

Formes libres pour trajectoires optimales

Pierre Bonnelie

Travaux en cours avec Olivier Ruatta

XLIM, Université de Limoges

JNCF Novembre 2014

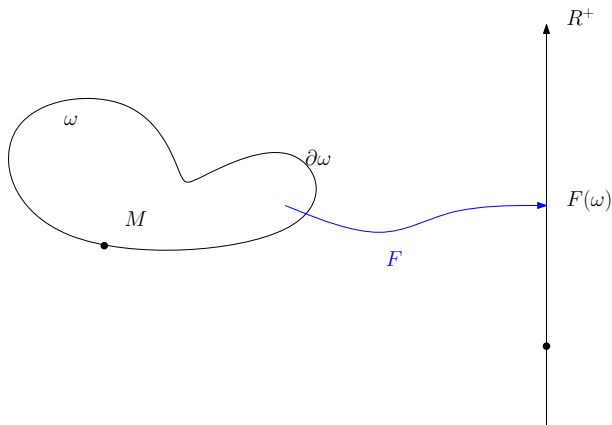
Introduction

Méthode provenant de l'optimisation de formes :

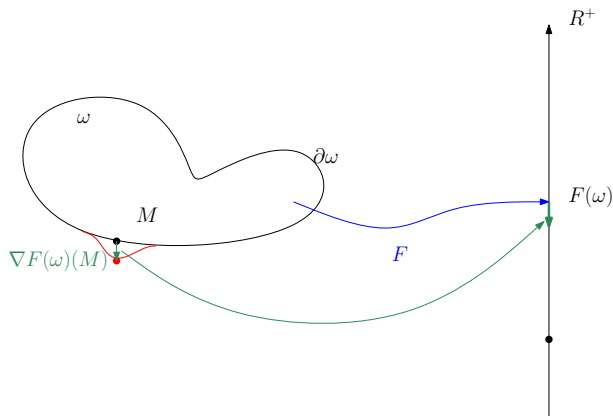


Application à l'approximation de trajectoires optimales :

Optimisation de formes



Optimisation de formes



Courbes de Bézier

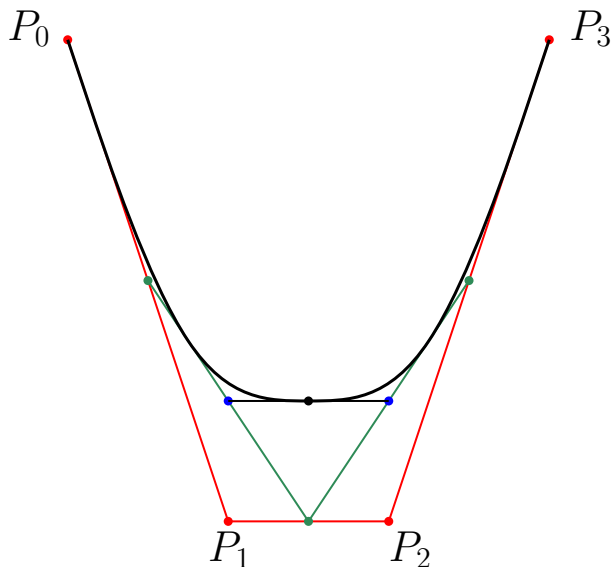
Soient $P_0, \dots, P_d \in \mathbb{R}^2$, on définit une famille de courbes paramétrées sur $[0, 1]$:

- $B([P_0], t) := P_0$ (courbe de Bézier de degré 0).
- $B([P_0, P_1], t) := (1 - t)B([P_0], t) + tB([P_1], t) = (1 - t)P_0 + tP_1$ (courbe de Bézier de degré 1)
- ...
- $B([P_0, \dots, P_d], t) := (1 - t)B([P_0, \dots, P_{d-1}], t) + tB([P_1, \dots, P_d], t)$ (courbe de Bézier de degré d).

Ce sont des courbes polynomiales.

Les points $P_0, \dots, P_d \in \mathbb{R}^2$ forment le polygone de contrôle de la courbe définie par $B([P_0, \dots, P_d], t)$.

Courbes de Bézier



Polynômes de Bernstein

Definition

Soit d un entier naturel, pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$ on définit :

$$b_{i,d}(t) = \binom{d}{i} (1-t)^{d-i} t^i.$$

Les polynômes $b_{0,d}, \dots, b_{d,d}$ sont appelés polynômes de Bernstein de degré d .

Proposition

Les polynômes de Bernstein de degré d , $b_{0,d}, \dots, b_{d,d}$, forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d .

Polynômes de Bernstein et courbes de Bézier

Theorem

$$B([P_0, \dots, P_d], t) = \sum_{i=0}^d P_i b_{i,d}(t)$$

Corollary

Toute courbe paramétrée polynomiale de degré au plus d peut être représentée par une courbe de Bézier de degré au plus d .

Definition

On note $\mathcal{B}_d$ l'espace vectoriel des courbes de Bézier de degré au plus d .

Structure de $\mathcal{B}_d$

Soit E un espace vectoriel, considérons l'application suivante :

$\Psi_d : E^{d+1} \longrightarrow \mathcal{B}_d$ définie par $\Psi_d(P_0, \dots, P_d) = B([P_0, \dots, P_d], t)$.

Proposition

Ψ_d est un isomorphisme d'espace vectoriel entre E^{d+1} et $\mathcal{B}_d$.

Soit $\mathbf{t} = t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_d = 1$ une subdivision de $[0, 1]$. On définit l'application d'évaluation :

$$\mathcal{E}_{\mathbf{t},d} : \Gamma(t) \in \mathcal{B}_d \longmapsto (\Gamma(t_0), \dots, \Gamma(t_d)) \in E^{d+1}.$$

Proposition

$\mathcal{E}_{\mathbf{t},d}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathcal{B}_d$ et E^{d+1} .

Evaluation-Interpolation

Soit $\mathbf{t} = t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_d = 1$ une subdivision de $[0, 1]$ et soit $P_0, \dots, P_d \in E$.

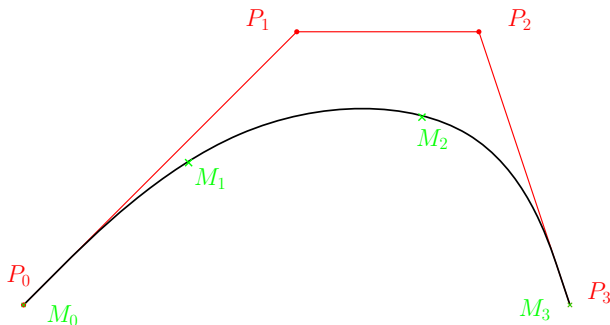
$$B_{\mathbf{t},d} := \begin{pmatrix} b_{0,d}(t_0) & \cdots & b_{d,d}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{0,d}(t_d) & \cdots & b_{d,d}(t_d) \end{pmatrix}.$$

Proposition (Evaluation)

$$B_{\mathbf{t},d} \begin{pmatrix} P_0^T \\ \vdots \\ P_d^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B([P_0, \dots, P_d], t_0)^T \\ \vdots \\ B([P_0, \dots, P_d], t_d)^T \end{pmatrix}.$$

Multi-évaluation

$$\mathbf{t} = (0, 1/3, 2/3, 1), \quad \begin{pmatrix} M_0^T \\ M_1^T \\ M_2^T \\ M_3^T \end{pmatrix} = B_{\mathbf{t},3} \begin{pmatrix} P_0^T \\ P_1^T \\ P_2^T \\ P_3^T \end{pmatrix}$$



Evaluation-Interpolation

Soit $\mathbf{t} = t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_d = 1$ une subdivision de $[0, 1]$ soit $M_0, \dots, M_d \in E$.

Problem

Trouver $P_0, \dots, P_d \in E$ tels que $B([P_0, \dots, P_d], t_i) = M_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$.

Proposition (Interpolation)

Les points définis par :

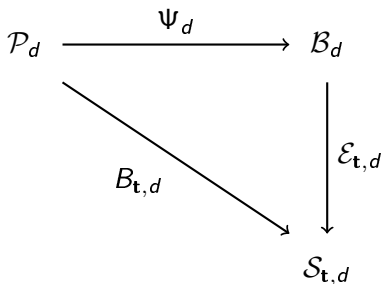
$$\begin{pmatrix} P_0^T \\ \vdots \\ P_d^T \end{pmatrix} = B_{\mathbf{t},d}^{-1} \begin{pmatrix} M_0^T \\ \vdots \\ M_d^T \end{pmatrix}$$

sont solutions du problème.

Résumé

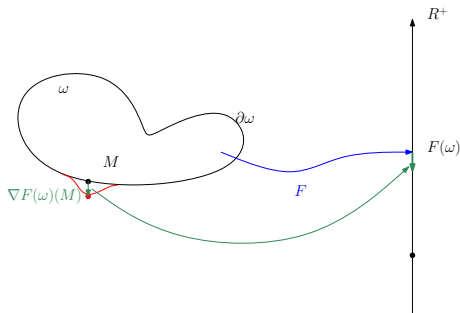
3 espaces en jeu :

- $\mathcal{P}_d \simeq E^{d+1}$ l'espace vectoriel des polygones de contrôle,
- $\mathcal{S}_{\mathbf{t},d} \simeq E^{d+1}$ l'espace vectoriel des évaluations des courbes de Bézier, associée à la subdivision $\mathbf{t}$,
- $\mathcal{B}_d$ l'espace vectoriel des courbes de Bézier de degré d .



Problème de déformation

Soit $\omega \subset E$ tel que $\partial\omega$ est une courbe continue par morceaux et $F : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction objectif. Le gradient géométrique $\nabla F(\omega) : M \in \partial\omega \mapsto \nabla F(\omega)(M) \in T_M E$ donne une perturbation en chaque point de la frontière pour diminuer la fonction objectif.



Problème de déformation

Soit $\Gamma(t) := B([P_0, \dots, P_d], t)$ une courbe de Bézier de degré d t.q.

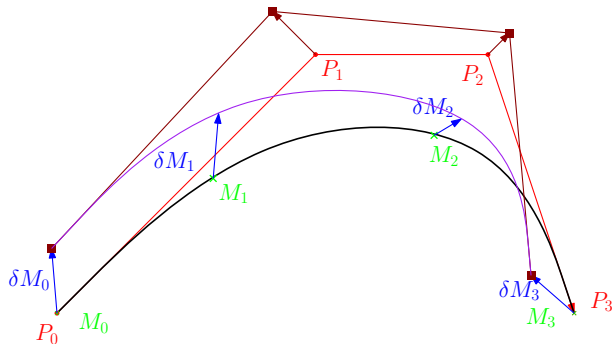
$\mathcal{E}_{\mathbf{t},d}(\Gamma) = \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_0^T \\ \vdots \\ M_d^T \end{pmatrix}$ et soit $\delta \mathbf{M} := \begin{pmatrix} \delta M_0^T \\ \vdots \\ \delta M_d^T \end{pmatrix} \in T_{\mathbf{M}} \mathcal{S}_{\mathbf{t},d}$, considérons le problème suivant :

Problem (Problème de déformation)

En posant $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_0^T \\ \vdots \\ P_d^T \end{pmatrix}$ trouver $\delta \mathbf{P} \in T_{\mathbf{P}} \mathcal{P}_d$ tel que

$\Lambda(t) := B([P_0 + \delta P_0, \dots, P_d + \delta P_d], t)$ satisfait $\Lambda(t_i) = M_i + \delta M_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$.

Déformation



Courbe de déformation

Proposition (Polygone de déformation)

En prenant $\delta\mathbf{P} = B_{\mathbf{t},d}^{-1}\delta\mathbf{M}$, la courbe $\Psi_d(\mathbf{P} + \delta\mathbf{P})$ est solution du "problème de déformation".

$\delta\mathbf{P} \in T_{\mathbf{P}}\mathcal{P}_d$ est appelé le polygone de déformation et $\Psi_d(\delta\mathbf{P}) \in T_{B([P_0,\dots,P_d],t)}\mathcal{B}_d$ est appelée la courbe de déformation.

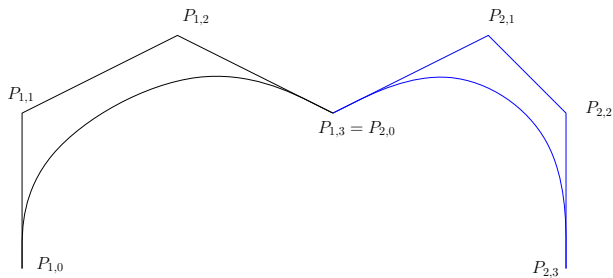
Courbes de Bézier par morceaux

Soient $\mathbf{P}_1 := (P_{1,0}, \dots, P_{1,d}) \in \mathcal{P}_d$, $\mathbf{P}_2 := (P_{2,0}, \dots, P_{2,d}) \in \mathcal{P}_d, \dots$ et $\mathbf{P}_N := (P_{N,0}, \dots, P_{N,d}) \in \mathcal{P}_d$ tels que $P_{1,d} = P_{2,0}, \dots, P_{N-1,d} = P_{N,0}$. On définit la paramétrisation suivante :

$$B((\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N), t) = \begin{cases} B([P_{1,0}, \dots, P_{1,d}], Nt) & \text{if } t \in [0, 1/N[\\ B([P_{2,0}, \dots, P_{2,d}], Nt - 1) & \text{if } t \in [1/N, 2/N[\\ \vdots \\ B([P_{N,0}, \dots, P_{N,d}], Nt - (N - 1)) & \text{if } t \in [\frac{N-1}{N}, N] \end{cases}$$

On note $\Psi(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N) := B((\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N), t)$.

Courbes de Bézier par morceaux



Espace vectoriel des courbes de Bézier par morceaux

On pose :

- l'espace vectoriel des polygones de contrôle

$$\mathcal{P}_{N,d} = \{(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N) | P_{1,d} = P_{2,0}, \dots, P_{N-1,d} = P_{N,0}\}$$

- l'espace vectoriel des CBPM

$$B_{N,d} = \{B((\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_d), t) | (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_d) \in \mathcal{P}_{N,d}\}$$

Trajectoire optimale

Soit E un espace vectoriel, $U \subseteq E$ un ouvert connexe et $\Sigma \subset U$. On pose :

$$F : \mathcal{C}([0, 1], U) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

On considère le problème d'optimisation suivant :

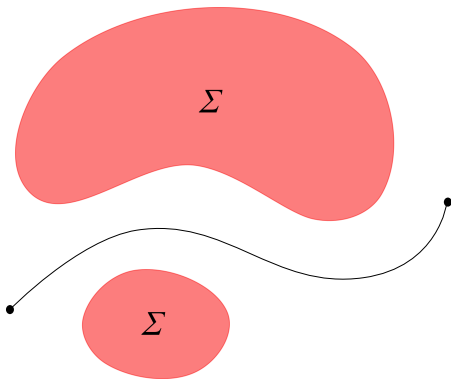
Problem (Problème (1) de trajectoire optimale)

Trouver $\gamma^ \in \mathcal{C}([0, 1], U)$ tel que $F(\gamma^*)$ est minimal.*

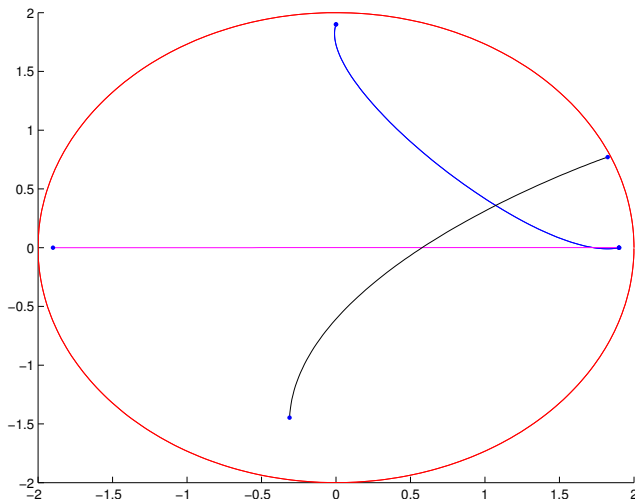
Exemples :
$$F(\gamma) = \int_0^1 \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|}{d(\gamma(t), \Sigma)} dt$$

Référence : C. Beltrán, J.P. Dedieu, G. Malajovich, M. Shub. "Convexity properties of the condition number".

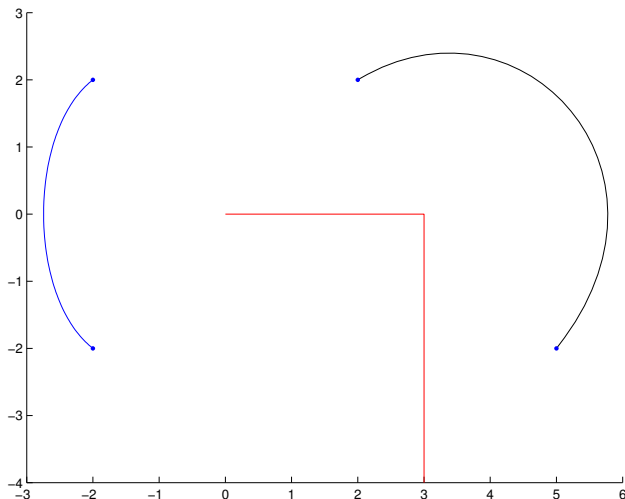
Trajectoire optimale



Exemple dans $\mathbb{R}^2$ - Disque de Poincaré



Exemple dans $\mathbb{R}^2$ - Σ = réunion de 2 segments



Application : revisiter une méthode d'homotopie

- γ courbe à valeurs dans E l'espace des problèmes
- $\gamma(0) =$ problème facile
- $\gamma(1) =$ problème que l'on souhaite résoudre
- $\Sigma = \{ \text{problèmes mal conditionnés} \}$

- $$\min F(\gamma) = \int_0^1 \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|}{d(\gamma(t), \Sigma)} dt$$

Exemples de problèmes

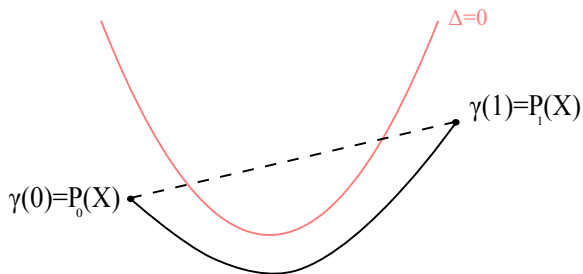
- Calcul de valeurs propres
 - $\Sigma = \{ \text{matrices à valeurs propres multiples} \}$

Référence : M. T. Chu "A simple application of the homotopy method to symmetric eigenvalue problems".

- Résolution de systèmes polynomiaux
 - $\Sigma = \{ \text{polynômes à racines multiples} \}$

Référence : M. Blum, F. Cucker, M. Shub, S. Smale "Complexity and real computation".

Calcul de racines d'un polynôme du second degré



Approximation des orbites d'équations différentielles

Soit $f : [a, b] \times U \longrightarrow E$ un champ de vecteur et $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$. On considère l'équation différentielle suivante :

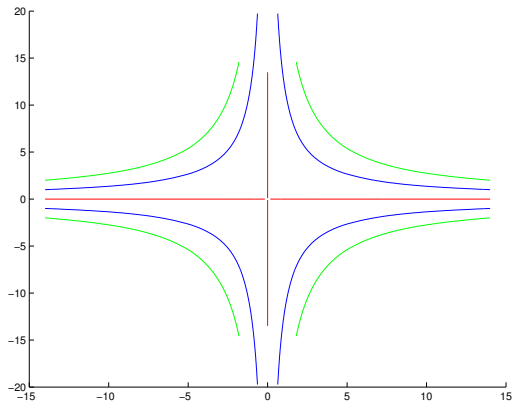
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Problem (Problème (2) de trajectoire optimale)

Trouver $\gamma^* \in C([0, 1], E)$ tel que $F(\gamma^*) = \int_0^1 \|f(\gamma^*(t)) \wedge \dot{\gamma}^*(t)\|^2 dt$ est minimal.

Autre critère : $F(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \|f(\gamma(t))\| - \langle \dot{\gamma}(t), f(\gamma(t)) \rangle dt$.

Exemple - $f(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$



Conclusion

- optimisation avec les courbes de Bézier par morceaux : coût faible en mémoire, calculs rapides (évaluation/interpolation/déformation patch par patch)
- nouvelle approche de l'homotopie : généralisation de l'homotopie linéaire, suivi des solutions par méthode de Newton le long de γ , amélioration au niveau numérique (contrôle du conditionnement)
- approximation d'orbites : approximation de l'objet géométrique (la paramétrisation n'est pas solution de l'équation); perspective : contrôle optimal

Conclusion

- optimisation avec les courbes de Bézier par morceaux : coût faible en mémoire, calculs rapides (évaluation/interpolation/déformation patch par patch)
- nouvelle approche de l'homotopie : généralisation de l'homotopie linéaire, suivi des solutions par méthode de Newton le long de γ , amélioration au niveau numérique (contrôle du conditionnement)
- approximation d'orbites : approximation de l'objet géométrique (la paramétrisation n'est pas solution de l'équation); perspective : contrôle optimal

Merci de votre attention.