

Calculs de séries génératrices hypergéométriques pour les marches à petits pas dans le quart de plan

A. Bostan⁽¹⁾, **F. Chyzak**⁽¹⁾, M. van Hoeij⁽²⁾, M. Kauers⁽³⁾, L. Pech⁽⁴⁾
⁽¹⁾INRIA, ⁽²⁾Florida State University, ⁽³⁾RISC, ⁽⁴⁾Google

alin.bostan@inria.fr, frederic.chyzak@inria.fr,
hoeij@mail.math.fsu.edu, mkauers@gmail.com, lucien.pech@gmail.com

Les marches sur un réseau sont des objets combinatoires qui interviennent de façon récurrente en mathématique discrète, en physique statistique, en théorie des probabilités, ou encore en recherche opérationnelle. Les séries génératrices qui les comptent selon certaines contraintes attirent l'attention tant des combinatoriciens que des algorithmiciens du calcul formel. D'abord, leurs propriétés algébriques varient grandement selon la famille de pas admissibles choisie pour les définir, permettant de former des séries génératrices tantôt rationnelles, tantôt algébriques (et donc données par une équation polynomiale), tantôt D-finies (et donc données par une équation différentielle linéaire), tantôt encore sans équation apparente. Ceci suscite depuis quelques années un effort de classification qui a abouti à des caractérisations qui ne sont pas encore suffisamment comprises pour être totalement explicites. Par ailleurs, les propriétés calculatoires des marches sur réseau en font un défi intéressant pour le calcul formel, car leur description selon la classification précédente mène souvent à des équations, qu'elles soient polynomiales ou différentielles, de degrés, ordres et tailles si grandes qu'il devient difficile d'obtenir explicitement ces descriptions, et de les manipuler avec une efficacité raisonnable.

Étant donnée une famille fixée de vecteurs du plan non nuls et de coordonnées ± 1 , vecteurs que nous appellerons « pas », une marche à petits pas sur le réseau carré plan est une succession finie de pas mis les uns à la suite des autres. On s'intéresse particulièrement aux marches contraintes à rester dans le quart de plan (à coordonnées entières positives ou nulles), et comptées selon leur longueur (nombre de pas). Dans cet exposé, nous présentons un travail en cours qui fait le pont entre deux travaux antérieurs de

natures différentes, sur le sujet des marches à petits pas dans le quart de plan. D’une part, Bousquet-Mélou et Mishna ont montré [2] que parmi les 79 modèles essentiellement différents, seuls 19 ont une série génératrice qui soit D-finie et transcendante, et correspondent donc à une équation différentielle linéaire, mais ce sans expliciter les équations différentielles dont elles prouvaient l’existence. Presque simultanément, Bostan et Kauers [1] ont obtenu par des calculs non triviaux mais heuristiques des équations différentielles linéaires selon toute vraisemblance vérifiées par ces 19 marches, mais sans prouver formellement la correction de ces équations. Dans le travail en cours, nous donnons la première preuve que ces équations sont bien vérifiées par les séries génératrices correspondantes. L’approche procède en représentant les séries génératrices des marches contraintes comme extractions de coefficients dans des séries rationnelles, et par une validation soignée de l’emploi du procédé de télescopage créatif [3] utilisé pour ces extractions.

Une fois prouvées, les équations différentielles permettent de calculer de façon garantie nombre de formules et propriétés des séries des marches. D’abord, une factorisation appropriée des opérateurs différentiels sous-jacents permet de représenter les séries génératrices de marches comme variations de primitives itérées de fonctions hypergéométriques de Gauss [4]. Il s’ensuit que les propriétés d’algébricité et transcendance des séries énumératives et de spécialisations significatives pour la combinatoire sont accessibles au calcul, de même que des formules asymptotiques complètes pour les nombres de marches en fonction de leur longueur.

Références

- [1] Alin Bostan and Manuel Kauers. Automatic classification of restricted lattice walks. In *21st International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2009)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AK, pages 201–215.
- [2] Mireille Bousquet-Mélou and Marni Mishna. Walks with small steps in the quarter plane. In *Algorithmic probability and combinatorics*, volume 520 of *Contemp. Math.*, pages 1–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [3] Frédéric Chyzak. An extension of Zeilberger’s fast algorithm to general holonomic functions. *Discrete Math.*, 217(1-3) :115–134, 2000.
- [4] Tingting Fang and Mark van Hoeij. 2-descent for second order linear differential equations. In *ISSAC 2011—Proceedings of the 36th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 107–114. ACM, New York, 2011.