)$.
En considérant des OCFs à deux strates, cette inégalité entraîne que $|\kappa_\Delta(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)| = 1$ et $|\kappa_\Delta(rep(E, \{i\}, \kappa)(\omega) - \kappa_i(\omega)| = 0$. Comme $|\kappa_\Delta(rep(E, \{i\}, \kappa)(\omega) - \kappa_i(\omega)| = 0$, ω est à la fois un modèle de $\Delta(E \sqcup \{K'\})$ et de K (*), ou ω est un contre-modèle à la fois de $\Delta(E \sqcup \{K'\})$ et de K (**).
Pour avoir $|\kappa_\Delta(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)| = 1$, il y a également deux cas :
  - soit $\kappa_\Delta(E)(\omega) = 1$ et $\kappa_i(\omega) = 0$: alors ω est un modèle de K et un contre-modèle de $\Delta(E \sqcup \{K\})$. Comme ω est un modèle de K, avec (*), on sait également que ω est un modèle de $\Delta(E \sqcup \{K'\})$. Donc ω est un modèle de K, de $\neg(\Delta(E \sqcup \{K\}))$ et pas de $\neg\Delta(E \sqcup \{K'\})$: cela entraîne que
$$K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K\}) \not\models \neg\Delta(E \sqcup \{K'\}).$$
  - soit $\kappa_\Delta(E)(\omega) = 0$ et $\kappa_i(\omega) = 1$: alors ω est un contre-modèle de K et un modèle de $\Delta(E \sqcup \{K\})$. Comme ω est un contre-modèle de K, avec (**), on sait aussi que ω est un contre-modèle de $\Delta(E \sqcup \{K'\})$. Donc ω est un modèle de $\neg K$, de $\Delta(E \sqcup \{K\})$ et pas de $\Delta(E \sqcup \{K'\})$: cela entraîne que
$$\neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K\}) \not\models \Delta(E \sqcup \{K'\}).$$

  Ainsi, si un opérateur de fusion ne satisfait pas la propriété **(IP)**, il ne satisfait aucune des deux implications.
- Partie $\Rightarrow$ de la preuve. Pour la réciproque, on suppose qu'il existe un profil E, un agent i avec une base K, et une autre base K' tels que :
$$K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K\}) \not\models \neg\Delta(E \sqcup \{K'\})$$
ou
$$\neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K\}) \not\models \Delta(E \sqcup \{K'\}).$$

Dans le premier cas, il y a au moins un modèle ω de $K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K\})$ qui est un contre-modèle de $\neg\Delta(E \sqcup \{K'\})$:

$$\kappa_\Delta(E)(\omega) = 1, \kappa_i(\omega) = 0, \kappa_\Delta(rep(E, \{i\}, \kappa)(\omega) = 0.$$

Donc

$$|\kappa_\Delta(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)| > |\kappa_\Delta(rep(E, \{i\}, \kappa)(\omega) - \kappa_i(\omega)|.$$

Dans le second cas, il y a au moins un modèle ω de $\neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K\})$ qui est un contre modèle de $\Delta(E \sqcup \{K'\})$:

$$\kappa_\Delta(E)(\omega) = 0, \kappa_i(\omega) = 1, \kappa_\Delta(rep(E, \{i\}, \kappa)(\omega) = 1.$$

Donc

$$|\kappa_\Delta(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)| > |\kappa_\Delta(rep(E, \{i\}, \kappa)(\omega) - \kappa_i(\omega)|.$$

Dans les deux cas, Δ ne satisfait pas la propriété **(IP)**.

□

La seconde propriété étudiée par Meyer, Chopra et Ghose et traduisant la résistance à la manipulation est la propriété **(WIP)** :

Définition 40 (**WIP**). Un opérateur de fusion OCF κ_Δ satisfait la propriété **(WIP)** si pour tout profil E, pour tout agent i, on a quelle que soit l'OCF κ :

$$\Sigma_{\omega \in \mathcal{W}} |\kappa_\Delta(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)| \leq \Sigma_{\omega \in \mathcal{W}} |\kappa_\Delta(rep(E, \{i\}, \kappa)(\omega) - \kappa_i(\omega)|.$$

(WIP) est plus faible que **(IP)** au sens où si un opérateur de fusion OCF κ_Δ satisfait **(IP)** pour un agent i, alors κ_Δ satisfait **(WIP)** pour i (mais la réciproque n'est pas forcément vérifiée).

De nouveau, en ne considérant que des OCFs à deux strates, un opérateur de fusion $\Delta(= Bel(\kappa_\Delta))$ est non manipulable pour **(WIP)** si et seulement si κ_Δ satisfait la propriété **(WIP)** pour chaque agent pour tout profil.

On note $\oplus$ le *ou exclusif*, i.e. $K \oplus K' = (K \wedge \neg K') \vee (\neg K \wedge K')$. Alors la propriété **(WIP)** peut être caractérisée dans notre cadre de travail par l'indice suivant :

Définition 41. On définit l'indice de satisfaction i_{wip} par :

$$i_{wip}(K, K_\Delta) = \frac{1}{\#[K \oplus K_\Delta] + 1}.$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 50.
Δ *satisfait la propriété* **(WIP)** *si et seulement si il est non manipulable pour* i_{wip}.

Preuve:
Par définition $K \oplus K_\Delta \equiv (\neg K \wedge K_\Delta) \vee (K \wedge \neg K_\Delta)$. Donc on peut écrire :

$$i_{wip}(K, K_\Delta) = \frac{1}{\#[(\neg K \wedge K_\Delta) \vee (K \wedge \neg K_\Delta)] + 1}$$

si et seulement si

$$i_{wip}(K, K_\Delta) = \frac{1}{\#[\neg K \wedge K_\Delta] + \#[K \wedge \neg K_\Delta] + 1}$$

Supposons qu'un opérateur de fusion $\Delta \equiv Bel(\kappa_\Delta))$ ne satisfasse pas la propriété **(WIP)**. Alors il existe un profil E, un agent i, une OCF κ tels que

$$\Sigma_{\omega\in\mathcal{W}}|\kappa_\Delta(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)| > \Sigma_{\omega\in\mathcal{W}}|\kappa_\Delta(rep(E,\{i\},\kappa)(\omega) - \kappa_i(\omega)| \qquad (*)$$

Dans la suite, on note $\Delta(E\sqcup\{K\})$ pour $Bel(\kappa_\Delta(E))$, qui est la base fusionnée initiale quand l'agent i reporte sa véritable base $K \equiv Bel(\kappa_i)$, et on note $\Delta(E \sqcup \{K'\})$ pour

$Bel(\kappa_\Delta(rep(E,\{i\},\kappa))$, i.e. la base fusionnée obtenue en remplaçant la base K de l'agent i par une autre $K' \equiv Bel(\kappa)$.

Dans le cas à deux strates, $|\kappa_\Delta(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)|$ est égal à 0 ou 1. En fait, $|\kappa_\Delta(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)| = 1$ si et seulement si :

- $\kappa_\Delta(E)(\omega) = 1$ et $\kappa_i(\omega) = 0$: ce qui est équivalent à $\omega \models K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K\})$.
- $\kappa_\Delta(E)(\omega) = 0$ et $\kappa_i(\omega) = 1$: ce qui est équivalent à $\omega \models \neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K\})$.

On peut en déduire l'égalité suivante :

$$\Sigma_{\omega\in\mathcal{W}}|\kappa_\Delta(E)(\omega) - \kappa_i(\omega)| = \#[K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K\})] + \#[\neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K\})].$$

De façon similaire, on obtient :

$$\Sigma_{\omega\in\mathcal{W}}|\kappa_\Delta(rep(E,\{i\},\kappa)(\omega) - \kappa_i(\omega)| = \#[K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K'\})] + \#[\neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K'\})].$$

L'inégalité (*) est donc équivalente à :

$$\#[K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K\})] + \#[\neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K\})] > \#[K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K'\})] + \#[\neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K'\})]$$

qui équivaut à

$$\frac{1}{\#[K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K\})] + \#[\neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K\})] + 1} < \frac{1}{\#[K \wedge \neg\Delta(E \sqcup \{K'\})] + \#[\neg K \wedge \Delta(E \sqcup \{K'\})] + 1}$$

qui équivaut à

$$i_{wip}(K, \Delta(E \sqcup \{K\})) < i_{wip}(K, \Delta(E \sqcup \{K'\}))$$

qui équivaut à Δ n'est pas manipulable pour i_{wip}.

□

Il faut noter que l'indice « wip » i_{wip} est très proche de l'indice probabiliste i_p. L'indice probabiliste mesure la proximité de la base fusionnée à la base de l'agent et l'indice « wip » mesure la différence entre la base fusionnée et la base de l'agent.

Cependant, la notion correspondante de non-manipulabilité (et a fortiori celle induite par **(IP)**) apparaît trop forte dans le cadre propositionnel « pur ». Considérons par exemple le scénario de fusion de croyances suivant :

Exemple 37. *On considère $K = \{a\}$ et $K_1 = \{b\}$. On a $\Delta^{d_H,\Sigma}(\{K, K_1\}) \equiv a \wedge b$. Si l'agent donne $K' = \{a \wedge \neg b\}$ à la place de$K$, alors la base fusionnée est $\Delta^{d_H,\Sigma}(\{K', K_1\}) \equiv a$. Cela donne un exemple de manipulation pour* **(WIP)** *:*

$$i_{wip}(\Delta^{d_H,\Sigma}(\{K, K_1\})) = \frac{1}{2} < i_{wip}(\Delta^{d_H,\Sigma}(\{K', K_1\})) = 1.$$

Dans cet exemple, l'agent réussit à modifier la base fusionnée en une base qui est plus similaire à sa base de croyances initiale (par rapport à i_{wip}). C'est parce qu'il n'est pas entièrement satisfait par la base fusionnée équivalente à $a \wedge b$, mais préfère strictement sa base initiale $\{a\}$, en dépit du fait que $a \wedge b$

raffine ses propres croyances. Ainsi, un tel agent veut préserver à la fois ses croyances et *son ignorance*. Dans de nombreux scénarios où un agent participe à un processus de fusion afin d'obtenir de nouvelles informations, cela est contre intuitif. Dans [CGM06], les auteurs proposent des définitions plus générales de non-manipulabilité, en considérant d'autres relations de similarité que celles utilisées dans [MGC01]. Dans le cadre propositionnel « pur », elles souffrent toutes du même inconvénient que celui mentionné ci-dessus. C'est pourquoi nous n'avons pas conduit plus avant l'étude de la manipulation des opérateurs à sélection de modèles et à sélection de formules purement propositionnels pour des critères comme **(WIP)** ou **(IP)**.

4.2 Théorie du choix social

Dans le cadre propositionnel pour la fusion considéré dans cette thèse, les croyances/buts K de chaque agent induisent une partition des interprétations en deux strates : les modèles de K sont préférés à ses contre-modèles. Quand les agents fournissent une relation de préférence complète (qui peut être encodée de différentes façons, par exemple, explicitement, ou par une base de croyances avec priorités, une fonction ordinale conditionnelle, etc.), le problème de l'agrégation consiste à définir une relation de préférence globale à partir des relations de préférence individuelles. Ce problème est étudié depuis des siècles en théorie du choix social (on peut remonter au moins à Condorcet [Con85] et Borda [Bor81]).

En théorie du choix social [ASS02], le problème de la manipulation a aussi reçu une grande attention. Dans ce cadre de travail, un agent A est manipulateur lorsqu'il reporte une relation de préférence (un ordre strict total sur l'ensemble des alternatives) qui n'est pas la vraie relation. Une fonction de choix social (qui associe une alternative à un profil de telles relations de préférences) est manipulable si l'alternative choisie par la fonction quand A ment est mieux classée pour A que l'alternative choisie quand il reporte ses vraies préférences. Un des résultats les plus célèbres de la théorie du choix social est qu'il n'existe pas de procédure d'agrégation de préférences non manipulable vérifiant des propriétés attendues. Ce résultat est connu comme le théorème d'impossibilité de Gibbard-Satterthwaite [Gib73, Sat75, Mou88].

Formellement, lorsqu'il y a au moins trois alternatives (mondes) possibles, toute fonction de choix social surjective et non manipulable est dictatoriale (l'alternative choisie est la meilleure alternative pour un agent donné (le dictateur), quels que soient les autres classements du profil) (voir 2).

Depuis que ce résultat a été établi, il y a eu de nombreux travaux pour obtenir des résultats de non-manipulabilité sous certaines restrictions (voir [Kel88, ASS02] par exemple). En un certain sens, notre travail est proche de ces approches. Cependant, notre travail est original - à notre connaissance - de plusieurs points de vue : d'abord, les relations de préférence considérées sont des pré-ordres totaux à deux strates et non des ordres stricts totaux ; ensuite, le résultat du processus de fusion n'est habituellement pas un monde unique (la fusion n'est pas un vote) mais toujours un pré-ordre total à deux strates (et le nombre de modèles de la base fusionnée n'est pas a priori limité). Cela conduit à des notions plus complexes de manipulation où différentes définitions sont possibles, dépendantes de l'indice formalisant les notions possibles de « à quel point un agent est satisfait par le résultat du processus de fusion ».

Des travaux récents en Théorie du Choix Social (voir [DS00, CZ02, BDS01]) se sont intéressés aux correspondances de choix social, qui sélectionnent non plus une alternative unique mais un ensemble d'alternatives. Pour Duggan et Schwartz [DS00], une manipulation est possible s'il existe un votant i tel que « l'utilité globale » est plus élevée pour l'individu i s'il ment que s'il est sincère. Ces auteurs ont alors montré que le résultat de Gibbard-Satterthwaite pouvait s'étendre dans ce cas (voir paragraphe 2.3).

Les hypothèses nécessaires à l'application de ce théorème ne sont pas toute vérifiées dans le cadre de la fusion propositionnelle. Cependant, en dépit du fait que les auteurs supposent que chaque votant ordonne totalement les alternatives (ce qui n'est pas le cas dans la fusion propositionnelle), notre approche de la manipulation pour la fusion est proche de la leur. En effet, bien que notre approche ne fasse pas appel à une notion d'utilité et que nous n'utilisions pas de distribution de probabilité, on peut remarquer que la manipulation pour l'indice drastique faible i_{d_w} (voir partie II) entraîne une manipulation au sens où l'entendent Duggan et Schwartz (une manipulation pour i_{d_w} signifie qu'en mentant, l'agent passe d'une situation où aucun de ses modèles ne fait partie du résultat de la fusion à une situation où au moins un de ses modèles fait partie de la fusion, donc en prenant une représentation u telle que $u(x) = 1$ si et seulement si x fait partie des modèles de l'agent et 0 sinon, alors pour toutes probabilités λ et λ', on a $\Sigma_{x \in C(P')} \lambda'(x)u(x) > \Sigma_{x \in C(P)} \lambda(x)u(x)$, puisque $\Sigma_{x \in C(P')} \lambda'(x)u(x) > 0$ et $\Sigma_{x \in C(P)} \lambda(x)u(x) = 0$). Pour un autre de nos indices, l'indice probabiliste i_p, un lien existe également, puisque cet indice est la probabilité qu'un modèle de l'agent soit choisi en faisant un tirage équiprobable d'un modèle dans le résultat de la fusion. Une manipulation pour i_p entraîne donc une augmentation de cette probabilité, et en ce sens une augmentation de l'utilité pour l'agent d'après Duggan et Schwartz. Les indices que nous avons choisis sont donc interprétables dans ces travaux, la différence tient en partie au fait que nos indices ont un sens en logique propositionnelle. Une autre différence tient également au fait que l'on dispose de moins d'information dans le cadre de la fusion : les préférences des agents ne sont pas représentées par une relation complète.

Les approches de Barberà, Dutta et Sen [BDS01] et de Ching et Zhou [CZ02] sont très proches de celle que nous venons d'évoquer du point de vue de la définition de la non-manipulabilité : ces auteurs se basent également sur des distributions de probabilité pour définir l'utilité d'un agent par rapport au résultat d'un vote.

4.3 Discussion

Etudier la non-manipulabilité des opérateurs de fusion est important dans une perspective multi-agents lorsque des agents peuvent obtenir l'information détenue par les autres agents participant au processus de fusion. Si la manipulation est possible, comment peut-on être sûr que le résultat de la fusion représente réellement les croyances/buts du groupe ?

Dans cette partie, nous avons dressé les limites de la manipulabilité de nombreux opérateurs de fusion, incluant ceux à sélection de modèles et à sélection de formules. Alors que ces deux familles sont manipulables dans le cas général, nous avons montré que différentes restrictions au cadre de fusion ou aux stratégies autorisées peuvent conduire à la non-manipulabilité. Pour les opérateurs à sélection de modèles, le choix de la distance apparaît crucial. Ainsi, les opérateurs à sélection de modèles ne sont pas manipulables quand la distance drastique est utilisée, alors qu'ils le deviennent lorsque la distance de Dalal est employée.

La fonction d'agrégation est également apparue dans notre travail comme un élément essentiel dans la manipulation. Il ressort, en effet, que les opérateurs à sélection de modèles d'arbitrage (basés sur la fonction d'agrégation G_{max}) sont nettement plus sensibles à la manipulation que les opérateurs à sélection de modèles majoritaires (basés sur la fonction d'agrégation Σ). Cela s'explique par le fait que les opérateurs d'arbitrage cherchent à sélectionner les modèles qui sont le moins éloignés de chacun des agents, et donc toute modification d'une base de croyances peut avoir un impact sur le résultat de la fusion. Au contraire, les opérateurs majoritaires sélectionnent les modèles qui satisfont une majorité d'agents, même s'ils sont très éloignés des croyances d'un agent. Ainsi, la modification d'une seule base a un impact qui peut être limité pour ces opérateurs. Parmi les opérateurs à sélection de formules, les opérateurs ayant le comportement le plus drastique, c'est-à-dire l'opérateur par intersection totale et l'opérateur basique, sont non manipulables. Pour les opérateurs à sélection de formules que sont les opérateurs de combinaison, $\triangle_\mu^{C1}$ atteint le plus haut degré de résistance à la manipulation, puisqu'il est manipulable pour les indices drastiques. Les résultats sont résumés dans le tableau 4.1 (nm signifie « non manipulable » et m signifie « manipulable »). C signifie que la base K est complète, NC qu'elle ne l'est pas nécessairement. Les opérateurs $\triangle_\mu^{\widehat{C4}}$ ne sont pas repris dans ce tableau, puisqu'ils correspondent aux opérateurs $\Delta_\mu^{d_D,f}$ pour $f = \Sigma$.

i	$\#(E)$	K	μ	$\Delta_\mu^{d_D,f}$	$\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$	$\Delta_\mu^{d_H,G_{max}}$	Δ_μ^{fm}	Δ_μ^{b}	$\triangle_\mu^{C1}$	$\triangle_\mu^{C3}$	$\triangle_\mu^{C4}$	$\triangle_\mu^{C5}$	$\triangle_\mu^{\widehat{C1}}$	$\triangle_\mu^{\widehat{C3}}$	$\triangle_\mu^{\widehat{C5}}$
i_p	$=2$	C	$\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	m	m	m	m	nm	nm	nm
			$\not\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	m	m	m	m	m	nm	nm
		NC	$\equiv \top$	nm	m	m	nm	nm	m	m	m	m	nm	nm	nm
			$\not\equiv \top$	nm	m	m	nm	nm	m	m	m	m	nm	m	nm
	>2	C	$\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	m	m	m	m	m	m	m
			$\not\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	m	m	m	m	m	m	m
		NC	$\equiv \top$	nm	m	m	nm	nm	m	m	m	m	m	m	m
			$\not\equiv \top$	nm	m	m	nm	nm	m	m	m	m	m	m	m
i_{d_w}	$=2$	C	$\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm
			$\not\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	nm	m	m	nm	nm	m	nm
		NC	$\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm
			$\not\equiv \top$	nm	m	m	nm	nm	nm	m	m	m	nm	m	nm
	>2	C	$\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm
			$\not\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	nm	m	m	nm	nm	m	nm
		NC	$\equiv \top$	nm	m	m	nm	nm	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm
			$\not\equiv \top$	nm	m	m	nm	nm	nm	m	m	m	nm	m	m
i_{d_s}	$=2$	C	$\equiv \top$	nm	nm	nm	nm	nm	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm
			$\not\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	nm	m	m	m	nm	m	nm
		NC	$\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm
			$\not\equiv \top$	nm	m	m	nm	nm	nm	m	m	m	nm	m	nm
	>2	C	$\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm
			$\not\equiv \top$	nm	nm	m	nm	nm	nm	m	m	m	nm	m	m
		NC	$\equiv \top$	nm	m	m	nm	nm	nm	nm	m	nm	nm	nm	nm
			$\not\equiv \top$	nm	m	m	nm	nm	nm	m	m	m	nm	m	m

TAB. 4.1 – Synthèses des résultats.

Troisième partie

Deux nouvelles familles d'opérateurs de fusion disjonctives

Introduction

De nombreux d'opérateurs de fusion ont été définis jusqu'ici. Chaque opérateur de fusion existant est plus ou moins adapté aux divers scénarios de fusion qui peuvent être considérés. Ainsi, confronté à une application pour laquelle la fusion est nécessaire, une première difficulté est le choix d'un opérateur de fusion spécifique. Parmi les critères indépendants du domaine d'application qui peuvent être utilisés pour réaliser un choix adéquat, on peut trouver les critères suivants :

Rationalité : une exigence principale pour adhérer à une méthode de fusion est qu'elle possède les propriétés attendues de ce qu'intuitivement signifie « fusionner ». Cela passe par la mise en évidence d'ensembles de postulats de rationalité [Rev97, LS98, KP02a]. Dans la suite, nous considérerons les postulats de rationalité donnés dans [KP02a], parce qu'ils étendent les postulats proposés dans les autres travaux. Comparer des méthodes de fusion particulières à l'aide d'un ensemble de propriétés logiques permet de mettre rapidement en lumière les différences de comportement entre ces méthodes et ainsi de choisir une de celles qui offrent le meilleur comportement. Nous considérons en particulier le postulat de disjonction, qui impose principalement que la base fusionnée implique la disjonction de toutes les bases qui participent à la fusion. Ce postulat est important si l'on suppose qu'en présence de croyances contradictoires, au moins un des des agent possède les « vraies » croyances.

Complexité algorithmique : lorsque l'on recherche un opérateur de fusion pour un système multi-agents autonome, une attente naturelle est celle de l'efficacité algorithmique. La fusion est une opération dont la complexité est élevée [KLM02, KLM04], puisqu'elle se situe typiquement au premier ou au second niveau de la hiérarchie polynomiale. Les opérateurs les moins complexes peuvent être évidemment préférés aux autres. Ainsi, déterminer la complexité algorithmique d'un opérateur, et des restrictions sous lesquelles cette complexité diminue, est particulièrement utile.

Manipulabilité : il est généralement attendu des agents participants à un processus de fusion qu'ils fournissent sincèrement leurs croyances/buts. Pour de nombreuses applications, cette hypothèse peut être faite facilement, en particulier lorsque les agents ont des capacités de raisonnement limitées. Cependant, quand des agents rationnels munis de fortes possibilités d'inférence sont considérés, une telle hypothèse doit être remise en question : les agents peuvent être tentés de ne pas être sincères quant à leurs croyances/buts afin d'obtenir une base fusionnée meilleure de leur point de vue. Les opérateurs de fusion pour lesquels une telle manipulation est impossible doivent être alors préférés. En effet, dans le cas contraire, le problème d'agrégation considéré n'est plus un problème de fusion, mais devient un jeu entre le groupe d'agents dans lequel chaque agent vise à déterminer la stratégie (les croyances/buts qu'il reporte à la place de ses croyances/buts véritables) qui sert au mieux ses propres intérêts. Ainsi, la dimension de la manipulabilité est également importante à considérer.

Un critère secondaire pour sélectionner une méthode de fusion particulière s'appuie sur la puissance inférentielle de l'opérateur considéré. En effet, un moyen simple de définir une méthode de fusion qui assure de bonnes propriétés logiques et une bonne efficacité algorithmique consiste à définir une méthode au pouvoir inférentiel faible. Au rang de telles méthodes de fusion figurent celles qui retournent la disjonction de toutes les bases de croyances quand il n'y a pas d'information additionnelle disponible, tel qu'un poids représentant la confiance associée à chaque agent. Ainsi, un opérateur moins prudent, i.e. ayant un pouvoir inférentiel plus élevé, peut être jugé plus intéressant qu'un autre. Cela signifie que pour chaque profil à fusionner, l'opérateur le moins prudent donne un résultat qui implique logiquement le résultat du plus prudent. C'est l'un des arguments pour préférer l'opérateur $Gmax$ à l'opérateur Max [KP99]. Bien sûr, cette référence au pouvoir d'inférence doit être mise en balance avec les autres critères, et si cette amélioration est faite au prix d'une perte de rationalité ou d'une augmentation de la complexité, le choix n'est pas si simple. Cependant, si l'on compare deux opérateurs évalués de façon similaire pour les autres critères, il n'y a pas d'hésitation à choisir celui qui est le plus discriminant (i.e. le moins prudent).

Notre thèse est que la comparaison des opérateurs de fusion doit être conduite en suivant ces critères. Pour des applications particulières, certains critères peuvent être plus pertinents que d'autres, et peuvent conduire à choisir différents opérateurs de fusion comme les meilleurs. Mais considérer seulement une dimension du problème (i.e. un seul critère d'évaluation), sans s'intéresser aux autres, ne peut pas être satisfaisant en général.

La plupart des opérateurs de fusion existants ont été évalués par rapport aux différents critères listés plus haut. Pour la rationalité, on peut se reporter à [Rev97, LS98, LM99, Kon00, KP02a, KLM02]. Un postulat qui nous a paru particulièrement important pour les opérateurs de fusion propositionnelle est le postulat de disjonction. Il impose en effet aux opérateurs de sélectionner les modèles de la base fusionnée parmi ceux de la disjonction des bases intervenant dans le processus de fusion, autrement dit, parmi les modèles qui appartiennent à au moins une base. Ce postulat suit l'idée naturelle qu'au moins un des agents a parmi ses croyances le véritable état du monde. Il n'est pas vérifié par les opérateurs à sélection de modèles en général si l'on utilise la distance de Hamming entre interprétations. Pour cette raison, les opérateurs à sélection de modèles peuvent être critiqués, et on peut leur préférer des opérateurs à sélection de formules, qui vérifient toujours, eux, cette propriété. Cependant, les opérateurs à sélection de formules vérifient beaucoup moins de postulats de rationalité que les opérateurs à sélection de modèles 1.1.1. Pour la complexité algorithmique, on peut se référer à [KLM04] ou [Neb98]. Pour une étude de la manipulabilité de nombreux opérateurs de fusion, la partie II de cette thèse donne un panorama des résultats obtenus pour les opérateurs de fusion propositionnelle. A la lumière de ces résultats, il apparaît qu'aucun opérateur de fusion n'a une meilleure performance que tous les autres par rapport à tous les critères pris conjointement. Plus précisément, les opérateurs à sélection de modèles ont souvent une complexité combinatoire plus faible (l'inférence est typiquement Θ_2^p-complète ou Δ_2^p-complète) que les opérateurs à sélection de formules (l'inférence peut être Π_2^p-complète) [KLM04, Neb98]. Les opérateurs à sélection de modèles satisfont aussi typiquement plus de postulats de rationalité que les opérateurs à sélection de formules (voir [KP02a, Kon00]). Le dernier critère est beaucoup plus difficile à satisfaire pour ces deux familles d'opérateurs, même dans des cas très restreints. Le principal résultat de la partie II de cette thèse est que la non-manipulabilité est difficile à réaliser pour les opérateurs de fusion.

Une question naturelle se pose : *est-il possible de définir de nouveaux opérateurs de fusion, satisfaisant le postulat de disjonction, et offrant de meilleurs compromis pour les critères de rationalité, de complexité et de manipulabilité, que les opérateurs existants ?*

Dans cette partie, nous donnons une réponse positive à cette question, en définissant deux nouvelles familles d'opérateurs de fusion propositionnelle. Nous les appellons opérateurs de fusion disjonctive dans la mesure où ils satisfont tous le postulat de disjonction. La première famille est composée des *opérateurs à quota*. Les opérateurs à quota s'appuient sur une idée simple : tout monde est un modèle du résultat du processus de fusion s'il satisfait « suffisamment » de bases du profil donné. « Suffisamment » peut signifier « au moins k » (un entier fixé, quota absolu), ou « au moins $k\%$ » (un quota relatif ou ratio), ou finalement « autant que possible », et chaque interprétation induit une famille d'opérateurs de fusion spécifique. Nous avons montré que ces opérateurs ont de bonnes propriétés logiques, ont une complexité calculatoire faible et sont non manipulables.

Nous introduisons ensuite une seconde famille d'opérateurs de fusion : les opérateurs *Gmin*. Chaque opérateur *Gmin* est paramétré par une pseudo-distance et chacun d'entre eux a la propriété d'être moins prudent que les opérateurs à quota (c'est-à-dire d'offrir un pouvoir inférentiel plus fort). Ces opérateurs sont complètement rationnels au sens des postulats **(IC)**, ont une complexité algorithmique assez faible (le problème d'inférence est au premier niveau de la hiérarchie polynomiale) et satisfont le postulat de disjonction (mais ils sont manipulables en général).

Le reste de cette étude est organisé en deux parties : nous définissons d'abord les opérateurs à quota absolu et détaillons leurs propriétés : rationalité, complexité algorithmique et manipulabilité. Nous définissons et étudions ensuite les opérateurs à quota relatif (ou ratio), puis l'opérateur à « quota maximal ». Dans une seconde partie, nous introduisons les opérateurs *Gmin* et étudions leur rationalité, leur complexité algorithmique et leur manipulabilité. Nous terminons cette partie par une discussion, qui permet de mettre en balance ces deux familles d'opérateurs de fusion avec les opérateurs de fusion existants.

Chapitre 5

Opérateurs à quota

Pour les opérateurs à quota absolu, étant donné un nombre entier k, un modèle est sélectionné s'il appartient à au moins k bases du profil. Cette idée peut s'apparenter à un vote sur les modèles, où l'on sélectionne les modèles qui ont reçu plus de votes que le quota requis. Cette méthode est d'ailleurs proche d'un type de vote particulier appelé vote par quota, cas particulier des votes par comités [BSZ91]. Cette procédure de vote est parfois utilisée pour choisir de nouveaux membres de certains clubs, ou dans des élections où l'on exige par exemple les deux-tiers de votes en faveur d'une motion pour qu'elle soit adoptée.

5.1 Définition

Nous donnons tout d'abord une première définition des opérateurs à quota.

Définition 42 (opérateurs à quota)**.** Soient k un entier, $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un profil, et μ une contrainte d'intégrité. L'*opérateur de fusion à quota* k , noté $\triangle^k$, est défini de façon sémantique par :

$$[\triangle^k_\mu(E)] = \begin{cases} \{\omega \in [\mu] \mid \forall K_i \in E \ \omega \models K_i\} & \text{si cet ensemble est non vide,} \\ \{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Essentiellement, cette définition pose que les modèles du résultat de la fusion k-quota d'un profil E sous la contrainte μ sont les modèles de μ qui satisfont au moins k bases de E, voire toutes : lorsqu'il n'y a pas de contradiction entre les bases, i.e., si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent, le résultat de la fusion est simplement la conjonction des bases avec la contrainte d'intégrité.

Exemple 38. *Une entreprise fait appel à quatre consultants pour recruter un employé. Après l'entretien d'un candidat, chaque consultant a certaines convictions à son sujet. Le premier pense qu'il ne faut pas le recruter, même s'il pense qu'il dispose des qualifications ou qu'il est motivé. Le second pense également qu'il ne faut pas le recruter, même s'il le trouve motivé. Le troisième pense qu'il ne faut pas le recruter, il pense que le candidat n'est pas motivé. Le dernier consultant pense qu'il faut le recruter, qu'il dispose de la motivation et des qualifications requises. Il y a une contrainte d'intégrité : un candidat ne peut être recruté s'il n'a pas la qualification nécessaire pour le poste.*

On peut utiliser trois variables q, j, m *prises dans cet ordre pour représenter les croyances des consultants :* q *signifie «avoir la qualification»,* j *signifie «avoir le poste»,* m *signifie «avoir la motivation». Alors le profil* $E = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ *représente les croyances des agents, avec* $[K_1] = \{100, 001, 101\}$, $[K_2] = \{001, 101\}$, $[K_3] = \{100, 000\}$, $[K_4] = \{111\}$, *et la contrainte d'intégrité* μ *vérifie* $[\mu] = \mathcal{W} \setminus \{010, 011\}$. *Avec un opérateur à quota, on obtient comme croyances du groupe :*

- $[\triangle^1_\mu(E)] = \{000, 001, 100, 101, 111\}$ *: les modèles de la fusion sont les modèles de μ qui appartiennent à au moins une base de croyances.*
- $[\triangle^2_\mu(E)] = \{001, 100, 101\}$ *: les modèles de la fusion sont les modèles de μ qui appartiennent à au moins deux bases de croyances.*
- $[\triangle^3_\mu(E)] = \emptyset$ *: aucun modèle de μ n'appartient à au moins trois bases de croyances.*

Les opérateurs à quota peuvent être caractérisés syntaxiquement de façon équivalente (i.e., le résultat est donné par une formule). Une telle caractérisation est obtenue directement à partir des sous-ensembles cohérents préférés de E.[5] Nous introduisons la notation suivante :

$$\ulcorner n_k \urcorner = \{C \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid \#(C) = k\}.$$

Alors la proposition suivante donne une caractérisation des opérateurs à quota :

Proposition 51. *Soient k un entier, $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un profil, et μ une contrainte d'intégrité.*

$$\triangle^k_\mu(E) \equiv \begin{cases} \bigwedge E & \textit{si cohérent,} \\ (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve:
Immédiate à partir des deux égalités suivantes :
- $[\bigwedge E \wedge \mu] = \{\omega \in [\mu] \mid \forall K_i \in E\ \omega \models K_i\}$.
- $[\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner}(\bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu] = \{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$.

$\square$

La taille des formules équivalentes à $[\triangle^k_\mu(E)]$ données par la proposition 51 est polynomiale dans $\#(E) + \#(\mu)$. Par conséquent, les bases fusionnées peuvent être facilement compilées comme des formules propositionnelles, c'est-à-dire transformées en espace polynomial en formules propositionnelles équivalentes.

5.2 Propriétés logiques

Les opérateurs de fusion à quota possèdent d'assez bonnes propriétés logiques. Avant d'énoncer ces propriétés, nous présentons un lemme utile pour démontrer d'entre elles :

Lemme 52. *Soient E,E' et F trois profils, avec $E' = E \sqcup F$. Alors :*
- *si $\bigwedge E' \wedge \mu$ est cohérent, alors $\triangle^k_\mu(E') \models \triangle^k_\mu(E)$.*
- *si $\bigwedge E \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors $\triangle^k_\mu(E) \models \triangle^k_\mu(E')$.*

Preuve:

- Si $\bigwedge E' \wedge \mu$ est cohérent, alors $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent puisque $E' = E \sqcup F$. Ainsi $\triangle^k_\mu(E) \equiv \bigwedge E \wedge \mu$, et $\triangle^k_\mu(E') \equiv \bigwedge E' \wedge \mu$. Comme $\bigwedge E' \wedge \mu \equiv \bigwedge E \wedge \bigwedge F \wedge \mu$, on obtient $\triangle^k_\mu(E') \models \triangle^k_\mu(E)$.
- Si $\bigwedge E \wedge \mu$ est incohérent, alors $[\triangle^k_\mu(E)] = \{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$; il y a deux cas :
  $k > \#(E)$: on a $\triangle^k_\mu(E) \equiv \bot$, puisqu'aucun modèle de μ ne peut satisfaire k bases de E. En conséquence, on obtient $\triangle^k_\mu(E) \models \triangle^k_\mu(E')$.

[5] La notion de « sous-ensemble » doit être entendue ici par rapport à l'inclusion multi-ensembliste. « Sous-multi-ensemble » serait plus correct mais cette dénomination est assurément trop lourde.

$k \leq \#(E)$: on a $[\triangle_\mu^k(E)] = \{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$ et $[\triangle_\mu^k(E')] = \{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E' \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$. Comme tous les modèles de μ qui satisfont au moins k bases de E satisfont également au moins k bases de son sur-ensemble $E' = E \sqcup F$, on obtient que $\triangle_\mu^k(E) \models \triangle_\mu^k(E')$.

□

Nous pouvons à présent donner les propriétés logiques des opérateurs à quota :

Proposition 53. *Les opérateurs $\triangle^k$ satisfont les propriétés* **(IC0)**, **(IC2)**, **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)** *et* **(IC8)**. *Ils ne satisfont pas* **(IC1)**, **(IC6)** *et* **(Maj)** *en général.*

Preuve:

(IC0) Evident à partir de la définition de $\triangle^k$.

(IC1) Considérons le contre-exemple suivant : $E = \{K_1, K_2\}$; $K_1 = \{a\}$, $K_2 = \{\neg a\}$, $k = 2$ et $\mu = \top$. μ est cohérent mais $\triangle_\mu^k(E)$ ne l'est pas.

(IC2) Evident à partir de la définition de $\triangle^k$.

(IC3) Evident à partir de la définition de $\triangle^k$.

(IC4) On doit montrer que si $K_1 \models \mu$, $K_2 \models \mu$, et $\triangle_\mu^k(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1 \not\models \bot$, alors $\triangle_\mu^k(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2 \not\models \bot$.
Soit $E = \{K_1, K_2\}$. Supposons que $K_1 \models \mu$ et $K_2 \models \mu$. Il y a deux cas :
- $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ est cohérent. Alors $\triangle_\mu^k(\{K_1, K_2\}) \equiv K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$. Comme $\triangle_\mu^k(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2$ est cohérent, **(IC4)** est satisfait.
- $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu$ est incohérent.
  Alors $[\triangle_\mu^k(\{K_1, K_2\})] = \{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$. Quatre cas sont à étudier pour k :
  $k \geq 3$: aucune interprétation ne peut satisfaire k bases de E puisque $\#(E) = 2$. Ainsi $\triangle_\mu^k(\{K_1, K_2\}) \equiv \bot$ et **(IC4)** est trivialement vrai.
  $k = 2$: aucune interprétation ne peut satisfaire k bases de E puisque $\#(E) = 2$ et (par hypothèse) $K_1 \wedge K_2 \wedge \mu \models \bot$. **(IC4)** est encore trivialement vrai.
  $k = 1$: les modèles de la base fusionnée sont les modèles de μ satisfaisant une base de E. Donc le résultat du processus de fusion est équivalent à $(K_1 \vee K_2) \wedge \mu$. En conséquence, $\triangle_\mu^k(\{K_1, K_2\}) \wedge K_2$ est équivalent à K_2, qui est cohérent (puisque chaque base du profil est cohérente). **(IC4)** est satisfait.
  $k = 0$: on a $\triangle_\mu^k(\{K_1, K_2\}) \equiv \mu$. Comme $K_2 \wedge \mu$ est équivalent à K_2 qui est cohérent, **(IC4)** est satisfait.

(IC5) Pour montrer que **(IC5)** est satisfait, on doit prouver que $\triangle_\mu(E_1) \wedge \triangle_\mu(E_2) \models \triangle_\mu(E_1 \sqcup E_2)$. Avec $E = E_1$ et $E' = E_1 \sqcup E_2$, le lemme 52 montre que si $\bigwedge E_1 \wedge \mu$ est incohérent, alors $\triangle_\mu^k(E_1) \models \triangle_\mu^k(E_1 \sqcup E_2)$. De façon similaire, on obtient aussi que $\triangle_\mu^k(E_2) \models \triangle_\mu^k(E_1 \sqcup E_2)$ (E_1 et E_2 jouent des rôles symétriques ici). En conséquence, si $\bigwedge E_1 \wedge \mu$ est incohérent ou $\bigwedge E_2 \wedge \mu$ est incohérent, on a $\triangle_\mu^k(E_1) \wedge \triangle_\mu^k(E_2) \models \triangle_\mu^k(E_1 \sqcup E_2)$, puisque l'inférence classique est monotone. Donc **(IC5)** est satisfait.
Le cas où $\bigwedge E_1 \wedge \mu$ est cohérent et $\bigwedge E_2 \wedge \mu$ est cohérent reste à être considéré. Dans ce cas, on a $\triangle_\mu^k(E_1) \equiv \bigwedge E_1 \wedge \mu$ et $\triangle_\mu^k(E_2) \equiv \bigwedge E_2 \wedge \mu$ par définition des opérateurs de fusion à quota. Donc, $\triangle_\mu^k(E_1) \wedge \triangle_\mu^k(E_2) \equiv \bigwedge E_1 \wedge \bigwedge E_2 \wedge \mu$. Par ailleurs, tout opérateur à quota est tel que, pour tout profil E et toute contrainte d'intégrité μ, $\bigwedge E \wedge \mu \models \triangle_\mu^k(E)$ (c'est une conséquence directe de la définition de $\triangle^k$). En ajoutant le fait que $\bigwedge E$ est équivalent à $\bigwedge E_1 \wedge \bigwedge E_2$, on obtient que

(IC5) est aussi vrai dans ce cas.

(IC6) Considérons le contre-exemple suivant : $\mathcal{P} = \{a\}$, $E_1 = \{\{a\}, \{a\}, \{\neg a\}\}$, $E_2 = \{\{a\}, \{a\}, \{\neg a\}\}$ et $\mu = \top$. On a $\triangle^2_\mu(E_1) \equiv a$ et $\triangle^2_\mu(E_2) \equiv a$, ainsi la conjonction $\triangle^2_\mu(E_1) \wedge \triangle^2_\mu(E_2)$ est cohérente. En revanche, $\triangle^2_\mu(E_1 \sqcup E_2) \equiv \top$, ce qui n'implique pas $\triangle^2_\mu(E_1)$.

(IC7) On doit montrer que $\triangle^k_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \triangle^k_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$. On considère deux cas :

. Si $\bigwedge E \wedge \mu_1$ est cohérent, alors $\triangle^k_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \equiv \bigwedge E \wedge \mu_1 \wedge \mu_2$. Comme on a $\bigwedge E \wedge \mu_1 \wedge \mu_2 \models \triangle^k_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$, **(IC7)** est trivialement vrai.

. Si $\bigwedge E \wedge \mu_1$ est incohérent, alors on a

$$[\triangle^k_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2] = \{\omega \in [\mu_1] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\} \cap [\mu_2].$$

De plus, comme $\bigwedge E \wedge \mu_1$ est incohérent, on a aussi $\bigwedge E \wedge \mu_1 \wedge \mu_2$ incohérent et

$$[\triangle^k_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)] = \{\omega \in [\mu_1 \wedge \mu_2] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}.$$

Ainsi $\triangle^k_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \equiv \triangle^k_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$, et **(IC7)** est satisfait.

(IC8) On doit montrer que si $\triangle^k_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\triangle^k_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \triangle^k_{\mu_1}(E)$. On considère trois cas :

1. Si $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \bigwedge E$ est cohérent, alors $\mu_1 \wedge \bigwedge E$ est cohérent aussi et on a $\triangle^k_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \equiv \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \bigwedge E$. Alors $\triangle^k_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \triangle^k_{\mu_1}(E)$ et **(IC8)** est satisfait.
2. Si $\mu_1 \wedge \bigwedge E$ est incohérent, alors $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \bigwedge E$ est incohérent. Dans ce cas :

   $$[\triangle^k_{\mu_1}(E)] = \{\omega \in [\mu_1] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}.$$

   Comme $[\triangle^k_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)] = \{\omega \in [\mu_1 \wedge \mu_2] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$, on a :

   $$\triangle^k_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \triangle^k_{\mu_1}(E),$$

   et **(IC8)** est satisfait.
3. Le cas restant est lorsque $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \bigwedge E$ est incohérent et $\mu_1 \wedge \bigwedge E$ est cohérent. Dans ce cas, $\triangle^k_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \equiv \mu_1 \wedge \bigwedge E \wedge \mu_2$ est incohérent, et **(IC8)** est trivialement vérifié.

(Maj) Considérons le contre-exemple suivant : $\mathcal{P} = \{a\}$, $E_1 = \{K_1\}$, $E_2 = \{K_2\}$, $K_1 = \{a\}$, $K_2 = \{\neg a\}$. L'interprétation $a = \{1\}$ est un modèle de $\triangle^1_\top(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n})$ pour tout $n \geq 0$ puisqu'il satisfait la base K_1. En revanche, ω n'est pas un modèle de $\triangle^1_\top(E_2) \equiv \neg a$.

$\square$

Seuls deux postulats des opérateurs de fusion contrainte ne sont pas satisfaits : **(IC1)** puisque le résultat de la fusion un opérateur à quota peut être incohérent (voir l'exemple 38), et **(IC6)**. Il serait possible de forcer **(IC1)** en exigeant que, quand aucune interprétation n'atteint le quota k (c'est-à-dire satisfait au moins k bases), la base fusionnée est équivalente à la contrainte d'intégrité. Mais cette définition conduit à des opérateurs qui ne satisfont pas **(IC5)**. Ce dernier postulat est très important du point de vue de l'agrégation. Il correspond à la condition de Pareto, qui est considérée comme la condition de rationalité minimale pour l'agrégation en théorie du choix social [Arr63, Mou88, ASS02]. C'est pourquoi nous ne considérons pas une telle famille additionnelle d'opérateurs dans la suite.

5.3 Autres propriétés logiques

En plus de ces propriétés générales, quelques propriétés supplémentaires sont satisfaites par les opérateurs à quota.

(Disj) Si $(\bigvee E) \wedge \mu$ est cohérent, alors $\triangle_\mu(E) \models (\bigvee E) \wedge \mu$.

La propriété de disjonction **(Disj)** n'est pas partagée par la plupart des opérateurs de fusion contrainte [KP02a], qui peuvent « produire » de nouvelles croyances/buts à partir de celles des bases du profil (certaines interprétations qui ne satisfont aucune des bases du profil peuvent être choisies comme modèles de la base fusionnée). Quand ce comportement n'est pas souhaité, des opérateurs de fusion à sélection de formules – qui satisfont **(Disj)** – peuvent être utilisés, mais de tels opérateurs ne satisfont pas beaucoup de postulats de rationalité [Kon00] (en particulier **(IC3)** n'est généralement pas satisfait) et ont souvent une complexité algorithmique plus élevée [KLM04, KLM02]. Les opérateurs de fusion à quota (aussi bien que les opérateurs $Gmin$ étudiés ensuite), qui vérifient également **(Disj)**, constituent donc d'intéressantes alternatives aux opérateurs à sélection de formules à cet égard.

Deux autres propriétés peuvent être définies pour caractériser plus précisément les opérateurs à quota. La première est un affaiblissement de **(Maj)** :

(Wmaj) Si $\triangle_\mu(E_2)$ est cohérent, alors $\exists n, \Delta_\mu(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}) \wedge \Delta_\mu(E_2)$ est cohérent.

Cette propriété exprime l'idée qu'au moins une croyance partagée par suffisamment de membres du groupe peut être imposée au groupe. C'est un affaiblissement de la propriété **(Maj)**, qui impose que *toutes* les croyances soutenues par suffisamment de membres du groupe doivent être imposées au groupe. Il est d'ailleurs facile de voir que **(Wmaj)** est une conséquence de **(Maj)**. Cependant, la propriété **(Wmaj)** exprime l'idée que le nombre de bases partageant un modèle a une influence sur le résultat.

La seconde propriété montre l'importance des sous-ensembles maximaux cohérents (pour la cardinalité) du profil pour la base fusionnée.

(Card) Si $M_1, M_2 \in \textsc{maxcons}_\mu(E)$, $\#(M_1) \leq \#(M_2)$, et $\triangle_\mu(E) \wedge M_1$ est cohérent, alors $\triangle_\mu(E) \wedge M_2$ est cohérent.

Cette propriété exprime l'idée que la cardinalité d'un ensemble maximal cohérent est prise en compte par l'opérateur considéré : si un ensemble maximal cohérent M_1 est cohérent avec la base fusionnée, tout ensemble maximal cohérent contenant plus de formules que M_1 sera lui même cohérent avec la base fusionnée.

Proposition 54. *Les opérateurs $\triangle^k$ satisfont les propriétés* **(Wmaj)** *et* **(Card)**, *et ils satisfont* **(Disj)** *si* $k \geq 1$.

Preuve:

(Disj) Il y a deux cas :
- Si $(\bigwedge E) \wedge \mu$ est cohérent, alors $\triangle^k_\mu(E) \equiv (\bigwedge E) \wedge \mu$ et $\triangle^k_\mu(E) \models (\bigvee E) \wedge \mu$.
- Si $(\bigwedge E) \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors les modèles de $\triangle^k_\mu(E)$ sont des modèles de μ qui satisfont au moins k bases ($k \geq 1$) du profil E. Donc ils sont aussi modèles de $(\bigvee E) \wedge \mu$, et le résultat est vrai.

(Card) Soient $M_1, M_2 \in \textsc{maxcons}_\mu(E)$ tel que $\#(M_1) \leq \#(M_2)$. Par hypothèse $\triangle^k_\mu(E) \wedge M_1$ est cohérent.
Il y a deux cas :
- Si $(\bigwedge E) \wedge \mu$ est cohérent, alors $\triangle^k_\mu(E) \equiv (\bigwedge E) \wedge \mu$. En conséquence, $\textsc{maxcons}_\mu(E) = \{E\}$. Donc $\triangle^k_\mu(E) \wedge M_2$ est cohérent.

  – Si $(\bigwedge E) \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors soit ω un modèle quelconque de $\triangle^k_\mu(E) \wedge M_1$; ω est un modèle de M_1 qui satisfait au moins k bases du profil E (puisque $\triangle^k_\mu(E)$ est cohérent lorsque $\triangle^k_\mu(E) \wedge M_1$ est cohérent). Comme $M_1 \in \text{MAXCONS}_\mu(E)$, on peut en déduire que $\#(M_1) \geq k$. De plus, comme $\#(M_1) \leq \#(M_2)$, tout modèle ω' de M_2 satisfait μ et au moins k bases de E. Ainsi, ω' est aussi un modèle de $\triangle^k_\mu(E)$ et $\triangle^k_\mu(E) \wedge M_2$ est cohérent.

(Wmaj) Supposons que $\triangle^k_\mu(E_2)$ soit cohérent. Il y a deux cas :

  – Si $(\bigwedge E_2) \wedge \mu$ est cohérent, alors $\triangle^k_\mu(E_2) \equiv (\bigwedge E_2) \wedge \mu$. Donc :
    – Si $\bigwedge(E_1 \sqcup E_2) \wedge \mu$ est cohérent, alors $\triangle^k_\mu(E_1 \sqcup E_2) \equiv \bigwedge(E_1 \sqcup E_2) \wedge \mu$, qui est trivialement cohérent avec $(\bigwedge E_2) \wedge \mu$, et donc avec $\triangle^k_\mu(E_2)$. Ainsi **(Wmaj)** est satisfait avec $n = 1$.
    – Si $\bigwedge(E_1 \sqcup E_2) \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors pour tout entier $n \geq 1$, $\bigwedge(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}) \wedge \mu$ n'est pas cohérent. Par définition, les modèles de $\triangle^k_\mu(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n})$ sont les modèles de μ qui satisfont au moins k bases de $E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}$. Soit ω un modèle de $\triangle^k_\mu(E_2)$. Comme $\#(E_2) \geq 1$, ω satisfait μ et au moins une base de E_2. Ainsi, pour tout $n \geq k$, ω satisfait μ et au moins k bases de $E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}$. En conséquence, ω est un modèle de $\triangle^k_\mu(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n})$ et de $\triangle^k_\mu(E_2)$.
  – Si $(\bigwedge E_2) \wedge \mu$ n'est pas cohérent, on considère un modèle ω de $\triangle^k_\mu(E_2)$: ω satisfait μ et au moins k bases de E_2. Alors ω satisfait μ et au moins k bases de $E_1 \sqcup E_2$, donc ω est un modèle de $\triangle^k_\mu(E_1 \sqcup E_2) \wedge \triangle^k_\mu(E_2)$. Ainsi **(Wmaj)** est satisfait avec $n = 1$.

$\square$

Il est à remarquer que tous les opérateurs de fusion contrainte ne vérifient pas **(Card)** (voir paragraphe 6).

5.4 Complexité algorithmique

Pour les opérateurs de fusion à quota, on peut montrer que :

Proposition 55. FUSION($\triangle^k$) *est* coBH(3)*-complet.*

Preuve:

– Appartenance : il suffit de réduire polynomialement FUSION($\triangle^k$) à UNSAT(3), le langage défini par UNSAT(3) $= \{\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle \mid \phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \mathcal{L}$ and $\phi_1 \in$ UNSAT or ($\phi_2 \in$ SAT and $\phi_3 \in$ UNSAT)$\}$. Pour ce faire, nous avons montré dans la proposition 51 que lorsque $\bigwedge E \wedge \mu$ est incohérent, on a $\triangle^k_\mu(E) \equiv (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu$ où $\ulcorner n_k \urcorner = \{C \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid \#(C) = k\}$. De plus,$(\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu$ est de taille polynomiale en $|E|+|\mu|$. Soit f la réduction polynomiale qui associe à toute instance $\langle E, \mu, \alpha \rangle$ de FUSION($\triangle^k$) l'instance $\langle \phi_1 = (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu \wedge \neg\alpha, \phi_2 = \bigwedge E \wedge \mu, \phi_3 = \bigwedge E \wedge \mu \wedge \neg\alpha \rangle$ de UNSAT(3). En exploitant le fait que $\bigwedge E \wedge \mu \models \triangle^k_\mu(E)$, on a $\langle E, \mu, \alpha \rangle \in$ FUSION($\triangle^k$) si et seulement si $(\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu \wedge \neg\alpha \in$ UNSAT or ($\bigwedge E \wedge \mu \in$ SAT and $\bigwedge E \wedge \mu \wedge \neg\alpha \in$ UNSAT).
– Difficulté : plutôt que de donner directement une réduction polynomiale de UNSAT(3) vers FUSION($\triangle^k$), on donne une traduction polynomiale fidèle et modulaire de l'inférence *full-meet*

(qui équivaut à l'inférence à partir d'une base fusionnée utilisant l'opérateur de fusion par intersection totale ou, de manière équivalente, l'opérateur à quota 0) vers l'inférence à partir d'une base fusionnée utilisant un opérateur à quota quelconque. L'inférence *full-meet* peut être définie par : pour tous ϕ_1, ϕ_2, $\phi_3 \in \mathcal{L}$, on a $\phi_1 \circ_{FM} \phi_2 \models \phi_3$ si et seulement si :

si $\phi_1 \wedge \phi_2$ est cohérent
alors $\bigwedge \phi_1 \wedge \phi_2 \models \phi_3$
sinon $\phi_2 \models \phi_3$

L'inférence à partir d'une base fusionnée utilisant un opérateur à quota k peut être définie par : pour tout profil E, contrainte d'intégrité μ et formule α, on a $\triangle^k_\mu(E) \models \alpha$ si et seulement si :

si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent
alors $\bigwedge E \wedge \mu \models \alpha$
sinon $(\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \wedge \mu \models \alpha$

Pour tout entier naturel k fixé, à tout triplet $\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle$ de formules de $\mathcal{L}$, on peut associer en temps polynomial le triplet $\langle E = \{\phi_1\} \sqcup \{\phi_2\}^k, \mu = \phi_2, \alpha = \phi_3 \rangle$ où $\{\phi_2\}^k$ est le multi-ensemble dans lequel ϕ_2 possède k occurrences (en particulier, le multi-ensemble vide quand $k = 0$). Clairement, on a $\phi_1 \circ_{FM} \phi_2 \models \phi_3$ si et seulement si $\triangle^k_\mu(E) \models \alpha$. Le fait que décider l'inférence *full-meet* soit un problème $\mathsf{coBH(3)}$-difficile (cf. théorème 4.3 de [Neb98]) conclut la preuve.

□

On peut remarquer que la complexité de FUSION($\triangle^k$) descend à coNP dans le cas dégénéré où k est plus grand que le nombre de bases de E ou sous la restriction où $\bigwedge E \wedge \mu$ est incohérent. En effet, si $k = \#(E)$, alors $(\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \equiv E$ et les parties 'alors' et 'sinon' de la conditionnelle donnée dans la preuve de la proposition 55 coïncident ; ainsi, cette conditionnelle peut être simplifiée en :

$\bigwedge E \wedge \mu \models \alpha$

ce qui réduit le problème FUSION($\triangle^k$) à une instance du problème de déduction (un problème coNP-complet). De même, si $k > \#(E)$, alors $(\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} \bigwedge_{j \in C} K_j) \equiv \bot$, donc l'instruction 'sinon' de la conditionnelle donnée dans la preuve de la proposition 55 est équivalente à $\top$; ainsi, les parties 'alors' et 'sinon' coïncident à nouveau et la conditionnelle peut être simplifiée comme indiqué ci-avant.

5.5 Manipulabilité

Intéressons-nous à présent à la résistance à la manipulation des opérateurs à quota.

Rappelons que la non-manipulabilité est une propriété difficile à réaliser, autant dans le cadre de la théorie du choix social, pour l'agrégation de relations de préférences, cf le théorème d'impossibilité de Gibbard-Satterthwaite [Gib73, Sat75, Mou88], que pour la fusion propositionnelle avec nombre d'opérateurs existants (voir la partie II de ce mémoire).

On peut montrer que :

Proposition 56. *Les opérateurs de fusion à quota ne sont manipulables pour aucun des indices i_p, i_{d_w} et i_{d_s}.*

Preuve:
On considère d'abord l'indice i_p.
Raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier naturel k et une contrainte d'intégrité μ tels que $\triangle_\mu^k$ soit manipulable pour i_p. Alors on peut trouver un profil $E = \{K_2, ..., K_n\}$, deux bases K et K' tels que

$$i_p(K, \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})) < i_p(K, \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\}))(*).$$

- Si $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})$ est incohérent, alors $\forall \omega \models K$, on a $\omega \not\models \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})$. Ainsi, $\forall \omega \models K$, ω ne satisfait pas μ ou ω satisfait strictement moins de $k-1$ bases K_i avec $i > 1$. Dans ces deux cas, ω ne peut satisfaire $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})$ puisqu'il satisfait au mieux $k-1$ bases de $E \sqcup \{K'\}$ ou il ne satisfait pas μ.
  Ainsi, $\forall \omega \models K, \omega \not\models \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})$. Donc $\#([K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})]) = 0$. En conséquence, $i_p(K, \Delta(E \sqcup \{K'\}) = 0$, ce qui interdit toute manipulation pour i_p. Ce cas est donc exclu.
- $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})$ est cohérent. Alors on a à partir de l'égalité (*) :

$$\frac{\#([K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})])}{\#([\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})])} < \frac{\#([K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})])}{\#([\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})])} \tag{5.1}$$

  Deux cas sont à considérer :
  <u>cas 1 :</u> $\bigwedge E \wedge K \wedge \mu$ est cohérent. Donc $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\}) \equiv \bigwedge E \wedge K \wedge \mu$. Ainsi chaque modèle de $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})$ est un modèle de K, ce qui implique que la valeur $i_p(K, \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})) = 1$ est maximale, donc elle ne peut pas être augmentée, et aucune manipulation n'est possible dans ce cas.
  <u>cas 2 :</u> $\bigwedge E \wedge K \wedge \mu$ est incohérent. Alors $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\}) \equiv (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K_j)) \wedge \mu$, où $K_1 = K$ et $E = \{K_2, ..., K_n\}$. Comme $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})$ est cohérent, deux cas sont à examiner :
  - $\bigwedge E \wedge K' \wedge \mu$ est cohérent. Alors $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\}) \equiv \bigwedge E \wedge K' \wedge \mu$. Aucun modèle de K n'est un modèle de $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})$. En effet, si c'était le cas, il existerait une interprétation ω telle que $\omega \models K$ et $\omega \models \bigwedge(E \sqcup \{K'\}) \wedge \mu$. Alors on aurait $\omega \models \bigwedge(E \sqcup \{K\}) \wedge \mu$, ce qui est impossible puisque $\bigwedge E \wedge K \wedge \mu$ est incohérent. Ainsi $[K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})] = \emptyset$ et $i_p(K, \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\}) = 0$, ce qui empêche toute manipulation pour i_p.
  - $\bigwedge E \wedge K' \wedge \mu$ est incohérent. Alors

$$\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\}) \equiv (\bigvee_{C \in \ulcorner n_k \urcorner} (\bigwedge_{j \in C} K'_j)) \wedge \mu,$$

    avec $K'_1 = K'$ et $K'_i = K_i$ pour $i > 1$.
    Si $\omega \models K$ et $\omega \not\models \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})$, alors ω ne satisfait pas μ ou ω satisfait strictement moins que $k-1$ bases K_i avec $i > 1$. Dans les deux cas, ω ne peut pas être un modèle de $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})$.
    En conséquence :

$$\#([K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})]) \geq \#([K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})]). \tag{5.2}$$

    D'un autre côté, si $\omega \not\models K$ et $\omega \models \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})$, alors il existe au moins k bases K_i avec $i > 1$ telles que $\omega \models K_i \wedge \mu$. Alors $\omega \models \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})$, et ainsi :

$$\#([\neg K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})]) \leq \#([\neg K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})]). \tag{5.3}$$

    Pour simplifier les notations, on pose :

- $x = \#([K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})])$,
- $y = \#([\neg K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})])$,
- $x' = \#([K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})])$,
- $y' = \#([\neg K] \cap [\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})])$,

L'inéquation (5.1) devient : $\frac{x}{x+y} < \frac{x'}{x'+y'}$. Comme on sait que $y \leq y'$ grâce à (5.3), on a : $\frac{x}{x+y} < \frac{x'}{x'+y}$. Avec (5.2), on sait que $x \geq x'$. Ainsi on peut écrire $x' = x - z$, avec $z \geq 0$. On obtient $\frac{x}{x+y} < \frac{x-z}{x+y-z}$, ce qui est équivalent à :

$$\frac{(x)(x+y-z)}{(x+y)(x+y-z)} < \frac{(x-z)(x+y)}{(x+y-z)(x+y)},$$

soit

$$x^2 + xy - xz < x^2 + xy - xz - yz,$$

donc $zy < 0$ avec y et z positifs : c'est impossible.

Les opérateurs à quota ne sont donc pas manipulables pour i_p. Une manipulation pour i_{d_w} entraîne une manipulation pour i_p, même si l'opérateur ne satisfait pas **(IC1)** (voir proposition 25). Donc la non-manipulabilité des opérateurs de fusion à quota pour i_{d_w} est une conséquence de la non-manipulabilité de ces opérateurs pour i_p.

Finalement, le dernier cas est l'indice drastique fort i_{d_s}. Supposons qu'il existe une manipulation pour cet indice : il existe un entier naturel k et une contrainte d'intégrité μ tels que $\triangle_\mu^k$ est manipulable pour i_{d_s}. Alors on peut trouver un profil $E = \{K_2, ..., K_n\}$, deux bases K et K' tels que

$$i_{d_s}(K, \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})) < i_{d_s}(K, \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})).$$

Cette inégalité implique que :

$$i_{d_s}(K, \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})) = 0 \text{ donc } \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\}) \not\models K$$

et

$$i_{d_s}(K, \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})) = 1 \text{ donc } \triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\}) \models K.$$

Si $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})$ est cohérent, cela implique une manipulation pour l'indice i_p (voir proposition 25), et on vient de voir que c'est impossible. Un problème est donc susceptible d'apparaître si $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})$ n'est pas cohérent. Dans ce cas :

- soit $k > \#(E \sqcup \{K'\})$ et on a également $k > \#(E \sqcup \{K\})$. Alors $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})$ n'est pas cohérent et $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\}) \models K$, ce qui contredit les hypothèses.
- soit $k \leq \#(E \sqcup \{K'\})$ et il n'y a aucun modèle de μ qui satisfait k bases parmi $\{K_2, ..., K_n, K'\}$. Comme $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})$ est cohérent, les modèles de $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K\})$ sont des modèles de K, ce qui contredit encore les hypothèses.

Ainsi, une manipulation n'est pas possible si $\triangle_\mu^k(E \sqcup \{K'\})$ n'est pas cohérent, et les opérateurs de fusion à quota ne sont pas manipulables pour i_{d_s}, ce qui conclut la preuve.

□

5.6 Quotas absolus et relatifs

Dans la définition des opérateurs de fusion à quota, un seuil absolu, c'est-à-dire un entier fixé indépendant du nombre de bases du profil considéré, a été utilisé. Il peut aussi être intéressant d'exprimer l'idée de quota de façon relative, et de définir les modèles de la base fusionnée comme les interprétations satisfaisant au moins la moitié (ou les deux-tiers, ou la proportion voulue) des bases initiales.

Nous appelons de tels opérateurs les opérateurs de fusion à ratio :

Définition 43 (opérateurs à ratio)**.** Soient k un nombre réel tel que $0 \leq k \leq 1$, $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un profil, et μ une contrainte d'intégrité. L'*opérateur de fusion à ratio* k , noté $\overline{\triangle}^k$, est défini de façon sémantique par :

$$[\overline{\triangle}^k_\mu(E)] = \begin{cases} \{\omega \in [\mu] \mid \forall K_i \in E\ \omega \models K_i\} \text{ si non vide,} \\ \{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k \times n\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exemple 39. *(suite) On peut utiliser trois variables prises dans cet ordre pour représenter les croyances des consultants : q avoir la qualification, j avoir le poste, m avoir la motivation. Alors le profil $E = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ représente les croyances des agents, avec $[K_1] = \{100, 001, 101\}$, $[K_2] = \{001, 101\}$, $[K_3] = \{100, 000\}$, $[K_4] = \{111\}$, et la contrainte d'intégrité μ donnée par $[\mu] = \mathcal{W} \backslash \{010, 011\}$. Alors on a :*
$[\overline{\triangle}^{0.2}_\mu(E)] = \{001, 100, 101\}$, $[\overline{\triangle}^{0.3}_\mu(E)] = [\overline{\triangle}^{0.5}_\mu(E)] = \{001, 100, 101\}$.

On peut rapidement imaginer les liens étroits entre les deux familles d'opérateurs de fusion à quota (celle basée sur un quota absolu et celle basée sur un quota relatif ou ratio). Chaque opérateur de fusion à ratio correspond à une famille d'opérateurs de fusion à quota (un pour chaque cardinal possible du profil). Et pour chaque cardinal d'un profil, chaque opérateur de fusion à quota (absolu) correspond à une famille d'opérateurs de fusion à ratio. La correspondance exacte entre les quotas absolus et les quotas relatifs (à ratio) est précisée dans la proposition suivante (dans laquelle $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière de x) :

Proposition 57. *Soit E un profil tel que $\#(E) = n$ et soit μ une contrainte d'intégrité.*

1. *Soit k un nombre réel tel que $0 \leq k \leq 1$. On a $\overline{\triangle}^k_\mu(E) \equiv \triangle^{\lfloor k \times n \rfloor}_\mu(E)$.*
2. *Soit k un entier naturel. Si $k < n$ alors pour tout $\overline{k} \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, on a $\triangle^k_\mu(E) \equiv \overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E)$; sinon, on a $\triangle^k_\mu(E) \equiv \overline{\triangle}^1_\mu(E)$.*

Preuve:

- Si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent, $\triangle^k_\mu(E) \equiv \bigwedge E \wedge \mu \equiv \overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E)$ pour tout entier naturel k et tout nombre réel $\overline{k} \in [0, 1]$.
- Si $\bigwedge E \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors on considère deux cas :
  - $\triangle^k_\mu(E)$ est cohérent. Soit ω un modèle de $\triangle^k_\mu(E)$. Alors ω satisfait μ et au moins k bases de E. Donc ω satisfait μ et un ratio de bases de E supérieur ou égal à $\overline{k} = \frac{k}{n}$. Ainsi $\omega \models \overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E)$, et en conséquence, $\triangle^k_\mu(E) \models \overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E)$. Réciproquement, si $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E)$ est cohérent et ω est un modèle de $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E)$, alors ω satisfait μ et un ratio de bases de E supérieur ou égal à $\overline{k}$. Donc ω satisfait μ et au moins $k = \lfloor \overline{k} \times n \rfloor$ bases de E. Ainsi $\omega \models \triangle^k_\mu(E)$, et en conséquence, $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E) \models \triangle^k_\mu(E)$, ce qui complète la preuve.

– $\triangle^k_\mu(E)$ n'est pas cohérent : aucun modèle de μ ne satisfait au moins k bases de E. Si $k \geq n$, aucun modèle de μ ne satisfait un ratio de bases de E égal à 1 (puisque $\bigwedge E \wedge \mu$ n'est pas cohérent). Ainsi $\overline{\triangle}^1_\mu(E)$ est incohérent et en conséquence, on a $\overline{\triangle}^1_\mu(E) \equiv \triangle^k_\mu(E)$. Si $k < n$, aucun modèle de μ ne satisfait un ratio de bases de E supérieur ou égal à $\overline{k} = \frac{k}{n}$ (sinon il satisferait au moins k bases de E). Donc $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E)$ est incohérent et en conséquence, $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E) \equiv \triangle^k_\mu(E)$.

□

Bien que les motivations intuitives des deux définitions de ces familles semblent différentes, il s'avère que les opérateurs de fusion à ratio ont exactement les mêmes propriétés en ce qui concerne la complexité algorithmique et la manipulabilité que les opérateurs de fusion à quota (absolu), bien que les preuves des résultats soient parfois distinctes. Seules quelques propriétés logiques séparent les deux familles d'opérateurs :

Proposition 58. *Les opérateurs $\overline{\triangle}^k$ satisfont* **(IC0)**, **(IC2)**, **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC5)**, **(IC7)**, **(IC8)**, *et* **(Card)**. *Ils satisfont* **(Maj)** *si $k > 0$ et* **(Disj)** *si $k \geq \frac{1}{\#(E)}$. Ils ne satisfont pas* **(IC1)** *et* **(IC6)** *en général.*

Preuve:
Grâce à la proposition 57, de nombreuses preuves pour les opérateurs à ratio peuvent être déduites des preuves pour les opérateurs à quota absolu correspondants. Plus précisément, chaque fois que le cardinal du profil E peut être fixé une fois pour toute au début de la preuve, c'est-à-dire pour **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC3)**, **(IC4)**, **(IC7)**, **(IC8)**, **(Disj)** pour un ratio supérieur à $\frac{1}{\#(E)}$ et **(Card)**, la preuve correspondante pour les opérateurs à ratio peut être obtenue à partir de la preuve pour les opérateurs à quota absolu en faisant les changements suivants ; soit n le cardinal du profil initial E, et k, $\overline{k}$ les deux nombres liés comme mentionné dans la proposition 57 ; en remplaçant

– '$[\triangle^k_\mu]$' par '$[\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu]$',
– 'k bases' par 'un ratio $\overline{k} = \frac{k}{n}$ de bases',
– '$\{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) \geq k\}$' par '$\{\omega \in [\mu] \mid \frac{\#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\})}{n} \geq \overline{k}\}$'.

Ainsi, trois preuves seulement manquent :

– **(IC5) :** on considère deux profils E_1 avec $\#(E_1) = n_1$ et E_2 avec $\#(E_2) = n_2$. Si $\overline{k}$ est le ratio donné, on note $k_1 = \overline{k} \times n_1$, $k_2 = \overline{k} \times n_2$ et $k = \overline{k} \times (n_1 + n_2) = k_1 + k_2$.
Si $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_1) \wedge \overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_2)$ n'est pas cohérent, alors l'implication est évidente. Sinon, on considère un modèle ω de $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_1) \wedge \overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_2)$. Il y a trois cas :
  – $(\bigwedge E_1) \wedge \mu$ et $(\bigwedge E_2) \wedge \mu$ sont cohérents. Alors $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_1) \equiv (\bigwedge E_1) \wedge \mu$ et $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_2) \equiv (\bigwedge E_2) \wedge \mu$. Dans ce cas, $\omega \models (\bigwedge E_1) \wedge (\bigwedge E_2) \wedge \mu$, donc $\bigwedge(E_1 \sqcup E_2) \wedge \mu$ est cohérent. Ainsi $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_1 \sqcup E_2) \equiv (\bigwedge E_1) \wedge (\bigwedge E_2) \wedge \mu$, et on a $\overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_1) \wedge \overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_2) \models \overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_1 \sqcup E_2)$.
  – $(\bigwedge E_1) \wedge \mu$ n'est pas cohérent et $(\bigwedge E_2) \wedge \mu$ n'est pas cohérent. Alors ω satisfait μ, au moins k_1 bases de E_1 et au moins k_2 bases de E_2. Donc il satisfait au moins $k_1 + k_2 = k$ bases de $E_1 \sqcup E_2$. Ainsi ω satisfait μ et un ratio supérieur ou égal à $\frac{k}{n_1+n_2}$ bases de $E_1 \sqcup E_2$; en conséquence, $\omega \models \overline{\triangle}^{\overline{k}}_\mu(E_1 \sqcup E_2)$.
  – $(\bigwedge E_1) \wedge \mu$ est cohérent et $(\bigwedge E_2) \wedge \mu$ est incohérent (le cas restant est similaire par symétrie). Considérons ω qui satisfait μ, n_1 bases de E_1, et au moins k_2 bases de E_2. Alors il satisfait au moins $n_1 + k_2$ bases de $E_1 \sqcup E_2$. Ainsi, ω satisfait μ et un ratio supérieur ou égal à $\frac{n_1+k_2}{n_1+n_2}$ de

bases de $E_1 \sqcup E_2$. Comme $n_1 \geq k_1$, on a :

$$\frac{n_1 + k_2}{n_1 + n_2} \geq \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2} \geq \frac{k}{n_1 + n_2} \geq \overline{k}.$$

Alors ω satisfait μ et un ratio supérieur ou égal à $\overline{k}$ bases de $E_1 \sqcup E_2$. Donc $\omega \models \overline{\triangle}_\mu^{k}(E_1 \sqcup E_2)$

- **(IC6) :** considérons le contre-exemple suivant : $\mathcal{P} = \{a\}$, $E_1 = \{\{a\}, \{a\}, \{a\}, \{\neg a\}\}$, $E_2 = \{\{a\}, \{\neg a\}, \{\neg a\}\}$ et $\mu = \top$. On a $\overline{\triangle}_\mu^{\frac{1}{3}}(E_1) \equiv \{a\}$ et $\overline{\triangle}_\mu^{\frac{1}{3}}(E_2) \equiv \top$, donc la conjonction $\overline{\triangle}_\mu^{\frac{1}{3}}(E_1) \wedge \overline{\triangle}_\mu^{\frac{1}{3}}(E_2)$ est cohérente. En revanche, $\overline{\triangle}_\mu^{\frac{1}{3}}(E_1 \sqcup E_2) \equiv \top$, qui n'implique pas $\overline{\triangle}_\mu^{\frac{1}{3}}(E_1)$.
- **(Maj) :** on veut montrer que $\exists n \in \mathbb{N}, \overline{\triangle}_\mu^{k}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}) \models \overline{\triangle}_\mu^{k}(E_2)$.

  Pour simplifier la preuve, nous introduisons les notations suivantes :
  - $k_1^\omega = \#(\{K \mid K \in E_1 \; et \; \omega \models K\})$,
  - $k_2^\omega = \#(K \mid K \in E_2 \; et \; \omega \models K\})$,
  - $n_1 = \#(E_1)$,
  - $n_2 = \#(E_2)$.

  1. Si $(\bigwedge E_2) \wedge \mu$ est cohérent, alors il y a deux cas :
     - $\bigwedge(E_1 \sqcup E_2) \wedge \mu$ est cohérent. Donc $\overline{\triangle}_\mu^{k}(E_1 \sqcup E_2) \equiv (\bigwedge E_1) \wedge (\bigwedge E_2) \wedge \mu$ et $\overline{\triangle}_\mu^{k}(E_2) \models (\bigwedge E_2) \wedge \mu$. La propriété est vérifiée avec $n = 1$.
     - $\bigwedge(E_1 \sqcup E_2) \wedge \mu$ n'est pas cohérent. Alors pour tout $n \geq 1$, $\bigwedge(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}) \wedge \mu$ est aussi cohérent.

       Raisonnement par l'absurde : supposons qu'il existe un monde ω tel que, pour tout entier naturel n, $\omega \models \overline{\triangle}_\mu^{k}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n})$ et $\omega \not\models \overline{\triangle}_\mu^{k}(E_2)$. Alors ω est un modèle de μ qui satisfait un ratio supérieur ou égal à $\overline{k}$ de bases de $E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}$, et ω ne satisfait pas $(\bigwedge E_2) \wedge \mu$. Donc ω est un modèle de $(\bigvee E_1) \wedge \mu$ et n'est pas un modèle de $(\bigvee E_2) \wedge \mu$ (puisque $\bigwedge(E_1 \sqcup E_2) \wedge \mu$ n'est pas cohérent). En conséquence, ω satisfait exactement k_1^ω bases de $E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}$ parmi les $n_1 + n \times n_2$ bases de ce profil, pour tout $n > \frac{k_1^\omega - \overline{k} \times n_1}{\overline{k} \times n_2}$. Donc ω satisfait un ratio inférieur à $\overline{k}$ de bases de $E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}$, ce qui montre une contradiction. Donc $\overline{\triangle}_\mu^{k}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}) \models \overline{\triangle}_\mu^{k}(E_2)$.

  2. Si $(\bigwedge E_2) \wedge \mu$ n'est pas cohérent, alors on prouve que la propriété est vraie en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe un monde ω tel que, pour tout entier naturel n, $\omega \models \overline{\triangle}_\mu^{k}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n})$ et $\omega \not\models \overline{\triangle}_\mu^{k}(E_2)$.

     Comme $\omega \not\models \overline{\triangle}_\mu^{k}(E_2)$, on a $\frac{k_2^\omega}{n_2} < \overline{k}$, donc $k_2^\omega < \overline{k} \times n_2$; alors, on peut noter $k_2^\omega = \overline{k} \times n_2 - \epsilon_2^\omega$ avec $\epsilon_2^\omega > 0$.

     Comme $\omega \models \overline{\triangle}_\mu^{k}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n})$, on a également $\frac{k_1^\omega + n \times k_2^\omega}{n_1 + n \times n_2} \geq \overline{k}$. Soit n_ω un entier tel que $n_\omega > \frac{k_1^\omega}{\epsilon_2^\omega}$. Alors : $\frac{k_1^\omega}{\epsilon_2^\omega} - n_\omega < 0$, donc $k_1^\omega - n_\omega \times \epsilon_2^\omega < 0$, ainsi $\dfrac{k_1^\omega - n_\omega \times \epsilon_2^\omega}{n_1 + n_\omega \times n_2} < 0$.

Donc on a
$$\frac{n_\omega \times \overline{k} \times n_2}{n_1 + n_\omega \times n_2} + \frac{k_1^\omega - n_\omega \times \epsilon_2^\omega}{n_1 + n_\omega \times n_2} < \frac{n_\omega \times \overline{k} \times n_2}{n_1 + n_\omega \times n_2}$$
et, comme $n_1 > 0$:
$$\frac{n_\omega \times \overline{k} \times n_2}{n_1 + n_\omega \times n_2} < \frac{n_\omega \times \overline{k} \times n_2}{n_\omega \times n_2} = \frac{\overline{k} \times n_2}{n_2} = \overline{k}.$$
Donc :
$$\frac{n_\omega \times \overline{k} \times n_2 + k_1^\omega - n_\omega \times \epsilon_2^\omega}{n_1 + n_\omega \times n_2} = \frac{k_1^\omega + n_\omega \times k_2^\omega}{n_1 + n_\omega \times n_2} < \overline{k}.$$

Et $\omega \not\models \overline{\triangle}_\mu^{\overline{k}}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n_\omega})$.

De plus, même en augmentant le nombre de copies de E_2 dans le profil, on ne peut pas imposer que ω devienne un modèle de la base fusionnée : $\forall n \geq n_\omega, \omega \not\models \overline{\triangle}_\mu^{\overline{k}}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n})$.

Donc on sait que pour tout ω tel que $\exists n \in \mathbb{N}, \omega \models \overline{\triangle}_\mu^{\overline{k}}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n})$ et $\omega \not\models \overline{\triangle}_\mu^{\overline{k}}(E_2)$, on peut trouver un entier naturel n_ω tel que $\omega \not\models \overline{\triangle}_\mu^{\overline{k}}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n_\omega})$. Pour conclure la preuve, il suffit de considérer $N = max_{\omega \in \mathcal{W}} n_\omega$: pour tout $n \geq N$, on a $\overline{\triangle}_\mu^{\overline{k}}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n}) \models \overline{\triangle}_\mu^{\overline{k}}(E_2)$.

□

5.7 Les opérateurs $\triangle^{k_{\max}}$

Que le quota choisi soit absolu ou pas, un point important est le choix de sa valeur. On peut observer que les opérateurs de fusion à quota conduisent à une suite de bases fusionnées monotone en ce qui concerne l'implication logique :

Proposition 59. *Soient E un profil, μ une contrainte d'intégrité. On a $\triangle_\mu^{k+1}(E) \models \triangle_\mu^k(E)$ pour tous les entiers k.*

Preuve:
Si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent, alors $\triangle_\mu^{k+1}(E) \equiv \triangle_\mu^k(E) \equiv \bigwedge E \wedge \mu$, et la propriété est vérifiée. Si $\bigwedge E \wedge \mu$ est incohérent, alors quelle que soit l'interprétation ω satisfaisant au moins $k+1$ bases à de E, elle satisfait au moins k éléments de E, et la conclusion suit.

□

Parmi les éléments de cet suite, certains sont remarquables. Ainsi, $\triangle^0$ donne la conjonction des bases (avec les contraintes) quand cette conjonction est cohérente, et μ sinon. Il correspond à *l'opérateur de fusion par intersection totale* [KP99] (voir paragraphe 1.1.3). $\triangle^1$ donne la conjonction des bases (avec les contraintes) si cette conjonction est cohérente et la disjonction des bases (avec les contraintes) sinon ; il est proche de l' *opérateur de fusion basique* [KP99] (voir paragraphe 1.1.3), et est également définissable comme un opérateur à sélection de modèles obtenu en utilisant la distance drastique et *max* comme fonction d'agrégation [KLM02] (voir paragraphe 1.1.2). La seule différence est que $\triangle^1$ donne un résultat incohérent quand la disjonction des bases n'est pas cohérente avec les contraintes, tandis que l'opérateur de fusion basique donne μ dans ce cas. A chaque fois que k augmente, le résultat de la fusion est le même que pour la valeur précédente de k ou est logiquement plus fort. Dans notre cadre propositionnel fini, la suite $(\triangle_\mu^k(E))(k > 0)$ est évidemment stationnaire à partir d'un certain rang. La valeur pour laquelle elle devient stationnaire n'est pas intéressante en soi, puisque la base fusionnée correspondante à ce point fixe est soit la conjonction des bases du profil (avec les contraintes), soit la base incohérente. Toutefois, une valeur intéressante de k est celle conduisant à la dernière base fusionnée non triviale.

Définition 44 **($\triangle^{k_{max}}$).** Soient $E = \{K_1, \dots, K_n\}$ un profil et μ une contrainte d'intégrité. On pose $k_{\max} = \max(\{i \leq \#(E) \mid \triangle_\mu^i(E) \not\models \bot\})$. L'opérateur $\triangle^{k_{max}}$ est défini de façon sémantique par :

$$[\triangle_\mu^{k_{max}}(E)] = \begin{cases} \{\omega \in [\mu] \mid \forall K_i \in E\ \omega \models K_i\} \text{ si non vide,} \\ \{\omega \in [\mu] \mid \#(\{K_i \in E \mid \omega \models K_i\}) = k_{\max}\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Notons que k_{max} n'est pas utilisé si la conjonction des formules (avec les contraintes) est cohérente, puisque dans ce cas $\triangle_\mu^{k_{max}}(E)$ est simplement égal à cette conjonction. Il n'est donc pas utile de calculer k_{max} dans ce cas.

Quoique très proche des opérateurs à quota, l'opérateur résultant $\triangle^{k_{\max}}$ n'est pas un vrai opérateur à quota, dans la mesure où la valeur de k_{max} n'est pas donnée *a priori*, mais dépend de E et μ.

Exemple 40. *(suite) On peut utiliser trois variables prises dans cet ordre pour représenter les croyances des consultants : q avoir la qualification, j avoir le poste, m avoir la motivation. Alors le profil $E = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ représente les croyances des agents, avec $[K_1] = \{100, 001, 101\}$, $[K_2] = \{001, 101\}$, $[K_3] = \{100, 000\}$, $[K_4] = \{111\}$, et la contrainte d'intégrité μ est donnée par $[\mu] = \mathcal{W} \setminus \{010, 011\}$. Alors on a $[\triangle_\mu^{k_{\max}}(E)] = \{001, 100, 101\}$.*

A première vue, $\triangle^{k_{\max}}$ semble similaire à l'opérateur à sélection de formules Δ^{C4} qui sélectionne des sous-bases de cardinalité maximale dans l'union des bases du profil [Kon00, BKM91, BKMS92]. Cependant, $\triangle^{k_{\max}}$ et Δ^{C4} sont distincts ; en effet, alors que les deux opérateurs satisfont **(Disj)**, $\triangle^{k_{\max}}$ satisfait **(IC3)** et **(Maj)** (voir proposition 61) alors que Δ^{C4} ne satisfait ni l'un ni l'autre [Kon00]. En revanche, $\triangle^{k_{\max}}$ appartient à deux familles importantes d'opérateurs de fusion à sélection de modèles, la famille $\triangle^{\Sigma}$ et la famille $\triangle^{GMax}$ lorsque la distance drastique d_D est utilisée :

Proposition 60. *Soient E un profil et μ une contrainte d'intégrité.* $\triangle_\mu^{k_{\max}}(E) \equiv \triangle_\mu^{d_D,\Sigma}(E) \equiv \triangle_\mu^{d_D,G_{Max}}(E)$

Preuve:
Par définition, les modèles de $\triangle_\mu^{d_D,\Sigma}(E)$ sont exactement les modèles ω de μ qui minimisent $d_D(\omega, E) = \sum_{K \in E} d_D(\omega, K)$. Comme d_D est drastique, le nombre de bases de E satisfaites par ω est exactement $\#(E) - d_D(\omega, E)$, donc la valeur minimale de $d_D(\omega, E)$ quand ω varie parmi les modèles de μ est égale à $\#(E) - k_{max}$, et cela montre que $\triangle_\mu^{k_{max}}(E) \equiv \triangle_\mu^{d_D,\Sigma}(E)$. Finalement, le fait que $\triangle_\mu^{d_D,\Sigma} = \triangle_\mu^{d_D,G_{Max}}$ (proposition 4 de [KP02a]) conclut la preuve.

□

Ainsi, $\triangle^{k_{\max}}$ vérifie beaucoup des propriétés logiques attendues :

Proposition 61. $\triangle^{k_{\max}}$ *satisfait* **(IC0 - IC8)**, **(Maj)**, **(Disj)** *et* **(Card)**.

Preuve:
Comme $\triangle_{\mu}^{k_{max}}$ coïncide avec l'opérateur de fusion contrainte $\triangle_{\mu}^{d_D,\Sigma}$ (proposition 60), le fait qu'il satisfait **(IC0) - (IC8)** et **(Maj)** est une conséquence directe de la proposition 2 de [KP02b]. De plus, on sait qu'il satisfait également **(Disj)** et **(Card)** grâce à la proposition 53 et au fait que $\triangle_{\mu}^{k_{max}}$ peut être associé à un opérateur de fusion à quota équivalent. Un tel opérateur de fusion à quota est celui tel que $k = k_{max}$: bien que le calcul préalable de k_{max} soit nécessaire pour obtenir un opérateur à quota, le seul impact du fait que k_{max} ne soit pas initialement donné concerne la complexité algorithmique (mais pas l'aspect logique).

□

Assez clairement, l'opérateur $\triangle^{k_{\max}}$ est obtenu en considérant le problème d'optimisation du quota (pour les opérateurs à quota, k est donné, ainsi il n'a pas besoin d'être calculé). De façon assez peu surprenante, le problème d'inférence correspondant est algorithmiquement plus dur que le problème d'inférence pour les opérateurs à quota (sous les hypothèses standard de la théorie de la complexité) :

Proposition 62. FUSION$(\triangle^{k_{\max}})$ *est Θ_2^p-complet.*

Preuve:
Le résultat découle directement du fait que $\triangle_{\mu}^{k_{max}}$ coïncide avec $\triangle_{\mu}^{d_D,\Sigma}$ (proposition 60), qui peut être considéré comme l'opérateur de fusion DA^2 $\triangle_{\mu}^{d_D,max,\Sigma}$, lorsque chaque base se réduit à une formule singleton (voir [KLM04]). La proposition 2 de [KLM04] complète la preuve.

□

Assez clairement, si k_{max} est calculé pendant une étape de prétraitement et devient une partie de l'entrée ensuite, la complexité diminue à coNP.

Quant à la manipulabilité, l'opérateur $\triangle^{k_{\max}}$ présente toutes les bonnes propriétés des opérateurs à quota :

Proposition 63. $\triangle^{k_{\max}}$ *n'est manipulable pour aucun des trois indices i_p, i_{d_w} et i_{d_s}.*

Preuve:
Le résultat vient directement du fait que $\triangle_{\mu}^{k_{max}}$ coïncide avec $\triangle_{\mu}^{d_D,\Sigma}$ (proposition 60), et de la proposition 26 donné en partie II.

□

Chapitre 6

Opérateurs *Gmin*

Chaque opérateur de la famille $\triangle^{Gmin}$ est paramétré par une pseudo-distance d entre interprétations, qui permet de définir la « distance » entre une interprétation et chaque base du profil. Ensuite, la fonction d'agrégation choisie pour déduire de ces distances la « distance » entre une interprétation et le profil est basée sur l'ordre lexicographique sur les listes obtenues en ordonnant les distances d'une interprétation à chaque base dans l'ordre croissant. Les opérateurs $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}$ sont donc basés sur l'ordre lexicographique, comme les opérateurs $GMax$, la différence entre ces deux familles d'opérateurs vient du classement des distances à chaque base, en l'ordre décroissant pour $GMax$ et en l'ordre croissant pour $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}$.

6.1 Définition

Formellement, on a la définition suivante :

Définition 45 (opérateurs *Gmin*)**.** Soient d une pseudo-distance, μ une contrainte d'intégrité, $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un profil et soit ω une interprétation. La proximité d'une interprétation ω à E, notée $d_{d,Gmin}(\omega, E)$, est définie comme la liste des nombres $(d_1, \ldots, d_n)$ représentant les distances au multi-ensemble $\{d(\omega, K_i) \mid K_i \in E\}$ ordonnées en ordre croissant. Les modèles de $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}(E)$ sont les modèles ω de μ tels que $d_{d,Gmin}(\omega, E)$ est minimal par rapport à l'ordre lexicographique $\leq_{lex}$ induit par l'ordre naturel, i.e.

$$\omega \leq_E^{d,Gmin} \omega' \text{ ssi } d_{d,Gmin}(\omega, E) \leq_{lex} d_{d,Gmin}(\omega', E)$$

et

$$[\triangle_{\mu}^{d,Gmin}(E)] = \min([\mu], \leq_E^{d,Gmin}).$$

Exemple 41. *(suite) On peut utiliser trois variables prises dans cet ordre pour représenter les croyances des consultants : q avoir la qualification, j avoir le poste, m avoir la motivation. Alors le profil $E = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ représente les croyances des agents, avec $[K_1] = \{100, 001, 101\}$, $[K_2] = \{001, 101\}$, $[K_3] = \{100, 000\}$, $[K_4] = \{111\}$, et la contrainte d'intégrité μ donnée par $[\mu] = \mathcal{W} \setminus \{010, 011\}$. Alors on a : $[\triangle_{\mu}^{d_D,Gmin}(E)] = \{001, 100, 101\}$ et $[\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}(E)] = \{101\}$. Les calculs sont reportés dans le tableau 6.1. Chaque ligne correspond à un modèle ω de la contrainte μ. Chaque colonne K_i donne la distance $d_H(\omega, K_i)$ entre le modèle ω de μ et la base K_i. Les lignes en gras correspondent aux modèles de μ qui minimisent $d_{d_H,Gmin}(., E)$.*

6.2 Capacité d'inférence

Les opérateurs $\triangle^{Gmin}$ raffinent l'opérateur $\Delta^{k_{\max}}$ comme indiqué par la propriété suivante :

ω	K_1	K_2	K_3	K_4	$d_{d_H,Gmin}(\omega, E)$
000	1	1	0	3	$(0,1,1,3)$
001	0	0	1	2	$(0,0,1,2)$
100	0	1	0	2	$(0,0,1,2)$
101	**0**	**0**	**1**	**1**	$(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1})$
110	1	2	1	1	$(1,1,1,2)$
111	1	1	2	0	$(0,1,1,2)$

TAB. 6.1 – Opérateur $\triangle^{d_H,Gmin}$.

Proposition 64. *Pour toute pseudo-distance d, toute contrainte d'intégrité μ et tout profil E, $\triangle_\mu^{d,Gmin}(E) \models \Delta_\mu^{k_{\max}}(E)$.*

Preuve:
Montrons que si ω et ω' sont deux modèles de μ tels que ω satisfait k_{max} bases de E et ω' satisfait k' bases de E, avec $k' < k_{max}$, alors $d_{d,Gmin}(\omega, E)$ est strictement plus petit que $d_{d,Gmin}(\omega', E)$ par rapport à l'ordre lexicographique $\leq_{lex}$. Cela vient facilement du fait que :

– quand ω satisfait k_{max} bases de E et d est une pseudo-distance, les k_{max} premières coordonnées de $d_{d,Gmin}(\omega, E)$ sont égales à 0 (grâce à la propriété de la pseudo-distance)
– quand ω' satisfait strictement moins de bases de E et d est une pseudo-distance, la k_{max}-ième coordonnée de $d_{d,Gmin}(\omega', E)$ n'est pas égale à 0.

$\square$

Comme les opérateurs $\Delta^{k_{\max}}$ raffinent eux-mêmes les opérateurs à quota (proposition 59), les opérateurs $\triangle^{Gmin}$ raffinent également chaque opérateur de fusion à quota.

Le choix de la distance drastique pour définir un opérateur $\triangle^{Gmin}$ conduit exactement à $\Delta^{k_{\max}}$:

Proposition 65. $\triangle^{d_D,Gmin} = \Delta^{k_{\max}}$.

Preuve:
Grâce à la proposition 64, on sait que $\triangle_\mu^{d_D,Gmin} \models \triangle_{IC}^{k_{max}}$. Il reste encore à montrer que $\triangle_\mu^{k_{max}}(E) \models \triangle_\mu^{d_D,Gmin}(E)$. On considère un modèle ω de $\triangle_\mu^{k_{max}}(E)$, où $E = \{K_1, K_2, ..., K_n\}$.

On suppose d'abord que $(\bigvee E) \wedge \mu$ est cohérent. Donc ω satisfait μ et un nombre maximal k de bases K_i (i.e. il n'existe aucune interprétation ω' qui satisfait plus de k bases), et k est strictement plus grand que 0. Alors, les k premières coordonnées de la liste $d_{d_D,Gmin}(\omega, \{K_1, K_2, ..., K_n\})$ sont 0, et les $n-k$ suivantes sont 1. Comme cette liste est nécessairement minimale pour l'ordre lexicographique parmi les listes des distances des modèles de μ à E (pour tout les autres ω', $d_{d_D,Gmin}(\omega', \{K_1, K_2, ..., K_n\})$ est une liste d'au plus k 0, suivis par des 1), ω est un modèle de $\triangle_\mu^{d_D,Gmin}(E)$. En conséquence, $\triangle_\mu^{k_{max}}(E) \models \triangle_\mu^{d_D,Gmin}(E)$.

A présent, supposons que $(\bigvee E) \wedge \mu$ est incohérent, alors on a $\triangle_\mu^{k_{max}}(E) \equiv \mu$, donc pour tout modèle ω de μ et toute base K_i de E, on a $d_D(\omega, K_i) = 1$. Donc pour tout modèle ω de μ, $d_{d_D,Gmin}(\omega, E)$ vaut $(1, 1, \ldots, 1)$, et $\triangle_\mu^{d_D,Gmin}(E) \equiv \mu \equiv \triangle_\mu^{k_{max}}(E)$.

$\square$

6.3 Propriétés logiques

Les opérateurs *Gmin* présentent de très bonnes propriétés logiques, puisque ce sont des opérateurs de fusion contrainte majoritaires :

Proposition 66. *Soit d une pseudo-distance. $\triangle^{d,Gmin}$ satisfait* **(IC0 - IC8)** *et* **(Disj)**. *Il ne satisfait pas* **(Card)**, **(Maj)** *et* **(Wmaj)** *en général.*

Preuve:
On montre d'abord que $\triangle^{d,Gmin}$ satisfait **(IC0 - IC8)** en prouvant que la fonction qui associe à chaque profil E le pré-ordre $\leq_E^{d,Gmin}$ est un assignement syncrétique, et on conclut grâce au théorème de représentation de [KP02a] (voir partie I). On donne d'abord une définition et deux lemmes utiles.

Définition 46 ($\odot$). Soient v_1 et v_2 deux listes d'entiers. On note $v_1 \odot v_2$ la liste d'entiers obtenus en ordonnant par ordre croissant la concaténation de v_1 et v_2.

Lemme 67. *Soient v_1, v'_1, v_2, v'_2 quatre listes d'entiers ordonnées par ordre croissant. Si $v_1 \leq_{lex} v'_1$ et $v_2 \leq_{lex} v'_2$, alors $v_1 \odot v_2 \leq_{lex} v'_1 \odot v'_2$.*

Preuve:
Supposons que $v_1 \leq_{lex} v'_1$ et $v_2 \leq_{lex} v'_2$, il est simple de montrer que : $v_1 \odot v_2 \leq_{lex} v'_1 \odot v_2$ et $v'_1 \odot v_2 \leq_{lex} v'_1 \odot v'_2$. Ensuite, par transitivité de $\leq_{lex}$, on obtient $v_1 \odot v_2 \leq_{lex} v'_1 \odot v'_2$.

□

Lemme 68. *Soient v_1, v'_1, v_2, v'_2 quatre listes d'entiers ordonnées en ordre croissant. Si $v_1 \leq_{lex} v'_1$ et $v_2 <_{lex} v'_2$, alors $v_1 \odot v_2 <_{lex} v'_1 \odot v'_2$ (où $<_{lex}$ désigne l'ordre strict associé à $\leq_{lex}$).*

Preuve:
Sous les hypothèses du lemme, il est simple de montrer que : $v_1 \odot v_2 \leq_{lex} v'_1 \odot v_2$ et $v'_1 \odot v_2 <_{lex} v'_1 \odot v'_2$. Alors par transitivité de $\leq_{lex}$, on obtient $v_1 \odot v_2 <_{lex} v'_1 \odot v'_2$.

□

Vérifions à présent les conditions des assignements syncrétiques :

1. Si $\omega \models E$ et $\omega' \models E$, alors $\forall K_i \in E$, $\omega \models E$ et $\omega' \models E$, donc $d_{d,Gmin}(\omega, E) = (0, 0, ..., 0)$ et $d_{d,Gmin}(\omega', E) = (0, 0, ..., 0)$, et $\omega \simeq_E^{d,Gmin} \omega'$.
2. Si $\omega \models E$ et $\omega' \not\models E$, alors $d_{d,Gmin}(\omega, E) = (0, 0, ..., 0)$ et $d_{d,Gmin}(\omega', E) \neq (0, 0, ..., 0)$, donc $\omega <_E^{d,Gmin} \omega'$.
3. Si $E_1 \equiv E_2$, alors $\leq_{E_1}^{d,Gmin} = \leq_{E_2}^{d,Gmin}$.
4. On veut montrer que $\forall \omega \models K \exists \omega' \models K' \omega' \leq_{\{K,K'\}}^{d,Gmin} \omega$. On a $d(\omega, K) = 0$ et $d(\omega, K') = \min_{\omega'' \models K'} d(\omega, \omega'')$. Soit $\omega' \models K'$ tel que $d(\omega, \omega') = d(\omega, K')$. Alors $d(\omega', K) = \min_{\omega'' \models K} d(\omega', \omega'')$ donc $d(\omega', K) \leq d(\omega', \omega)$ et $d(\omega', K') = 0$.
   Donc $d_{d,Gmin}(\omega', \{K, K'\}) \leq_{lex} d_{d,Gmin}(\omega, \{K, K'\})$. Alors par définition $\omega' \leq_{\{K,K'\}}^{d,Gmin} \omega$.
5. On veut montrer que si $d_{d,Gmin}(\omega, E_1) \leq_{lex} d_{d,Gmin}(\omega', E_1)$ et $d_{d,Gmin}(\omega, E_2) \leq_{lex} d_{d,Gmin}(\omega', E_2)$, alors $d_{d,Gmin}(\omega, \{E_1, E_2\}) \leq_{lex} d_{d,Gmin}(\omega', \{E_1, E_2\})$. C'est une conséquence directe du lemme 67.
6. On veut montrer que si $d_{d,Gmin}(\omega, E_1) <_{lex} d_{d,Gmin}(\omega', E_1)$ et $d_{d,Gmin}(\omega, E_2) \leq_{lex} d_{d,Gmin}(\omega', E_2)$, alors $d_{d,Gmin}(\omega, \{E_1, E_2\}) <_{lex} d_{d,Gmin}(\omega', \{E_1, E_2\})$. C'est une conséquence directe du lemme 68.

Donc la fonction qui associe à chaque profil E le pré-ordre $\leq_E^{d,Gmin}$ est un assignement syncrétique, et grâce au théorème de représentation de [KP02a] (voir partie I), cela prouve que $\triangle^{d,Gmin}$ satisfait **(IC0 - IC8)**.

– **(Disj) :** conséquence de la proposition 64, puisque $\triangle_\mu^{d,Gmin}(E) \models \Delta_\mu^{k_{\max}}(E)$.
– **(Card) :** considérons le contre-exemple suivant : $\mathcal{P} = \{a, b\}$, $E = \{K_1, K_2, K_3\}$ avec $K_1 = \{\neg a\}$, $K_2 = \{a \wedge \neg b\}$ et $K_3 = \{(\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)\}$ ($\mu \equiv \top$). Deux éléments de $\textsc{maxcons}_\mu(E)$ sont $M_1 = \{\neg a, \neg a \wedge b\}$ et $M_2 = \{a \wedge \neg b, a \wedge \neg b\}$. Clairement, $\#(M_1) = \#(M_2)$. Cependant $\triangle_\mu^{d_H,Gmin}(E) \equiv a \wedge \neg b$, qui est cohérent avec M_2 mais pas avec M_1.
– **(Wmaj) et (Maj) :** Soient $E_1 = \{a \wedge b\}$, $E_2 = \{\neg a \wedge \neg b\}$ et $\mu \equiv \{\, b\}$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $\triangle_\mu^{d,Gmin}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{n})$ a un unique modèle $a \wedge b$ (car c'est la seule interprétation dont la distance au profil commence par 0, elle est donc minimale), et donc n'est pas cohérent avec $\triangle_\mu^{d,Gmin}(E_2)$ qui a comme seul modèle $\neg a \wedge b$. Cet exemple montre que **(Wmaj)** (et donc **(Maj)**) ne sont pas vérifiés.

□

La proposition précédente montre que chaque opérateur $\triangle^{d,Gmin}$ se comporte comme un opérateur de fusion à sélection de formules dans le sens où il satisfait **(Disj)**. Cependant, tandis que les opérateurs de fusion à sélection de formules échouent typiquement à satisfaire les propriétés logiques importantes [Kon00], les opérateurs $\triangle^{d,Gmin}$ sont des opérateurs de fusion contraintes (ils satisfont **(IC0) - (IC8)**). Ainsi les opérateurs $\triangle^{d,Gmin}$ peuvent être vus comme des alternatives intéressantes aux opérateurs de fusion à sélection de formules [BKM91, BKMS92] opérant sur les sous-ensembles maximaux cohérents, dans la mesure où ils présentent de meilleures propriétés logiques.

6.4 Complexité algorithmique

Etudions à présent la complexité algorithmique des opérateurs de fusion $\triangle^{Gmin}$. La proposition suivante est une conséquence directe d'un résultat de [KLM02] dans laquelle on suppose que la pseudo-distance entre interprétations peut être calculée en temps polynomial. Cette hypothèse n'est pas très forte, puisque les distances usuelles la satisfont toutes, et est souvent faite pour l'étude de la complexité des opérateurs de fusion à sélection de modèles.

Proposition 69. *En supposant que la pseudo-distance d entre tout couple d'interprétations ω_1 et ω_2 peut être calculée en temps polynomial en $\#(\omega_1) + \#(\omega_2)$,* $\textsc{fusion}(\triangle^{d,Gmin})$ *est dans Δ_2^p.*

Preuve:
Immédiate à partir d'une proposition de [KLM04] (voir partie I, proposition 13) et du fait que chaque opérateur $\triangle_\mu^{d,Gmin}$ coïncide avec l'opérateur de fusion DA^2 $\triangle_\mu^{d,max,Gmin}$, lorsque chaque base consiste en un singleton.

□

Pour des choix spécifiques de la pseudo-distance d, des résultats plus précis peuvent être obtenus :

Proposition 70.
– $\textsc{fusion}(\triangle^{d_D,Gmin})$ *est Θ_2^p-complet.*
– $\textsc{fusion}(\triangle^{d_H,Gmin})$ *est Δ_2^p-complet.*

Preuve:

– Immédiate à partir des propositions 62 qui donne la complexité de l'opérateur Δ^{kmax} et 65 qui montre que $\triangle^{d_D,Gmin}$ est équivalent à Δ^{kmax}.
– L'appartenance vient directement de la proposition 69. Pour la difficulté, on considère la réduction polynomiale f suivante de MAX-SAT-ASG$_{odd}$ à FUSION($\triangle^{d_H,Gmin}$). Soit Σ une formule propositionnelle telle que $Var(\Sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $f(\Sigma) =$

$$\langle E = \{K_i = \{x_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{2(i-1)} new_j\} \mid i \in 1, \ldots, n\}, \mu = \Sigma \wedge \bigwedge_{j=1}^{2(n-1)} \neg new_j, \alpha = x_n\rangle$$

où chaque new_j ($j \in 1,\ldots,2n-2$) est une nouvelle variable (n'apparaissant pas dans Σ). Maintenant, pour chaque modèle ω de μ et pour tout $i \in 1,\ldots,n-1$, on a

$$d_H(\omega, K_i) < d_H(\omega, K_{i+1}).$$

Cela montre que les listes $d_{d_H,Gmin}(\omega, E)$ obtenues en ordonnant les ensembles $\{d_H(\omega, K_i) \mid i \in 1, \ldots, n\}$ dans l'ordre croissant sont toujours classées dans le même ordre (indépendamment de ω) : le premier élément est $d_H(\omega, K_1)$, le deuxième est $d_H(\omega, K_2)$, etc. De plus, quel que soit le modèle ω_1 de μ strictement inférieur à un modèle ω_2 de μ par rapport à l'ordre lexicographique $\preccurlyeq$ induit par $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, on a $d_{d_H,Gmin}(\omega_1, E)$ strictement plus grand que $d_{d_H,Gmin}(\omega_2, E)$ (par rapport à $\leq_{lex}$). Comme les modèles de μ sont totalement ordonnés par rapport à $\preccurlyeq$, il y a exactement un modèle de μ minimal par rapport à l'ordre induit par E : c'est le modèle de μ qui est maximal pour $\preccurlyeq$. Par suite, x_n a la valeur vrai dans ce modèle si et seulement si $\triangle_\mu^{d_H,Gmin}(E) \models \alpha$ est vrai. Cela conclut la preuve.

□

Il n'est pas très surprenant de constater que la complexité de l'inférence pour les opérateurs $\triangle^{d,Gmin}$ est plus élevée que la complexité de l'inférence pour les opérateurs à quota (sous les hypothèses habituelles de la théorie de la complexité). Cependant, il est important de noter que la complexité de l'inférence pour les opérateurs $\triangle^{Gmin}$ reste au premier niveau de la hiérarchie polynomiale sous des conditions raisonnables sur la pseudo-distance et est moins élevée que celle des opérateurs à sélection de formules.

6.5 Manipulabilité

Etudions à présent la question de la manipulabilité des opérateurs $\triangle^{Gmin}$. Dans le cas général, la non-manipulabilité des opérateurs de fusion à quota est perdue. Nous avons déjà évoqué que même si un opérateur est manipulable dans le cas général, on peut trouver certaines restrictions où la manipulation est impossible. Tout d'abord, on peut voir que les propositions 26 et 43 de la partie II qui établissent respectivement la non-manipulabilité pour i_p d'un opérateur à sélection de modèles Δ^{f,d_D} lorsque la distance drastique est utilisée et la non-manipulabilité par dilatation d'un opérateur à sélection de modèles pour i_p restent vraies pour les opérateurs $\triangle^{Gmin}$. Les autres résultats généraux de non-manipulabilité (propositions 27 et 29) ne peuvent s'appliquer directement aux opérateurs $\triangle^{Gmin}$, puisqu'ils sont spécifiques à la fonction d'agrégation somme. C'est d'ailleurs également le cas de la proposition 44, qui établit que si un opérateur $\Delta^{d,\Sigma}$ est manipulable pour un des deux indices drastiques, il est manipulable par érosion. Pourtant, même si ces trois propositions générales ne s'appliquent pas directement aux opérateurs $\triangle^{Gmin}$, nous allons voir qu'elles sont néanmoins vérifiées par ces opérateurs. Tout d'abord, une proposition proche de la proposition 44 (quoique plus forte puisque le résultat tient pour l'indice probabiliste) existe pour les opérateurs $\triangle^{Gmin}$:

Proposition 71. *Soit d une pseudo-distance quelconque. Si un opérateur de fusion $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}$ est manipulable pour i_p, alors il est manipulable par érosion (i.e. lorsque la base fournie implique la base réelle).*

Preuve:
Raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe un profil $E = \{K_2, ..., K_n\}$, une contrainte d'intégrité μ et deux bases K et K' avec $K' \not\models K$, tels que

$$i_p(K, \triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K\} \sqcup E)) < i_p(K, \triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)).$$

On a donc, de façon équivalente :

$$\frac{\#([K \wedge \triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K\} \sqcup E)])}{\#([\triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K\} \sqcup E)])} < \frac{\#([K \wedge \triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)])}{\#([\triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)])}.$$

On définit K'' par $[K''] = [K \wedge K' \wedge \triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)]$. Nous allons montrer dans la suite de la preuve qu'une manipulation est possible en fournissant K'' à la place de K, (ce qui est une manipulation par érosion car $K'' \models K$).

1. D'abord, on montre par *raisonnement par l'absurde* que $K \wedge \triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E) \models K'$. Supposons que $\exists \omega \not\models K'$ tel que $\omega \models K \wedge \triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)$. Comme ω est un modèle de $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)$, ω satisfait μ et un nombre maximal de bases de $\{K'\} \sqcup E$, disons k bases. Comme $\omega \not\models K'$, ω satisfait k bases de E. Donc ω satisfait $k+1$ bases de $\{K\} \sqcup E$. Supposons que $\exists \omega' \not\models K$ tel que $\omega' \models \triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K\} \sqcup E)$. Alors ω' satisfait μ et satisfait au moins $k+1$ bases de $\{K\} \sqcup E$. Comme $\omega' \not\models K$, ω satisfait au moins $k+1$ bases de E, donc au moins $k+1$ bases de $\{K'\} \sqcup E$. Cela contredit le fait que ω est un modèle de $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)$ en satisfaisant un nombre maximal k de bases de $\{K'\} \sqcup E$. Donc tout modèle de $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K\} \sqcup E)$ est un modèle de K, et $i_p(K, \triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K\} \sqcup E)) = 1$ est maximal, ce qui contredit l'hypothèse.
2. Ensuite, on a $[K''] \neq \emptyset$, sinon il n'y aurait aucun modèle de K dans $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)$, ce qui contredirait la manipulabilité de E pour K'.
3. On considère à présent un modèle ω_1 de $K \wedge K' \wedge \triangle_{\mu}^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)$. Notons d au lieu de $d_{d,Gmin}$ pour simplifier l'écriture. On a $\omega_1 \models \mu$ et $d(\omega_1, \{K'', K_2, ..., K_n\}) = d(\omega_1, \{K', K_2, ..., K_n\})$, puisque $d(\omega_1, K'') = d(\omega_1, K') = 0$. De plus :

   $$d(\omega_1, \{K', K_2, ..., K_n\}) = \min(\{d(\omega, \{K', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}).$$

   Donc :

   $$d(\omega_1, \{K'', K_2, ..., K_n\}) = \min(\{d(\omega, \{K', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}). \tag{6.1}$$

   et

   $$\min(\{d(\omega, \{K'', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}) \leq \min(\{d(\omega, \{K', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex})$$

   D'autre part, comme $K'' \models K'$, on a :

   $$\forall \omega \in \mathcal{W}, d(\omega, K') \leq d(\omega, K'').$$

   Donc $\forall \omega \in \mathcal{W}, d(\omega, \{K', K_2, ..., K_n\}) \leq_{lex} d(\omega, \{K'', K_2, ..., K_n\})$, et

   $$\min(\{\omega, \{K', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}) \leq \min(\{\omega, \{K'', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}).$$

Avec (6.1), on obtient :

$$\min(\{d(\omega, \{K', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}) = \\ \min(\{d(\omega, \{K'', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}). \quad (6.2)$$

4. Considérons maintenant un modèle ω_1 de $K \wedge \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)$. On a $\omega_1 \models \mu$ et $\omega_1 \models K'$ grâce au point 1 de la preuve. Alors $\omega_1 \models K''$ et comme $d(\omega_1, K') = d(\omega_1, K'') = 0$, on a $d(\omega_1, \{K'', K_2, ..., K_n\}) = d(\omega_1, \{K', K_2, ..., K_n\})$. De plus, comme :

$$d(\omega_1, \{K', K_2, ..., K_n\}) = \min(\{d(\omega, \{K', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}),$$

(6.2) donne que :

$$d(\omega_1, \{K'', K_2, ..., K_n\}) = \min(\{d(\omega, \{K'', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}).$$

Donc ω_1 est un modèle de $\triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K''\} \sqcup E)$ et on a :

$$\#([K \wedge \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)]) \leq \#([K \wedge \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K''\} \sqcup E)]).$$

5. Finalement, si l'on considère $\omega_1 \models \neg K \wedge \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K''\} \sqcup E)$, alors $\omega_1 \models \mu$ et :

$$d(\omega_1, \{K'', K_2, ..., K_n\}) = \min(\{d(\omega, \{K'', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}).$$

Comme $K'' \models K'$, on a $d(\omega_1, K') \leq d(\omega_1, K'')$. On obtient :

$$d(\omega_1, \{K', K_2, ..., K_n\}) \leq_{lex} d(\omega_1, \{K'', K_2, ..., K_n\}).$$

Ainsi :

$$d(\omega_1, \{K', K_2, ..., K_n\}) \leq_{lex} \min(\{d(\omega, \{K'', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}).$$

A partir de (6.2), on trouve :

$$d(\omega_1, \{K', K_2, ..., K_n\}) \leq_{lex} \min(\{d(\omega, \{K', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex}).$$

On peut en déduire que :

$$d(\omega_1, \{K', K_2, ..., K_n\}) = \min(\{d(\omega, \{K', K_2, ..., K_n\}) \mid \omega \models \mu\}, \leq_{lex})$$

et ω_1 est un modèle de $\triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)$ et :

$$\#([\neg K \wedge \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K''\} \sqcup E)]) \leq \#([\neg K \wedge \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)]).$$

Donc,

$$\frac{\#([K \wedge \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)])}{\#([\triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)])} \leq \frac{\#([K \wedge \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K''\} \sqcup E)])}{\#([\triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K''\} \sqcup E)])}.$$

Et,

$$i_p(K, \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K'\} \sqcup E)) \leq i_p(K, \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K''\} \sqcup E)).$$

Finalement,

$$i_p(K, \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K\} \sqcup E)) < i_p(K, \triangle_\mu^{d,Gmin}(\{K''\} \sqcup E)),$$

ce qui conclut la preuve.

□

Une conséquence de cette proposition 71 est que la proposition 29, valable pour les opérateurs à sélection de modèles et la fonction d'agrégation Σ, peut s'étendre aux opérateurs $\triangle^{Gmin}$:

Proposition 72. *$\triangle^{d,Gmin}$ n'est pas manipulable pour i_p, i_{d_w} ou i_{d_s} si la base initiale est complète.*

Preuve:

On utilise la proposition 71, qui établit que si un opérateur de fusion $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}$ est manipulable pour i_p, alors il est manipulable par érosion. Clairement, une telle manipulation n'est pas possible si la base initiale est complète, donc on peut conclure que $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}$ n'est pas manipulable pour i_p, et donc pour les indices i_{d_w} et i_{d_s} (grâce à la proposition 25 et puisque $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}$ satisait **(IC1)**).

□

Enfin, la dernière proposition générale de non-manipulabilité existant pour la fonction d'agrégation Σ et concernant la fusion de deux bases (proposition 27) reste également vraie pour les opérateurs $\triangle^{Gmin}$:

Proposition 73.
$\triangle^{d,Gmin}$ n'est pas manipulable pour l'indice i_{d_w} (resp. i_{d_s}) si $\#(E) = 2$ et $\mu \equiv \top$.

Preuve:
On se place dans la situation où $\#(E) = 2$ et $\mu \equiv \top$. Le résultat avec ces hypothèses est une conséquence directe du lemme suivant :

Lemme 74. *$\triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1$ est cohérent.*

Preuve:
Raisonnement par l'absurde. Supposons que pour deux bases K_1 et K_2, $\triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1, K_2\})$ est incohérent avec K_1. On a :

$$\exists \omega' \models \neg K_1, \forall \omega \models K_1, d(\omega, \{K_1, K_2\}) >_{lex} d(\omega', \{K_1, K_2\}).$$

Comme $\forall \omega \models K_1, d(\omega, K_1) = 0$, on obtient :

$$\exists \omega' \models \neg K_1, \forall \omega \models K_1, (0, d(\omega, K_2)) >_{lex} d_{d,Gmin}(\omega', \{K_1, K_2\}). \tag{6.3}$$

Comme $\omega' \models \neg K_1$, $d(\omega', K_1) \neq 0$, donc pour que l'inéquation (6.3) soit vraie il faut que $d(\omega', K_2) = 0$. Donc

$$\exists \omega' \models \neg K_1, \forall \omega \models K_1, (0, d(\omega, K_2)) >_{lex} (0, d(\omega', K_1)).$$

En particulier, si l'on considère $\omega_1 \models K_1$ tel que $d(\omega', K_1) = d(\omega', \omega_1)$, on a :

$$(0, d(\omega_1, K_2)) >_{lex} (0, d(\omega', \omega_1)).$$

Cela nécessite que $d(\omega_1, K_2) > d(\omega', \omega_1)$ avec $\omega' \models K_2$, mais c'est impossible par définition. Contradiction.

□

Nous pouvons à présent prouver la proposition principale :

i_{d_w} : on a $i_{d_w}(K_1, \triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1, K_2\})) = 1$, puisque $\triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1, K_2\}) \wedge K_1$ est cohérent (lemme 74), donc aucune manipulation n'est possible (i_{d_w} est maximal).

i_{d_s} : *raisonnement par l'absurde*. Si $\triangle_{\top}^{d,Gmin}$ est manipulable, on peut trouver K_1' tel que

$$i_{d_s}(K_1, \triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1, K_2\})) < i_{d_s}(K_1, \triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1', K_2\})).$$

Pour l'indice drastique fort, cela signifie exactement que :

$$i_{d_s}(K_1, \triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1, K_2\})) = 0$$

et

$$i_{d_s}(K_1, \triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1', K_2\})) = 1.$$

Donc on a :

$$\triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1, K_2\}) \not\models K_1 \tag{6.4}$$

$$\triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1', K_2\}) \models K_1. \tag{6.5}$$

Comme $\triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1', K_2\}) \wedge K_2$ est cohérent (lemme 74), on peut trouver $\omega_2 \models K_2$ tel que $\omega_2 \models \triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1', K_2\})$. Avec (6.5), on conclut que $\omega_2 \models K_1$.
Comme on a $\omega_2 \models K_1 \wedge K_2$, on conclut que $d(\omega_2, \{K_1, K_2\}) = (0, 0)$. En conséquence, pour tout modèle ω de $\triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1, K_2\})$, on a $d(\omega, \{K_1, K_2\}) = (0, 0)$. Cela implique que $\triangle_{\top}^{d,Gmin}(\{K_1, K_2\}) \equiv K_1 \wedge K_2$. Ceci contredit (6.4), donc aucune manipulation n'est possible.

□

En précisant les distances utilisées, on obtient des conditions nécessaires et suffisantes de non-manipulabilité des opérateurs $\triangle^{Gmin}$:

Proposition 75.
- $\triangle^{d_D,Gmin}$ *est non manipulable pour chacun des trois indices* i_{d_w}, i_p *et* i_{d_s}.
- $\triangle^{d_H,Gmin}$ *est non manipulable pour* i_p *si et seulement si toutes les bases du profil* E *sont complètes.*
- $\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}$ *est non manipulable pour* i_{d_w} *(resp.* i_{d_s}*) si et seulement si toutes les bases du profil* E *sont complètes ou si* $\#(E) = 2$ *et* $\mu \equiv \top$.

Preuve:

- $\triangle^{d_D,Gmin}$ est non manipulable chacun des trois indices i_{d_w}, i_p et i_{d_s}.
  C'est une conséquence directe de la proposition 26 qui établit la non-manipulabilité des opérateurs à sélection de modèles Δ^{f,d_D} pour la distance drastique, ou encore de la proposition 65 qui établit que $\triangle^{d_D,Gmin} = \Delta^{k_{\max}}$ et de la proposition 63, qui montre que $\Delta^{k_{\max}}$ est non manipulable pour les trois indices.
- $\triangle^{d_H,Gmin}$ est non manipulable pour i_p si et seulement si toutes les bases du profil E sont complètes.
  - Si toutes les bases du profil E sont complètes, grâce à la proposition 72, on sait que $\triangle^{d_H,Gmin}$ n'est pas manipulable pour i_p.
  - Pour la réciproque, l'exemple suivant montre que $\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}$ est manipulable pour i_p, même si $\mu \equiv \top$ et deux bases sont fusionnées. Considérons K_1 et K_2 données par
    $[K_1] = \{0000, 0111, 1011, 1101, 1110\}$, $[K_2] = \{1000, 0100, 0010, 0001\}$ et $\mu = \top$. Alors
    $[\triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K_1, K_2\})] = \{0000, 0001, 0010, 0100, 1000\}$, et
    $i_p(K_1, \triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K_1, K_2\})) = \frac{1}{5}$.
    Si l'agent 1 donne K_1' avec $[K_1'] = \{0111, 1011, 1101, 1110\}$ à la place de K_1, alors
    $[\triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K_1', K_2\})] = \{0001, 0010, 0100, 0111, 1000, 1011, 1101, 1110\}$ et
    $i_p(K_1, \triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K_1', K_2\})) = \frac{1}{2}$, ce qui prouve la manipulabilité. (voir tableau 6.2).
- $\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}$ est non manipulable pour i_{d_w} (resp. i_{d_s}) si et seulement si toutes les bases du profil E sont complètes ou si $\#(E) = 2$ et $\mu \equiv \top$.
  - Si toutes les bases du profil E sont complètes ou si $\#(E) = 2$ et $\mu \equiv \top$, la proposition 72 montre que $\triangle^{d_H,Gmin}$ n'est manipulable pour aucun des indices drastiques i_{d_w} et i_{d_s}.

ω	K_1	K'_1	K_2	$d_{d_H,Gmin}(\omega,\{K_1,K_2\})$	$d_{d_H,Gmin}(\omega,\{K'_1,K_2\})$
$\mathbf{0000}$	$\mathbf{0}$	3	$\mathbf{1}$	$(\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(1,3)$
$\mathbf{0001}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{0}$	$(\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{2})$
$\mathbf{0010}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{0}$	$(\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{2})$
0011	1	1	1	$(1,1)$	$(1,1)$
$\mathbf{0100}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{0}$	$(\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{2})$
0101	1	1	1	$(1,1)$	$(1,1)$
0110	1	1	1	$(1,1)$	$(1,1)$
$\mathbf{0111}$	0	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$(0,2)$	$(\mathbf{0},\mathbf{2})$
$\mathbf{1000}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{0}$	$(\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{2})$
1001	1	1	1	$(1,1)$	$(1,1)$
1010	1	1	1	$(1,1)$	$(1,1)$
$\mathbf{1011}$	0	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$(0,2)$	$(\mathbf{0},\mathbf{2})$
1100	1	1	1	$(1,1)$	$(1,1)$
$\mathbf{1101}$	0	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$(0,2)$	$(\mathbf{0},\mathbf{2})$
$\mathbf{1110}$	0	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$(0,2)$	$(\mathbf{0},\mathbf{2})$
1111	1	1	3	$(1,3)$	$(1,3)$

TAB. 6.2 – Manipulation de $\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}$ pour i_p avec deux bases non complètes.

– Pour la réciproque, on étudie les différents cas :

i_{d_w} : pour le cas $\mu \not\equiv \top$ et $\#(E) = 2$, considérons $\mathcal{P} = \{a, b\}$, K_1 et K_2 données par $[K_1] = \{00, 01\}, [K_2] = \{11\}$, et $\mu = a \vee \neg b$. Alors $[\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}(\{K_1, K_2\})] = \{11\}$, et $i_{d_w}(K_1, \triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}(\{K_1, K_2\})) = 0$.
Si l'agent 1 donne $[K'_1] = \{00\}$ à la place de K_1, alors $[\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}(\{K'_1, K_2\})] = \{00, 11\}$ et $i_{d_w}(K_1, \triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}(\{K'_1, K_2\})) = 1$. (voir tableau 6.3).

ω	K_1	K'_1	K_2	$d_{d_H,Gmin}(\omega,\{K_1,K_2\})$	$d_{d_H,Gmin}(\{K'_1,K_2\})$
$\mathbf{00}$	0	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$(0,2)$	$(\mathbf{0},\mathbf{2})$
10	1	1	1	$(1,1)$	$(1,1)$
$\mathbf{11}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{0}$	$(\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{2})$

TAB. 6.3 – Manipulation de $\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}$ pour i_{d_w} avec deux bases et $\mu \not\equiv \top$.

Pour le cas $\mu \equiv \top$ et $\#(E) \neq 2$, considérons l'exemple suivant : soient K_1, K_2 et K_3 données par $[K_1] = \{000, 001\}, [K_2] = \{100, 111\}$,$[K_3] = \{011\}$ et $\mu \equiv \top$. Alors $[\triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{011\}$, et $i_{d_w}(K_1, \triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K_1, K_2, K_3\})) = 0$. Si l'agent 1 donne K'_1 avec $[K'_1] = \{000\}$ à la place de K_1, alors $[\triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K'_1, K_2, K_3\})] = \{000, 011\}$ et $i_{d_w}(K_1, \triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K'_1, K_2, K_3\})) = 1$. (voir tableau 6.4).

i_{d_s} : Pour le cas $\mu \not\equiv \top$ et $\#(E) = 2$, considérons l'exemple suivant : $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$, K_1 et K_2 données par $[K_1] = \{000, 011\}$, $[K_2] = \{001, 111\}$, et $\mu = a \vee b \vee \neg c$. Alors $[\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}(\{K_1, K_2\})] = \{000, 011, 111\}$, et $i_{d_s}(K_1, \triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}(\{K_1, K_2\})) = 0$.
En revanche si l'agent 1 donne $[K'_1] = \{000\}$ à la place de K_1, alors $[\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}(\{K'_1, K_2\})] = \{000\}$ et $i_{d_s}(K_1, \triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}(\{K'_1, K_2\})) = 1$. (voir Tableau 6.5).

ω	K_1	K'_1	K_2	K_3	$d_{d_H,Gmin}(\omega,\{K_1,K_2,K_3\})$	$d_{d_H,Gmin}(\omega,\{K'_1,K_2,K_3\})$
000	0	**0**	**1**	**2**	$(0,1,2)$	$(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2})$
001	0	1	2	1	$(0,1,2)$	$(1,1,2)$
010	1	1	2	1	$(1,1,2)$	$(1,1,2)$
011	**1**	**2**	**1**	**0**	$(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2})$
100	1	1	0	3	$(0,1,3)$	$(0,1,3)$
101	1	2	1	2	$(1,1,2)$	$(1,2,2)$
110	2	2	1	2	$(1,2,2)$	$(1,2,2)$
111	2	3	0	1	$(0,1,2)$	$(0,1,3)$

TAB. 6.4 – Manipulation de $\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}$ pour i_{d_w} avec trois bases.

ω	K_1	K'_1	K_2	$d_{d_H,Gmin}(\omega,\{K_1,K_2\})$	$d_{d_H,Gmin}(\omega,\{K'_1,K_2\})$
000	**0**	**0**	**1**	$(\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{1})$
010	1	1	2	$(1,2)$	$(1,2)$
011	**0**	2	**1**	$(\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(1,2)$
100	1	1	2	$(1,2)$	$(1,2)$
101	2	2	1	$(1,2)$	$(1,2)$
110	2	2	1	$(1,2)$	$(1,2)$
111	**1**	3	**0**	$(\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(0,3)$

TAB. 6.5 – Manipulation de $\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}$ pour i_{d_s} avec deux bases et $\mu \not\equiv \top$.

Pour le cas $\mu \equiv \top$ et $\#(E) \neq 2$, on considère l'exemple suivant : K_1, K_2 et K_3 données par $[K_1] = \{000, 011\}, [K_2] = \{000, 111\}$, $[K_3] = \{001, 111\}$ et $\mu = \top$. Alors $[\triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K_1, K_2, K_3\})] = \{000, 111\}$, et $i_{d_s}(K_1, \triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K_1, K_2, K_3\})) = 0$. Si l'agent 1 donne K'_1 avec $[K'_1] = \{000\}$ à la place de K_1, alors $[\triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K'_1, K_2, K_3\})] = \{000\}$ et $i_{d_s}(K_1, \triangle_{\top}^{d_H,Gmin}(\{K'_1, K_2, K_3\})) = 1$. (voir tableau 6.6).

ω	K_1	K'_1	K_2	K_3	$d_{d_H,Gmin}(\omega,\{K_1,K_2,K_3\})$	$d_{d_H,Gmin}(\omega,\{K'_1,K_2,K_3\})$
000	**0**	**0**	**0**	**1**	$(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})$
001	1	1	1	0	$(0,1,1)$	$(0,1,1)$
010	1	1	1	2	$(1,1,2)$	$(1,1,2)$
011	0	2	1	1	$(0,1,1)$	$(1,1,2)$
100	1	1	1	2	$(1,1,2)$	$(1,1,2)$
101	2	2	1	1	$(1,1,2)$	$(1,1,2)$
110	2	2	1	1	$(1,1,2)$	$(1,1,2)$
111	**1**	3	**0**	**0**	$(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})$	$(0,0,3)$

TAB. 6.6 – Manipulation de $\triangle_{\mu}^{d_H,Gmin}$ pour i_{d_s} avec trois bases.

$\square$

Il est intéressant de constater que même si les opérateurs $\triangle^{Gmin}$ sont manipulables, cette manipulabilité est relativement faible si l'on compare le comportement de ces opérateurs avec d'autres opérateurs à sélection de modèles. En fait, les opérateurs $\triangle^{Gmin}$ se comportent exactement comme les opérateurs $\Delta^{d,\Sigma}$ du point de vue de la manipulabilité et on a vu dans la partie II que les opérateurs $\Delta^{d,\Sigma}$ sont les moins manipulables des opérateurs à sélection de modèles.

6.6 Discussion

On peut remarquer que des fonctions d'agrégation proches de celles utilisées pour définir les opérateurs à quota et les opérateurs *Gmin* sont parfois utilisées pour traiter des structures relationnelles plus complexes que des bipartitions de mondes (qui est la structure de la logique propositionnelle standard). Par exemple, de telles fonctions ont été considérées en logique possibiliste et pour les problèmes de satisfaction de contraintes (voir par exemple [DPY99, DFP96, Far94]). Cependant, à notre connaissance, aucune étude systématique des opérateurs à quota et *Gmin* n'a été conduite pour la fusion dans le cadre propositionnel. De plus, ces opérateurs n'ont jamais été évalués en considérant conjointement les critères évoqués auparavant.

Il semble assez difficile de mettre en perspective les propriétés des opérateurs de fusion les uns par rapport aux autres, parce que les paramètres pouvant intervenir sur ces propriétés sont nombreux (distance utilisée et fonction d'agrégation pour les opérateurs à sélection de modèles, présence ou absence de contrainte d'intégrité, critères de sélection des maximaux cohérents pour les opérateurs de combinaison...). La multiplicité de ces paramètres complique la vision globale que l'on peut avoir du comportement de tel ou tel opérateur. Nous nous sommes cependant efforcés de comparer les opérateurs que nous avons proposés avec les principaux opérateurs de fusion propositionnelle existants. Voici le bilan que nous pouvons dresser.

Propriétés logiques

Concernant les propriétés logiques, les opérateurs $\triangle^{Gmin}$ ont un comportement aussi bon que les opérateurs à sélection de modèles basés sur les fonctions d'agrégation Σ et $GMax$, qui sont des opérateurs de fusion contrainte (ils satisfont tous les postulats définis dans [KP02b]), et ont un meilleur comportement que les opérateurs $\Delta_{\mu}^{d,max}$, qui ne satisfont pas **(IC1)** et **(IC6)**. Ils ont également un meilleur comportement que les opérateurs à sélection de formules qui, au mieux, ne satisfont pas le postulat **(IC6)**, ou **(IC4)** pour $\Delta_{\mu}^{\cap,\Sigma}$. Le postulat **(IC4)** est très important pour un processus de fusion, puisqu'il correspond à un principe d'équité. Le postulat **(IC6)** est l'un des deux postulats non vérifiés par les opérateurs à quota (avec le postulat **(IC1)**), donc concernant le critère de la rationalité, on peut conclure que les opérateurs à quota se comportent comme la plupart des opérateurs à sélection de formules. En revanche, les opérateurs $\triangle^{Gmin}$ se comportent de ce point de vue comme des opérateurs à sélection de modèles, mais ont la particularité supplémentaire de vérifier le postulat **(Disj)**, c'est-à-dire de sélectionner les modèles de la base fusionnée parmi les modèles de la disjonction des bases du profil. Cette propriété **(Disj)** est vérifiée par les opérateurs à sélection de formules, par les opérateurs à quota et par les opérateurs $\triangle^{Gmin}$, mais elle n'est pas vérifiée en général par les opérateurs à sélection de modèles. Le fait de ne pas respecter cette propriété est un des défauts parfois reprochés aux opérateurs de fusion à sélection de modèles. En effet, le fonctionnement de ces opérateurs les conduit à caractériser les modèles de la base fusionnée comme ceux étant les plus « proches » du profil, à l'aide d'une notion de distance entre interprétations. Ce choix est indépendant de l'appartenance du modèle à la disjonction des bases et est fait seulement en se basant sur la distance du modèle aux bases dans certains cas : il peut sembler artificiel de choisir comme modèle représentant les croyances/buts du groupe des interprétations qui ne sont des croyances/buts d'aucun élément du groupe. Les opérateurs $\triangle^{Gmin}$ semblent donc offrir une alternative plus rationnelle aux opérateurs à sélection de formules, pour qui cherche à utiliser un opérateur de fusion vérifiant le postulat **(Disj)**. Une autre alternative serait d'utiliser les opérateurs à sélection de modèles basés sur la distance drastique, puisque ceux-ci vérifient **(Disj)**, et possèdent de bonnes propriétés logiques. Cependant, on peut regretter avec ces opérateurs un comportement peu discriminant (proche de la disjonction en présence d'incohérences), et leur préférer un opérateur $\triangle^{Gmin}$.

Complexité algorithmique

Concernant la complexité algorithmique, l'inférence pour les opérateurs $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}$ est typiquement Θ_2^p-complète pour la distance d_D, et Δ_2^p-complète pour la distance d_H, ce qui correspond à la complexité de l'opérateur $\Delta^{d,GMax}$, mais ce qui est plus élevé que l'opérateur $\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}$ (Θ_2^p-complet) et $\Delta_{\mu}^{d,max}$ ($coBH(3)$-complet pour $d = d_D$ et Θ_2^p-complet pour $d = d_H$). La classe de complexité Δ_2^p est une des classes « usuelles » où se situe la complexité des problèmes de raisonnement non monotones, comme l'inférence préférentielle, la révision, etc... La complexité de $\triangle_{\mu}^{d,Gmin}$ est cependant moins élevée que celle des opérateurs à sélection de formules, puisque le problème de l'inférence pour ces opérateurs est typiquement Π_2^p-complet. Les opérateurs à quota ont, eux, une complexité algorithmique assez faible, puisque le problème de l'inférence est $coBH(3)$-complet pour les opérateurs à quota. Ainsi, on peut conclure que, pour le critère de complexité, l'opérateur $\triangle^{Gmin}$ est comparable à d'autres opérateurs à sélection de modèles, tandis que les opérateurs à quota ont, eux, une complexité algorithmique relativement faible.

Manipulabilité

Concernant enfin le critère de la manipulabilité, au regard des résultats que nous avons obtenu, les opérateurs à quota sont non manipulables, comme d'ailleurs les opérateurs à sélection de modèles basés sur la distance drastique et les opérateurs à sélection de formules « simples » que sont l'opérateur de fusion par intersection totale et l'opérateur de fusion basique. Cette résistance à la manipulation est perdue pour les opérateurs à sélection de modèles utilisant la distance de Hamming (sauf dans des cas très restreints, par exemple lorsque le profil est constitué de deux bases ou que l'on fusionne des croyances/buts très spécifiques, quand les bases sont complètes), y compris pour les opérateurs $\triangle^{Gmin}$, et pour les opérateurs à sélection de formules plus « fins » que sont les opérateurs de combinaison. En fait, concernant le critère de la manipulation, il semble que plus l'opérateur a un comportement drastique sur le profil, moins il est sensible à la manipulation. Cette hypothèse fournit une perspective intéressante à notre travail : étudier plus précisément le lien qui semble exister entre le « comportement » d'un opérateur et sa sensibilité à la manipulation.

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés tout d'abord à la notion de manipulation dans le cadre de la fusion. La question posée était de déterminer si le théorème de Gibbard-Satterthwaite dans le cadre de la théorie du vote a ou non un équivalent dans le cadre de la fusion. Plus précisément, comme ce théorème établit que toute opération d'agrégation de préférences qui satisfait des propriétés « raisonnables » (c'est-à-dire, des propriétés qui semblent souhaitables pour une procédure de vote) est manipulable, la question était de déterminer si tous les opérateurs de fusion propositionnelle sont manipulables également et si oui, sous quelles conditions. La première difficulté rencontrée a été de transcrire la notion de manipulabilité dans le cadre de la fusion propositionnelle. En effet, dans le cadre du théorème de Gibbard-Satterthwaite, les préférences des votants sont représentées par un ordre total strict sur l'ensemble des alternatives : il y a manipulation quand le mensonge d'un votant lui permet de faire élire un candidat préféré pour lui au candidat élu s'il est sincère. En revanche, dans le cadre de la fusion propositionnelle, on ne dispose que d'un pré-ordre à deux strates sur les interprétations pour représenter les préférences d'un agent ; en outre, ce n'est pas nécessairement une interprétation unique qui est choisie. Comment peut-on décider si un ensemble d'interprétations satisfait davantage un agent qu'un autre ensemble d'interprétations ? Pour répondre à cette question, nous avons été conduits à définir une notion d'indice de satisfaction, qui associe un réel à deux ensembles d'interprétations, permettant d'évaluer la satisfaction d'un agent relativement au résultat de la fusion. Nous avons en particulier étudié quatre indices : les indices drastiques faibles et forts, qui ont une signification logique, l'indice probabiliste, qui est plus graduel, et enfin l'indice de Dalal, qui est un peu particulier, puisqu'il permet une manipulation par rapport au pré-ordre entre interprétations lié à la distance de Hamming. On pourrait imaginer des améliorations à ce dernier indice, par exemple définir un nouvel indice qui serait égal à $\frac{1}{2}i_{Dalal} + \frac{1}{2}i_p$: cela permettrait, lorsqu'il n'y a pas cohérence entre la base fusionnée et la base de l'agent, de tenir compte du pré-ordre entre interprétations liées à la distance de Hamming ; et lorsqu'il y a cohérence entre la base fusionnée et la base de l'agent, de tenir compte de la proportion des modèles de l'agent présents dans la base fusionnée. Cet indice constituerait en quelque sorte une généralisation des quatre indices que nous avons proposés. D'autres indices de satisfaction nous paraissent intéressants, en particulier ceux introduits par Duggan et Schwartz [DS00], qui associe au résultat d'une fusion une valeur de l'utilité du résultat du vote grâce à des distributions de probabilité.

À la lumière de notre étude, la manipulabilité d'un opérateur apparaît comme une propriété indépendante du fait que celui-ci satisfasse ou pas les postulats de rationalité donnés dans [KP99, KP02a]. Cela signifie que satisfaire les postulats de rationalité pour la fusion contrainte n'empêche pas l'existence ou l'absence de manipulation. Néanmoins, on peut noter que les opérateurs d'arbitrage, comme $\Delta^{d,GMax}$, sont plus sensibles à la manipulation que les opérateurs de majorité, comme $\Delta^{d,\Sigma}$. Ceci s'explique facilement par le fait que les opérateurs d'arbitrage sont égalitaires : ils visent à donner un résultat qui est proche de chaque base du profil. Intuitivement, le changement d'une base du profil peut fortement changer le résultat entier. En revanche, les opérateurs de majorité cherchent à satisfaire la majorité des agents pour définir la base résultante, ainsi, ils sont plus robustes à la manipulation. Cette constatation peut être généralisée : en effet, l'utilisation d'une distance drastique pour les opérateurs à sélection de modèles empêche toute manipulation. De même, les opérateurs à sélection de formules « simples » que sont l'opérateur par intersection totale et l'opérateur basique ne sont pas manipulables. Cela semble indiquer que plus l'opérateur est « subtil » dans la prise en compte des bases du profil, plus il est soumis à la manipulabilité.

La manipulabilité est une notion qui apparaît également indépendante de la complexité algorithmique de l'inférence par rapport à la base fusionnée (voir [KLM04]) : il n'existe apparemment pas de corrélation entre la complexité de l'inférence et la manipulabilité de l'opérateur. En revanche, une question importante qui reste ouverte est la complexité algorithmique de la recherche pratique d'une manipulation, étant donné un profil, une contrainte et un opérateur. En effet, utiliser un opérateur de fusion manipulable n'est pas nécessairement gênant si déterminer une stratégie est difficile. Un tel problème de complexité a été étudié pour des schémas de vote [CS03, CLS03, CS02a, CS02b] lorsque les préférences individuelles sont données explicitement (ce qui n'est pas le cas dans notre cadre de travail). Un premier résultat vient facilement de notre proposition 44 : si la distance d entre interprétations peut être calculée en temps polynomial dans la taille de l'entrée (ce qui n'est pas une hypothèse forte), déterminer si un profil donné peut être manipulé par une base pour l'indice drastique, étant donnés $\Delta_{\mu}^{d,\Sigma}$ et μ est dans Σ_2^p.

La manipulabilité est donc une dimension supplémentaire, indépendante des critères de rationalité et de complexité et qui peut être utilisée comme un critère additionnel pour comparer entre eux les opérateurs de fusion. On peut regretter que l'équivalent d'un théorème de Gibbard-Satterthwaite n'ait pas été obtenu dans le cadre de la fusion, même si les opérateurs résistants à la manipulabilité sont rares. Cela est sans doute lié à la définition même de la manipulation dans le cadre de la fusion, qui est dépendante des indices considérés. Ce cadre de travail, plus complexe que celui du vote de ce point de vue, a sans doute compromis l'obtention d'un résultat de manipulabilité général. En particulier, en se contentant du seul indice probabiliste, on aurait des résultats de manipulabilité quasi-généraux.

Cette étude appelle à de nombreuses perspectives. Une question intéressante est d'étudier la manipulabilité d'un processus de fusion lorsque des coalitions sont possibles. Au lieu de considérer la manipulation par un seul agent, on peut se poser le problème de la manipulation par des coalitions d'agents qui coordonnent leurs choix pour modifier le résultat pour la coalition. On peut se reporter à [MGC01, CGM06] pour des définitions de la manipulation pour une coalition dans le cadre de la fusion d'OCFs. Comme la manipulation par un agent seul est un cas particulier de manipulation par une coalition, que de nombreux d'opérateurs sont manipulables pour un agent seul, il est clair que la non-manipulabilité par des coalitions sera difficile à obtenir.

Nous avons également considéré deux familles d'opérateurs de fusion disjonctive, les opérateurs à quota et les opérateurs *Gmin*. Nous nous sommes intéressés aux propriétés de ces opérateurs par rapport à trois critères : rationalité, complexité algorithmique et manipulabilité. Nous pensons que ces critères sont les principaux à prendre en compte pour évaluer les opérateurs de fusion propositionnelle (quand on reste à un niveau général, i.e. sans se focaliser sur une application ou un domaine particulier).

Bien qu'il n'existe pas d'opérateurs de fusion optimisant tous les critères, nous avons montré que les opérateurs à quota et les opérateurs *Gmin* constituent des compromis intéressants : même s'ils ne sont pas totalement rationnels et discriminants, les opérateurs à quota présentent une complexité « faible » et ne sont pas manipulables ; les opérateurs *Gmin* sont certes plus complexes que les opérateurs à quota et manipulables dans le cas général, mais ils sont pleinement rationnels au sens de la fusion contrainte et beaucoup moins prudents. Ces opérateurs conduisent tous à des bases fusionnées qui impliquent la disjonction des bases du profil considéré et constituent, de ce fait, des alternatives intéressantes aux opérateurs à sélection de formules [BKM91, BKMS92, Kon00, KLM02], qui sont typiquement au moins aussi difficiles du point de vue de la complexité et satisfont moins de postulats de rationalité. Ce postulat de disjonction nous paraît important, en particulier si l'on fusionne des croyances. Si l'on fusionne par exemple des croyances d'experts, la recherche d'un compromis entre les croyances contradictoires par l'opérateur de fusion n'est pas nécessairement un comportement souhaitable, alors qu'un tel comportement semble naturel si l'on fusionne des buts.

Ce travail appelle lui aussi à quelques perspectives. L'une d'entre elles consiste à déterminer dans quelle mesure les trois critères considérés sont (in)dépendants. Nous savons déjà qu'il n'y a pas une indépendance complète, puisque tous les opérateurs de fusion propositionnels qui satisfont **(IC1)** et **(IC2)** sont BH_2-difficiles (proposition 1 de [KLM04]) ; et donc la dimension logique et la complexité sont liées. Réaliser une analyse précise de l'indépendance de ces critères permettra de réaliser une table multi-dimensionnelle dans laquelle les méthodes de fusion pourront être situées, facilitant ainsi le choix d'une méthode particulière.

Une perspective générale est également d'étudier les liens existants entre l'agrégation de jugement et la fusion. La première remarque que l'on peut faire est que l'agrégation de jugement a un point de vue local sur les propositions : pour chaque proposition, on cherche à savoir si elle est acceptée par suffisamment de membre du groupe pour être acceptée par le groupe. Ensuite seulement, on agrège les croyances du groupe, pour obtenir l'ensemble résultant. La fusion, en revanche, a un point de vue global sur les croyances de chacun des membres du groupe, c'est-à-dire qu'on cherche avant tout à établir un ensemble cohérent de croyances ou de buts à partir des croyances/buts de chacun. Cependant, la perspective d'utiliser une méthode de vote pour déterminer si chaque proposition fait partie du résultat peut paraître intéressante pour faire de la fusion (c'est d'ailleurs le principe des opérateurs à quota), puisque la complexité algorithmique d'une telle méthode est beaucoup plus faible que celle de la fusion. Néanmoins, le paradoxe discursif peut empêcher en pratique d'utiliser de tels méthodes, puisqu'il a pour conséquence d'aboutir à des bases fusionnées incohérentes. Une question intéressante est donc d'adapter au cadre de la fusion les méthodes d'agrégation de jugement, dans l'hypothèse bien sûr où on peut garantir la cohérence du résultat. Les théorèmes d'impossibilité de List et Pettit [LP04] restent-ils vrais dans le cadre de la fusion ? Comment adapter le cadre de la fusion a l'agrégation de jugement ? Les hypothèses requises par ces théorèmes ont-ils encore un sens pour la fusion ? Ces questions ouvertes dans un domaine récent semblent prometteuses. A l'inverse, on peut également voir le problème autrement : puisque l'agrégation de jugement semble difficile à réaliser suite aux théorèmes d'impossibilité, peut-on imaginer des méthodes de fusion plus adaptées au problème de l'agrégation de jugement ? Une question intéressante également est celle des hypothèses couramment faites dans le cadre de l'agrégation de croyances, en particulier celle qui concerne la complétude des croyances des agents. En général, on suppose en effet que tous les agents ont des convictions sur chacune des propositions : soit il l'accepte, soit il la rejette. Or ce pré-requis semble assez peu naturel. En effet, il est clair qu'un individu n'est pas omniscient. Ne pourrait-on pas, comme dans la fusion, autoriser l'ignorance ? Les théorèmes d'impossibilité restent-ils vrais en l'absence de cette hypothèse forte de complétude des croyances ? Ces pistes de recherche nous semblent intéressantes, et nous espérons pouvoir apporter quelques réponses à ces questions dans l'avenir.

Index

Index des principales définitions

Bibliographie

[AGM85] C.E. Alchourròn, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[Arr63] K. J. Arrow. *Social choice and individual values*. Wiley, New York, second edition, 1963.

[ASS02] K.J. Arrow, A. K. Sen, and K. Suzumura, editors. *Handbook of Social Choice and Welfare*, volume 1. North-Holland, 2002.

[BDKP02] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Possibilistic merging and distance-based fusion of propositional information. *International Journal of Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 34(1–3) :217–252, 2002.

[BDS01] S. Barberà, B. Dutta, and A. Sen. Strategy-proof social choice correspondences. *Journal of Economic Theory*, 101(2) :374–394, 2001.

[BE01] I. Bloch and A. Hunter (Eds). Fusion : General Concepts and Characteristics. *International Journal of Intelligent Systems*, 16(10) :1107–1134, oct 2001.

[BK02] S. Benferhat and S. Kaci. Fusion of possibilistic knowledge bases from a postulate point of view. *International Journal of Approximate Reasoning*, 33 :255–285, 2002.

[BK03] S. Benferhat and S. Kaci. Logical representation and fusion of prioritized information based on guaranteed possibility measures : Application to the distance-based merging of classical merging. *Artificial Intelligence*, 148(1–3) :291–333, 2003.

[BKM91] C. Baral, S. Kraus, and J. Minker. Combining multiple knowledge bases. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 3(2) :208–220, 1991.

[BKMS92] C. Baral, S. Kraus, J. Minker, and V. S. Subrahmanian. Combining knowledge bases consisting of first-order theories. *Computational Intelligence*, 8(1) :45–71, 1992.

[BL86] C. Batini and M. Lenzerini. A comparative analysis of methodologies for database schema integration. *ACM Computing Surveys*, 18(4) :323–364, 1986.

[Bor81] J.C. Borda. Mémoire sur les élections au srutin. Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1781.

[BSZ91] S. Barberà, H. Sonnenschein, and L. Zhou. Voting by committees. *Econometrica*, 59(3) :595–609, 1991.

[CGM06] S. Chopra, A. Ghose, and T. Meyer. Social choice theory, belief merging and strategy-proofness. *Information Fusion*, 7(1) :61–79, 2006.

[Cho95] L. Cholvy. Automated reasoning with merged contradictory information whose reliability depends on topics. In *In Proceedings of the European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty (ECSQARU)*, 1995.

[Cho00] L. Cholvy. Applying theory of evidence in multisensor data fusion : a logical interpretation. In *In Proceedings of the Third International Conference on Information Fusion (FUSION'2000)*, 2000.

[CLS03] V. Conitzer, J. Lang, and T. Sandholm. How many candidates are needed to make elections hard to manipulate ? In *Proceedings of the Ninth Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK'03)*, pages 201–214, 2003.

[Con85] Marquis de Condorcet. Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Paris, 1785.

[CS02a] V. Conitzer and T. Sandholm. Complexity of manipulating elections with few candidates. In *Proceedings of the Eighteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'02)*, pages 314–319, 2002.

[CS02b] V. Conitzer and T. Sandholm. Vote elicitation : Complexity and strategy-proofness. In *Proceedings of the Eighteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'02)*, pages 392–397, 2002.

[CS03] V. Conitzer and T. Sandholm. Universal voting protocol tweaks to make manipulation hard. In *Proceedings of the Eighteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'03)*, pages 781–788, 2003.

[CZ02] S. Chin and L. Zhou. Multi-valued strategy-proof social choice rules. *Social Choice and Welfare*, 19(3) :569–580, 2002.

[Dal88] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision : preliminary report. In *Proceedings of the Seventh American National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'88)*, pages 475–479, 1988.

[Dem68] A. Dempster. A generalization of bayesian inference. *Journal of the Royal Statistical Society*, 30 :205–247, 1968.

[DFP96] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Possibility theory in constraint satisfaction problems : Handling priority, preference and uncertainty. *Applied Intelligence*, 6 :287–309, 1996.

[Die06] F. Dietrich. Judgement aggregation : (im)possibility theorems. *Journal of Economic Theory*, 126 :286–298, 2006.

[DLP94] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, chapter Possibilistic logic, pages 439–513. Clarendon Press, Oxford, 1994.

[DP88a] D. Dubois and H. Prade. Representation and combinaison of uncertainty with belief functions and possibility measures. *Computational Intelligence*, 4 :244–264, 1988.

[DP88b] D. Dubois and H. Prade. *Théorie des possibilités*. Masson, 1988.

[DPY99] D. Dubois, H. Prade, and R. Yager. *Fuzzy Sets in Approximate Reasoning and Information Systems*, chapter Merging fuzzy information, pages 335–401. Handbook of Fuzzy Sets Series. Kluwer Academic, 1999.

[DS00] J. Duggan and T. Schwartz. Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs : Gibbard-satterthwaite generalized. *Social Choice and Welfare*, 17 :85–93, 2000.

[EKM04] P. Everaere, S. Konieczny, and P. Marquis. On merging strategy-proofness. In *Proceedings of the Ninth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'04)*, pages 357–368, 2004.

[EKM05] P. Everaere, S. Konieczny, and P. Marquis. Quota and gmin merging operators. In *Proceedings of the Nineteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'05)*, pages 424–429, 2005.

[EKMre] P. Everaere, S. Konieczny, and P. Marquis. The strategy-proofness landscape of merging. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2006, à paraître.

[Far94] H. Fargier. *Problèmes de satisfaction de contraintes flexibles : application à l'ordonnancement de production*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse, 1994.

[Gib73] A. Gibbard. Manipulation of voting schemes. *Econometrica*, 41 :587–602, 1973.

[Gär88] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux*. MIT Press, 1988.

[Kel88] J. S. Kelly. *Social Choice Theory : An Introduction*. Springer-Verlag, 1988.

[Kim95] W. Kim. *Modern database Systems : The Object Model, Interoperability and Beyond*. Addison Wesley, 1995.

[KLM02] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. Distance-based merging : a general framework and some complexity results. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 97–108, 2002.

[KLM04] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. DA^2 merging operators. *Artificial Intelligence*, 157(1-2) :49–79, 2004.

[KLM05] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. Reasoning under inconsistency : the forgotten connective. In *Proceedings of the Nineteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'05)*, pages 484–489, 2005.

[KM93] J. Kohlas and P. A. Monney. Probabilistic assumption-based reasoning. In D. Heckermann and A. Mamdani, editors, *Proceedings of the Ninth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Washington*, pages 485–491. Kaufmann, Morgan Publication, 1993.

[Kon99] S. Konieczny. *Sur la logique du changement : révision et fusion de bases de connaissance*. PhD thesis, Université de Lille 1, 1999.

[Kon00] S. Konieczny. On the difference between merging knowledge bases and combining them. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'00)*, pages 135–144, 2000.

[KP98] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.

[KP99] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In *Proceedings of the Fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'99)*, LNAI 1638, pages 233–244, 1999.

[KP02a] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.

[KP02b] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the frontier between arbitration and majority. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 109–118, 2002.

[KS93] L.A. Kornhauser and L.G. Sager. The one and the many : Adjudication in collegial courts. *California Law Review*, 81 :1–59, 1993.

[LM99] J. Lin and A. O. Mendelzon. Knowledge base merging by majority. In *Dynamic Worlds : From the Frame Problem to Knowledge Management*. Kluwer, 1999.

[LP04] C. List and P. Pettit. Aggregating sets of judgements : Two impossibility results compared. *Synthese*, 140 :207–35, 2004.

[LS98] P. Liberatore and M. Schaerf. Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1) :76–90, 1998.

[Mey01] Thomas Meyer. On the semantics of combination operations. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11(1-2) :59–84, 2001.

[MGC01] T. Meyer, A. Ghose, and S. Chopra. Social choice, merging and elections. In *Proceedings of the Sixth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'01)*, pages 466–477, 2001.

[Mou88] H. Moulin. *Axioms of cooperative decision making*, chapter 9, pages 225–255. Econometric society monographs. Cambridge University Press, 1988.

[Neb98] B. Nebel. *Belief Revision*, volume 3 of *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, chapter How hard is it to revise a belief base ?, pages 77–145. Kluwer Academic, 1998.

[Pap94] C. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.

[Rev93] P. Z. Revesz. On the semantics of theory change : arbitration between old and new information. In *Proceedings of the Twelfth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Databases*, pages 71–92, 1993.

[Rev97] P. Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.

[Sat75] M.A. Satterthwaite. Strategy-proofness and Arrow's conditions. *Journal of Economic Theory*, 10 :187–217, 1975.

[Sha76] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.

[Sha87] G. Shafer. Belief functions and possibility measures, the analysis of fuzzy information. *Mathematics and Logic*, 1 :51–84, 1987.

[Sme00] Ph. Smets. Data fusion in the transferable belief model. In *Proc. 3rd Int. Conf. Information Fusion*, pages PS 21–33. FUSION 2000, Paris, France, 2000.

[Spo87] W. Spohn. Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic states. In W. L. Harper and B. Skyrms, editors, *Causation in Decision, Belief Change, and Statistics*, volume 2, pages 105–134. 1987.

[ST05] Y. Shoham and M. Tennenholtz. Non-cooperative computation : Boolean functions with correctness and exclusivity. *Theoretical Computer Science*, 343(1-2) :97–113, 2005.

[Sub94] V.S. Subrahmanian. Amalgamating knowledge bases. In *ACM Transactions on Database systems*, pages 291–331, 1994.

[Vor06] M. Vorsatz. Approval voting on dichotomous preferences. *Social Choice and Welfare*, 2006.

[Yag87] R.R. Yager. On the Dempster-Shafer framework and new combinaison rules. *Information sciences*, 41 :93–137, 1987.

[Zad78] L.A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1 :3–28, 1978.

[Zad84] L.A. Zadeh. Review of "a mathematical theory of evidence". *AI Magazine*, 5(3) :81, 1984.