Approximation de racines multiples isolées de systèmes polynomiaux

Marc Giusti, **J.-C. Yakoubsohn**
Laboratoire LIX , Bâtiment Alan Turing, École Polytechnique
91120 Palaiseau
Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 9
Marc.Giusti@polytechnique.fr,yak@mip.ups-tlse.fr

Nous proposons une analyse numérique de l'article **Multiplicity hunting and approximating multiple roots of polynomial systems** écrit par les deux auteurs [1]. Nous y expliquions comment déduire un système régulier d'un système singulier, avec la même racine multiple isolée supposée exactement connue. Nous formalisions cette transformation par la notion de systèmes équivalents en un point. Plus précisément, si w est une racine multiple isolée du système polynomial $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \mathbf{C}[x]^m$, avec x dans $\mathbf{C}^n$, notre méthode calcule un système admettant la même racine w, mais régulier (et que nous appelions *équivalent*). Notons que ceci est obtenu **sans ajout de variables**, par une combinaison de deux opérations appelées **déflation (exacte)** et **dénoyautage (exact)**. Observons que la matrice Jacobienne $Df(w)$ n'est pas de rang maximum, et que m est supérieur ou égal à n.

L'opération de **déflation** consiste à remplacer un polynôme $g(x)$ par son gradient $\nabla g(x)$ quand nous avons simultanément $g(w) = 0$ et $\nabla(g(w) = 0$. Une fois que nous ne pouvons plus déflater aucune équation du système, la seconde opération que nous appelons **dénoyautage** consiste à ajouter au système les numérateurs des coefficients (non identiquement nuls) d'un complément de Schur de la matrice jacobienne $Df(x)$.

En combinant ces deux opérations, nous obtenons une suite **dégonflante** (F_k) insistons **sans ajout de nouvelles variables**), définie comme suit :

$$\begin{aligned} F_0 &= f \\ F_1 &= déflaté(F_0) \\ F_{k+1} &= déflaté(dénoyauté(F_k)), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Dans l'article [1] *loc. cit.*, nous avons prouvé que la multiplicité de la racine w du système F_k de la suite dégonflante décroît strictement. En conséquence, cette suite est finie. Il suffit d'extraire du dernier système n équations de rang maximum pour obtenir un système régulier équivalent.

Nous décrivons ensuite ce qui se passe dans le cadre numérique, où bien sûr la racine w n'est connue qu'approximativement, et traitons un exemple pour illustrer la méthode.

Enfin, nous donnons une estimation de la quantité appelé maintenant classiquement γ dans la littérature [2]. Elle représente en fait une sorte de nombre de conditionnement du système régulier obtenu après déflation. Pour un système polynomial F notons $[F]_w$ la quantité $\sum_{k\geq 1} \frac{||D^k F(w)||}{k!}$. Nous expliquerons le résultat suivant :

Theorem 1 *Soit d_k le maximum de l'ordre des déflations requises pour passer de F_k à F_{k+1} et r_k le rang de la matrice jacobienne du système $déflaté(F_k)$. Nous définissons $\mu = \max \mu_k$ où μ_k est la norme de la sous-matrice inversible de rang r_k de DF_k. Soient λ_0 et ρ_0 les quantités telles que $[F_0]_w \leq \frac{\lambda_0 t}{1-\rho_0 t}$. Nous avons alors :*

$$\lambda_{k+1} \leq (4(\sqrt{2}+1)\mu)^k (2+\sqrt{2})^{\sum_{j=1}^{k} j(d_j+1)-1} \prod_{j=0}^{k} (d_j+1) \lambda_0 \rho_0^{k+\sum_{j=0}^{k} d_j}$$

$$\rho_{k+1} \leq (2+\sqrt{2})^k \prod_{j=0}^{k} \frac{d_j+2}{2} \rho_0.$$

Références

[1] Giusti, M. and Yakoubsohn, J.-C., *Multiplicity hunting and approximating multiple roots of polynomial systems*, Recent Advances in Real Complexity and Computation : UIMP-RSME Lluis Santalo Summer School 2012, July 16-20, Santander (Cantabria), Spain, 604, 105, 2014.

[2] Smale, Steve, *Newton's method estimates from data at one point*, The Merging of Disciplines : New Directions in Pure, Applied, and Computational Mathematics, 185–196, 1986.