Un algorithme efficace de calcul de la dimension réelle d'un ensemble algébrique réel.

Ivan Bannwarth, Mohab Safey El Din
Université Pierre et Marie Curie, INRIA - POLSYS team,
LIP6 - CNRS
`ivan.bannwarth@lip6.fr`, `mohab.safey@lip6.fr`

Nous nous intéressons au calcul de la dimension réelle d'un ensemble semi-algébrique S . La dimension réelle est le plus grand entier d tel que la projection de S sur un espace affine de dimension d est d'intérieur non vide.

Ce problème est motivé par les travaux de Barone et Basu [6, 7] qui utilisent le calcul de la dimension réelle. Il est également motivé par l'étude des systèmes mécaniques contraints [8] car la dimension réelle exprime le degré de liberté de mouvement de tels systèmes.

Comme l'élimination d'un bloc de quantificateurs sur les réels permet de calculer la projection d'un semi-algébrique, elle a un rôle important dans l'état-de-l'art. À l'aide des formules obtenues par élimination, on peut tester si l'intérieur de la projection est vide.

Le premier algorithme pour l'élimination de quantificateurs est la décomposition cylindrique algébrique dû à Collins [2] en temps doublement exponentiel en n , le nombre de variables. Les techniques récentes d'élimination permettent à Vorobjov [4], Koiran [3], et Basu, Pollack et Roy [5] de concevoir une famille d'algorithmes déterministes calculant la dimension réelle d en temps simplement exponentiel en $O(d(n - d))$. Mais malgré ce gain de complexité, il n'y a pas d'implémentation efficace connue de ces algorithmes. Une des raisons repose dans la constante de complexité qui n'est pas bien contrôlée. La meilleure implémentation de l'état de l'art semble être aujourd'hui une implémentation de la décomposition cylindrique algébrique.

Notre objectif est de trouver un algorithme qui calcule la dimension réelle d'un semi-algébrique qui soit dans la meilleure classe de complexité connue et qui admette une implémentation plus efficace que l'état de l'art. Pour cela nous cherchons à contrôler la constante dans l'exposant.

Dans cette présentation nous allons parler d'un nouvel algorithme probabiliste qui calcule la dimension réelle d'une *hypersurface* définie par une

équation polynomiale à coefficients réels en temps simplement exponentiel en $3d(n - d)$.

Cet algorithme s'inspire des récents travaux de H. Hong et M. Safey El Din [1] mais dans un cadre plus général : nous contourignons l'élimination des quantificateurs en utilisant un nouveau moyen de tester si l'intérieur d'une projection est vide. Pour faire cela, nous calculons la frontière de la projection à l'aide de variétés polaires, ensemble des points critiques de la restriction de la projection à l'hypersurface. En calculant un point par composante connexe du complémentaire de la frontière, nous pouvons tester si l'intérieur de la projection est vide. Le cas d'un ensemble algébrique réel sans point régulier est celui qui pose difficulté et qu'il faut traiter avec attention.

La première implémentation, reposant sur des calculs de bases de Gröbner et écrite en Maple est déjà beaucoup plus performante que celles de l'état de l'art. Elle est à la fois plus rapide et permet de traiter des exemples de taille plus grande, hors de portée de l'état-de-l'art.

Bibliographie

- [1] H. HONG, M. SAFEY EL DIN, *Variant real quantifier elimination*, Journal of Symbolic Computation, 2012, vol. 47, no. 7, p.883-901.
- [2] G. COLLINS, *Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition*, Automata Theory and Formal Languages 2nd GI Conference Kaiserslautern, May 20–23, 1975, p. 134–183.
- [3] P. KOIRAN, *The Real Dimension Problem Is NPR-Complete*, Journal of Complexity, 1999, vol. 15, no. 2, p. 227–238.
- [4] N. VOROBOV, *Complexity of Computing the Local Dimension of a Semialgebraic Set*, Journal of Symbolic Computation, 1999, vol. 27, no. 6, p. 565–579.
- [5] S. BASU AND R. POLLACK AND M.-F. ROY, *Algorithms in real algebraic geometry*, Algorithms and Computation in Mathematics, 2006, vol. 10.
- [6] S. BARONE, AND S. BASU, *Refined Bounds on the Number of Connected Components of Sign Conditions on a Variety*, Discrete & Computational Geometry, 2012, vol. 47, no.3, p.577–597.
- [7] S. BARONE, AND S. BASU, *On a real analogue of Bezout inequality and the number of connected components of sign conditions*, ArXiv e-prints, 2013, 1303.1577.
- [8] , Q. JIN, AND T. QIONG, *Overconstraint analysis on spatial 6-link loops*, Mechanism and machine theory, 2002, vol. 37, no. 3, p. 267–278.