

# Équations pour les diagonales, application aux marches unidimensionnelles

A. Bostan, **L. Dumont**, B. Salvy  
INRIA Saclay, équipe SpecFun  
INRIA Grenoble-Rhône-Alpes, équipe AriC  
`Alin.Bostan@inria.fr`, `Louis.Dumont@inria.fr`,  
`Bruno.Salvy@inria.fr`

## 1 Équations algébriques pour les diagonales de fractions rationnelles bivariées

Si  $F(X, Y) = \sum_{n,m \geq 0} a_{n,m} X^n Y^m$  est le développement en série à l'origine d'une fraction rationnelle bivariée, on s'intéresse à la **diagonale** de  $F$ , série univariée définie par

$$\Delta F(T) = \sum_{n \geq 0} a_{n,n} T^n.$$

C'est un fait classique, qui remonte au moins à Pólya [4], que  $\Delta F$  est une fonction algébrique.

Nous apportons une première contribution avec une borne **exponentielle** (en le bidegré du dénominateur de  $F$ ) sur la taille de l'équation **algébrique** satisfaite par  $\Delta F$ , et cette borne est fine. Ce résultat est à mettre en regard avec le fait, prouvé dans [2], que  $\Delta F$  satisfait une équation **différentielle** de taille polynomiale. Nous donnons également un algorithme de calcul en temps quasi-optimal (en la taille de la sortie) de l'équation algébrique, variante additive de l'algorithme « Platypus » proposé dans [1].

## 2 Conséquence sur le calcul des séries génératrices de marches unidimensionnelles

À la lumière de ce résultat, nous nous intéressons (dans la lignée de [1]) aux séries génératrices de quatre types de marches **unidimensionnelles**. En s'autorisant un ensemble de pas dans le plan de la forme  $(1, u)$ ,  $u \in \mathbb{Z}$  (donc l'abscisse représente le temps), on considère :

- Les marches simples : suites de pas non contraintes ;
- Les ponts : suites de pas qui s’achèvent sur l’axe des abscisses ;
- Les méandres : marches simples confinées au premier quadrant ;
- Les excursions : ponts confinés au premier quadrant.

Notons respectivement  $W(X)$ ,  $B(X)$ ,  $M(X)$  et  $E(X)$  leurs séries génératrices (le  $n$ -ième coefficient est le nombre de marches de longueur  $n$  du type choisi). La série  $W$  est rationnelle, tandis que les séries  $B$ ,  $M$ , et  $E$  sont algébriques [1].

Nous étudions la complexité du développement à l’ordre  $N$  de ces trois séries.

- (i) La méthode naïve consiste à utiliser la récurrence codée par  $W$ , et donne une complexité quadratique en  $N$ , sans précalcul.
- (ii) Une seconde méthode, présentée dans [1] effectue le calcul en temps linéaire en  $N$ , au prix du précalcul de l’équation algébrique.
- (iii) Nous exposons une troisième méthode donnant une complexité quasi-linéaire en  $N$ , et qui vise à minimiser le coût du précalcul. En effet, le calcul d’une équation algébrique peut dans certains cas être coûteux. Pour  $E$  ceci est étudié dans [3].  $B$  quant à elle peut se coder comme une diagonale, rentrant ainsi dans le cadre de l’étude du paragraphe précédent.

Nous proposons donc de s’appuyer sur les méthodes de [2] pour calculer une équation différentielle satisfaite par  $B$  sans passer par l’équation algébrique. Ce précalcul est ensuite réutilisé pour calculer  $E$  grâce à une relation entre  $E$  et  $B$ . Une diagonale analogue à  $B$  permet d’obtenir le développement de  $M$  par la même méthode.

## Bibliographie

- [1] C. BANDERIER, P. FLAJOLET, *Basic analytic combinatorics of directed lattice paths*, Theoretical Computer Science 281 (2002) 37–80.
- [2] A. BOSTAN, S. CHEN, F. CHYZAK, Z. LI, *Complexity of Creative Telescoping for Bivariate Rational Functions*, Proceedings ISSAC’10, ACM Press (2010) 203–210.
- [3] M. BOUSQUET-MÉLOU, *Discrete Excursions*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, vol. 57, (2008) 1–23.
- [4] G. PÓLYA, *Sur les séries entières, dont la somme est une fonction algébrique*, L’Enseignement Mathématique, vol. 22, (1921–1922) 38–47.