Sommes binomiales multiples : structure et calcul

A. Bostan — Inria — alin.bostan@inria.fr

P. Lairez — TU Berlin — lairez@tu-berlin.de

B. Salvy — Inria, ENS Lyon — bruno.salvy@inria.fr

Nous définissons précisément une classe de suites, les *sommes binomiales*, close pour de nombreuses opérations (somme, produit, sommation indéfinie, etc) et contenant les coefficients binomiaux. On y trouve toutes les sommes binomiales, y compris les sommes multiples, au sens usuel du terme, comme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{i+j}{j}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i}.$$

Notre premier résultat montre que les sommes binomiales sont exactement les coefficients des diagonales de fractions rationnelles, donnant ainsi une caractérisation intrinsèque des sommes binomiales. Notre second résultat est un algorithme pour décider de l'égalité dans la classe des sommes binomiales. On peut donc prouver de manière entièrement automatique, et relativement rapide, des identités comme

$$\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \binom{n+r}{r} \binom{n+s}{s} \binom{2n-r-s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^4.$$

De nombreux outils existent déjà pour traiter ce genre de sommes, et même des sommes bien plus générales que les sommes binomiales, mais une intervention humaine est souvent nécessaire pour conclure les preuves. Ce que nous apportons est un test d'égalité automatique de bout en bout sur la classe précisément délimitée des sommes binomiales.

Dans les deux cas, le principe est d'éviter la représentation des sommes binomiales par des systèmes d'équations récurrentes pour lui préférer la représentation des *séries génératrices* des sommes binomiales par des intégrales multiples de fractions rationnelles. L'idée n'est pas neuve, elle a notamment été exploitée en profondeur par Egorychev [Ego84] mais nous la systématisons et l'automatisons. Par exemple, nous calculons automatiquement que

$$\sum_{n\geq 0} t^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \frac{1}{(2i\pi)^3} \oint_\gamma \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x)(1-y)(1-z)xyz - t(x+yz-xyz)},$$

pour un certain domaine d'intégration γ. En plus des preuves d'identités, ce type de représentation intégrale permet de calculer des récurrences satisfaites par les sommes binomiales. Et les résultats de complexité obtenus précédemment sur l'intégration des fractions rationnelles [BLS13] peuvent se transférer aux sommes binomiales.

Une procédure, appelée *réduction géométrique*, permet de simplifier grandement les représentations intégrales. Si cette étape n'apporte rien à la théorie, elle est cruciale en pratique pour obtenir des intégrales calculables rapidement. Grâce à un algorithme efficace pour l'intégration rationnelle, on obtient ainsi une méthode efficace en pratique, et compétitive avec les autres approches, pour traiter les sommes binomiales.

Le point fort de la méthode concerne les sommes multiples : parfois malaisées en création télescopique, elles sont traitées indifféremment des sommes simples par cette méthode. La nature des calculs est finalement très différente des approches par création télescopique pour les sommes multiples [Weg97,Chy00], et ce dès les définitions : dans l'approche intégrale, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini comme le coefficient de x^k dans $(1+x)^n$; dans l'approche par création télescopique, il est défini par récurrences linéaires et conditions initiales. Si la création télescopique est beaucoup plus générale, l'approche intégrale évite certains problèmes, comme celui des récurrences singulières (c'est-à-dire les récurrences qui donnent $0 = 0$ pour certaines valeurs des indices), ou celui des certificats difficiles à sommer.

Bibliographie

[1] A. Bostan, P. Lairez & B. Salvy, « Creative telescoping for rational functions using the Griffiths–Dwork method », ISSAC Proceedings (2013), p. 93-100.

[2] F. Chyzak, « An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions », Discrete Math., 217.1-3 (2000), p. 115-134.

[3] G. P. Egorychev, *Integral representation and the computation of combinatorial sums*, Translations of Mathematical Monographs, t. 59, American Mathematical Society, 1984.

[4] K. Wegshaider, *Computer generated proofs of binomial multi-sum identities*, mémoire de master, J. Kepler Universität, Linz, Autriche, 1997.