Irrationalité de la constante d'Apéry : du calcul formel aux preuves formelles

F. Chyzak*, **A. Mahboubi***, T. Sibut-Pinote*, E. Tassi†
*Inria Saclay – Île-de-France,
†Inria Sophia Antipolis – Méditerranée
frederic.chyzak@inria.fr, assia.mahboubi@inria.fr
thomas.sibut-pinote@inria.fr, enrico.tassi@inria.fr

En 1979, Roger Apéry obtient la première démonstration [2] de l'irrationalité de la constante $\zeta(3)$. Comme détaillé par Alfred Van der Poorten [6], cette preuve est une combinaison astucieuse d'arguments remarquablement élémentaires de théorie des nombres et d'asymptotique. La trame de cette preuve repose de façon cruciale sur la découverte d'une relation de récurrence linéaire d'ordre deux commune aux deux suites suivantes :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \qquad b_n = a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m+1} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}}. \quad (1)$$

La suite de la preuve consiste à exploiter l'information donnée par cette récurrence, en particulier sur le comportement asymptotique de ses solutions. On conclut ainsi en construisant une approximation rationnelle de $\zeta(3)$ qui converge trop vite pour que sa limite soit elle-même rationnelle.

À la suite des travaux initiés dans les années 1990 par Doron Zeilberger [8, 9], se développe un appareil d'algorithmes permettant des calculs efficaces sur une large classe de suites, dites ∂-finies [4], qui sont avantageusement représentées par des récurrences linéaires et suffisamment de conditions initiales. Ces algorithmes sont implantés comme bibliothèques de systèmes de calcul formel comme Maple ou Mathematica. Ils permettent par exemple de calculer une récurrence commune aux suites (a_n) et (b_n), à partir des définitions 1. Une feuille de travail Maple écrite par Bruno Salvy [7] montre ainsi comment on peut écrire une variante de la preuve d'Apéry utilisant la bibliothèque Algolib [1] pour découvrir la récurrence cruciale.

L'objectif de ce travail est d'utiliser un assistant de preuve, Coq [5], pour construire une preuve formelle complète de l'irrationalité de $\zeta(3)$ à partir d'une telle preuve algorithmique. Nous utilisons un système de calcul formel pour proposer des énoncés candidats pour certains lemmes de la preuve, à propos des relations de récurrence. Ces énoncés sont ensuite prouvés formellement *a posteriori*, de sorte que la preuve formelle finale ne dépend pas de la façon dont ils ont été proposés et peut être rejouée sans faire appel au système de calcul formel. Nous discuterons la mise en œuvre de cette coopération entre systèmes de calcul formel et de preuves formelles ainsi que les prolongements possibles de cette expérience. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans les actes de la conférence Interactive Theorem Proving 2014 [3].

Bibliographie

[1] Algolib. `http://algo.inria.fr/libraries/`, 2013. Version 17.0. For Maple 17.

[2] R. Apéry. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. *Astérisque*, 61, 1979. Société Mathématique de France.

[3] F. Chyzak, A. Mahboubi, T. Sibut-Pinote and E. Tassi. A Computer-Algebra-Based Formal Proof of the Irrationality of $\zeta(3)$ In Ruben Gamboa Gerwin Klein, editor, *Interactive Theorem Proving*, volume 8558 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2014.

[4] F. Chyzak and B. Salvy. Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate identities. *J. Symbolic Comput.*, 26(2) :187–227, 1998.

[5] The Coq Proof Assistant. `http://coq.inria.fr/`, 2014. Version 8.4pl4.

[6] A. van der Poorten. A proof that Euler missed : Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. *Math. Intelligencer*, 1(4) :195–203, 1979. An informal report.

[7] B. Salvy. An Algolib-aided version of Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. `http://algo.inria.fr/libraries/autocomb/Apery2-html/apery.html`, 2003.

[8] D. Zeilberger. A holonomic systems approach to special functions identities. *J. Comput. Appl. Math.*, 32(3) :321–368, 1990.

[9] D. Zeilberger. The method of creative telescoping. *J. Symbolic Comput.*, 11(3) :195–204, 1991.