Formes libres pour les trajectoires optimales

P. Bonnelie, O. Ruatta
DMI, XLIM UMR 7252 Université de Limoges CNRS
pierre.bonnelie@xlim.fr,olivier.ruatta@xlim.fr

1 Motivations

On présente une approche pour la génération de chemins des méthodes par homotopie pour la résolution d'un système (calcul de racines, calcul de valeurs propres, valeurs singulières, ...). Si l'ensemble des systèmes a une structure d'espace vectoriel, supposons que l'on veuille résoudre un système S_f, on commence à partir d'un système S_i que l'on sait résoudre et on le déforme jusqu'au système S_f. Une solution est l'homotopie linéaire : on suit le segment $[S_i; S_f]$. Cependant on risque de recontrer un problème plus mal conditionné que le système auquel on s'intéresse. L'idée est de ne pas se restreindre à des segments mais à des chemins, de sorte à éviter le plus possible les systèmes mal conditionnés.

2 Modèle

Soit E un espace vectoriel et Σ un sous-ensemble de E (Σ représentant l'ensemble des systèmes mal conditionnés). On note $\mu(v) = dist(v, \Sigma)$, pour tout $v \in E$. Etant donnés S_i et $S_f \in E$, on cherche une courbe $\Gamma : [0; 1] \to E$ telle que

- $\Gamma(0) = S_i$ et $\Gamma(1) = S_f$
- Γ est le minimum de $\int_0^1 \mu(\Gamma(t))dt$ ou $\max_{t\in[0;1]} \mu(\Gamma(t))$ par exemple

3 Notre approche

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on peut définir des courbes de Bézier dans E. Ainsi un chemin Γ sera représenté par une courbe de Bézier et les variables du problème d'optimisation seront les points de contrôle de sorte à faire de l'optimisation en dimension finie plutôt qu'en dimension infinie.

4 Formalisme

Considérons toujours un espace vectoriel E de dimension finie. Une courbe de Bézier de degré d, $B([P_0, ..., P_d], t) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (1-t)^{d-i} t^i P_i$ à valeurs dans E est entièrement déterminée par des points de contrôle $P_0, ..., P_d$ de E.

On peut montrer que l'application qui à $d+1$ points de contrôle $P_0, ..., P_d$ de E associe la courbe de Bézier précédemment définie constitue un isomorphisme entre E^{d+1} et l'espace $\mathcal{B}_{1,d}$ des courbes de Bézier de degré d.
Le problème d'optimisation $\min_{\Gamma} \int_0^1 \mu(\Gamma(t))dt$ s'écrit alors $\min_{P_0,...,P_d \in E} \int_0^1 \mu(B([P_0, ..., P_d], t))dt$.

Si l'espace $\mathcal{B}_{1,d}$ n'offre pas assez de liberté, on peut l'étendre à l'espace $\mathcal{B}_{N,d}$ des courbes de Bézier par morceaux.

5 Traitement

On a utilisé la fonction *fmincon* MATLAB pour résoudre le problème $\min_{P_0,...,P_d \in E} \int_0^1 \mu(B([P_0, ..., P_d], t))dt$ en laissant le logiciel calculer le gradient mais on pourrait aussi le calculer formellement et le passer en argument à *fmincon*.

6 Exemple dans $\mathbb{R}^2$

On a testé cette méthode sur un exemple plan. Σ est un lieu géométrique (un point, une droite, un cercle ...) et on cherche à relier deux points A et B du plan par le plus court chemin tout en restant le plus loin possible de Σ.

En prenant la distance euclidienne d_2, le problème d'optimisation est

$$\min_{P_0,...,P_d \in E} \int_0^1 d_2(B([P_0, ..., P_d], t), \Sigma) dt$$

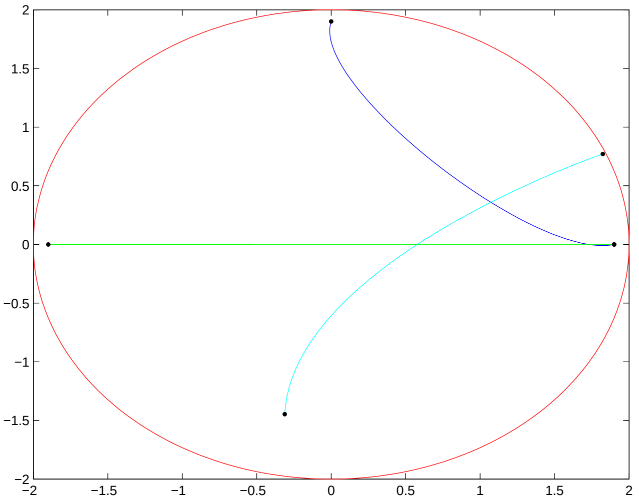

FIGURE 1 – Trois trajectoires obtenues pour différents points A et B, lorsque Σ est un cercle.