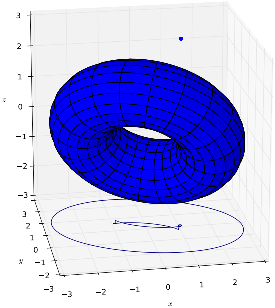
Topologie du discriminant d'une surface

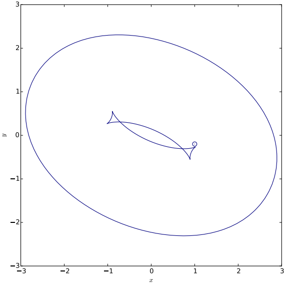
Guillaume Moroz et Marc Pouget

Inria Nancy - Grand Est
JNCF 2014

4 novembre 2014

Contour apparent contour



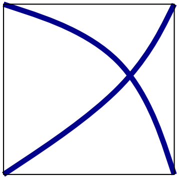


- $f(x, y, z) = 0$: surface lisse, bornée en z
- Courbe discriminante: $0 = \delta(x, y) := Disc_z(f) := \frac{Res_z(f, f_z)}{Lc_z(f)}$
- Sortie: courbe linéaire par morceau isotope à la courbe discriminante

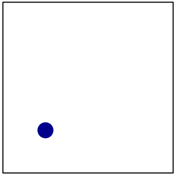
Singularités du discriminant (Whitney 1955)

Singularité p de $\delta(x, y) = 0$, sous des hypothèses génériques

- Nœuds



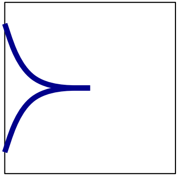
$x^2 - y^2 = 0$



$x^2 + y^2 = 0$

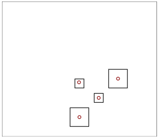
- Cusp ordinaire:

$$y^2 + x^3 = 0$$

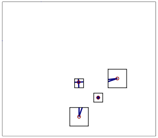


[Arnold, *The Theory of Singularities and Its Applications*, 1991]

Étapes clés du calcul de la topologie

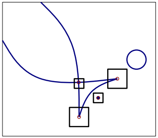


1. Isoler les singularités



2. Topologie locale autour des singularités p_i

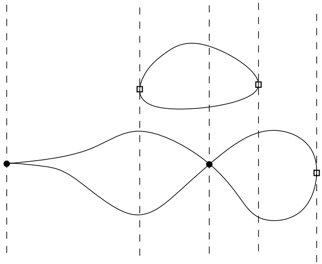
- Nombre de branches réelles
- Pas de branche déconnectée de p_i



3. Topologie globale

Topologie dans l'état de l'art

3. Connecter les boîtes en 2D.



Algorithme de balayage

1.
2. Isolation et description des singularités. Algorithmes symboliques

[Mourrain, Pion, Schmitt, Técourt, Tsigaridas, Wolpert. *Algebraic issues in Computational Geometry*, Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces, Mathematics and Visualization, 2006]

Isoler avec des méthodes numériques

- [Neumaier, *Interval methods for systems of equations*, 1990]
- [Dedieu, *Points fixes, zéros et la méthode de Newton*, 2006]
- [Rump, *Verification methods: Rigorous results using floating point arithmetic*, Acta Numerica, 2010]

Système bien posé

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \cdots = f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$$

- Autant d'équations que d'inconnues
- Solutions de multiplicité 1

Exemple de système non bien posé

$$\begin{cases} \delta(x,y) = 0 \\ \delta_x(x,y) = 0 \\ \delta_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

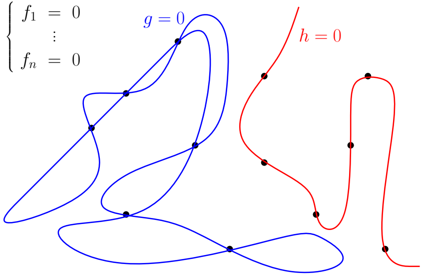
Certificat pour un système bien posé

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

- Critère garantissant l'existence d'une solution:
  - Newton par intervalle: $N(B) \subset B$

    où N est un opérateur tel que: $N(B) \supset \left(Id - J \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right)(B)$
  - Opérateurs classiques : Krawczyck, Hansen-Sengputa, ...
- Critère garantissant l'absence de solution:
  - Évaluation par intervalle: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}(B)$

Nouveau : système bien posé avec inégalité

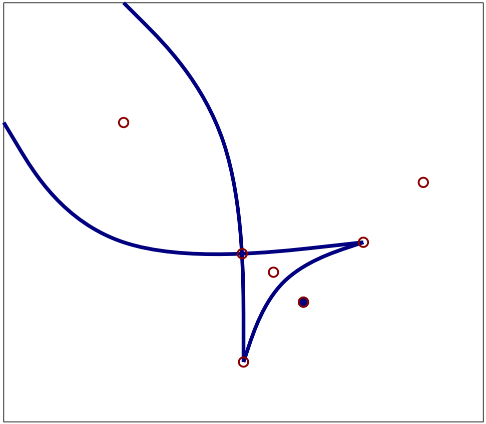


$$\begin{cases} f_1 = \cdots = f_n = 0 \\ \qquad\qquad h \neq 0 \end{cases}$$

Polynôme de garde
g tel que $\forall p \in V(f_1, \cdots, f_n)$:
$g(p) \neq 0$ ssi $h(p) = 0$

- Critère garantissant l'existence d'une solution: $N(B) \subset B$ et $0 \notin h(B)$
- Critère 1 garantissant l'absence de solution: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} (B)$
- Critère 2 garantissant l'absence de solution: $N(B) \subset B$ et $0 \notin g(B)$

Système (E) de points extrêmes $\delta_x = \delta_y = 0$



— $\delta = 0$

○ $\delta_x = \delta_y = 0$

- Points parasites
- Points de multiplicité 2
- Ne réutilise pas $f(x, y, z)$

Sous-résultants

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & \cdots & & & & n & n+1 & n+2 & \cdots & &
\end{array}
$$

$$
S = \begin{pmatrix}
a_0 & & & & & & a_1 & & & & & \\
a_1 & a_0 & & & & & 2a_2 & a_1 & & & & \\
a_2 & a_1 & a_0 & & & & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & & & \\
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & & \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= s_{22}(x,y)z^2 + s_{21}(x,y)z + s_{20}(x,y) \\
S_1 &= s_{11}(x,y)z + s_{10}(x,y) \\
S_0 &= \delta(x,y)
\end{aligned}
$$

Système (S) de sous-résultants

$$(S) \begin{cases} s_{11}(x,y) = 0 \\ s_{10}(x,y) = 0 \\ s_{22}(x,y) \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta \text{ polynôme de garde}$$

Théorème

Sous des hypothèses génériques (semi-vérifiables)

- p point singulier de δ ssi p solution de (S)
- solutions de (S) de multiplicité 1 dans $\langle s_{11}, s_{10} \rangle$

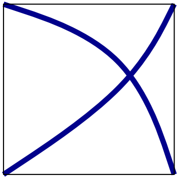
Multiplicités

Singularité	$\delta_x = \delta_y = 0$	(S)
Nœud	1	1
Cusp ordinaire	2	1

Topologie locale

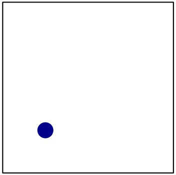
Type de singularité en fonction du déterminant du Hessien $H = \begin{vmatrix} \delta_{xx} & \delta_{xy} \\ \delta_{xy} & \delta_{yy} \end{vmatrix}$

- Nœuds



$H < 0$

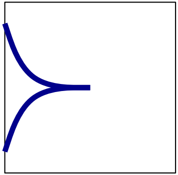
4 branches réelles



$H > 0$

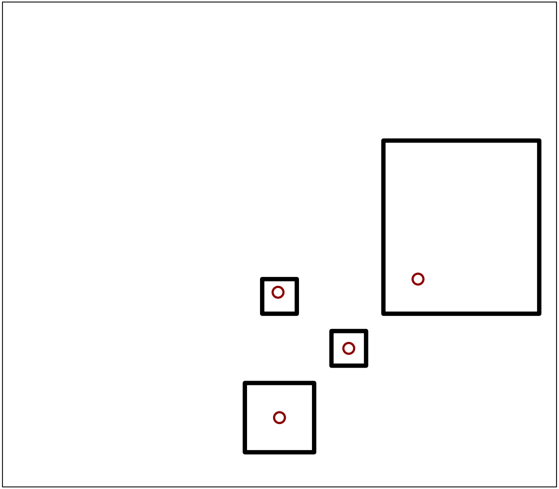
0 branche réelle

- Cusp ordinaire:
  $H = 0$
  $f = f_z = f_{zz} = 0$ bien posé

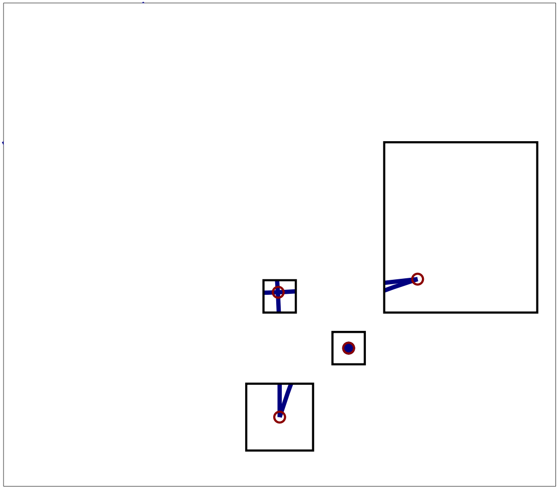


2 branches réelles

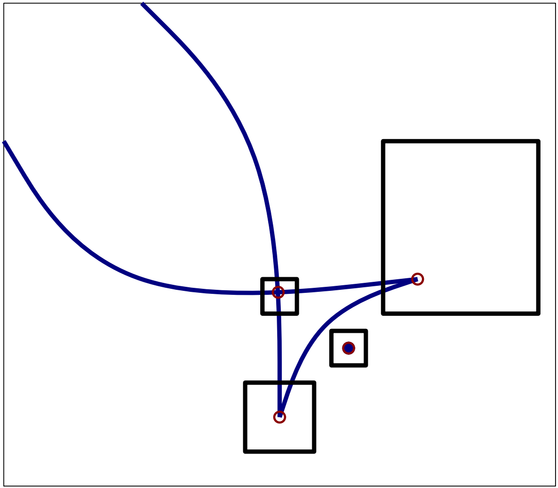
Topologie : isolation des singularités



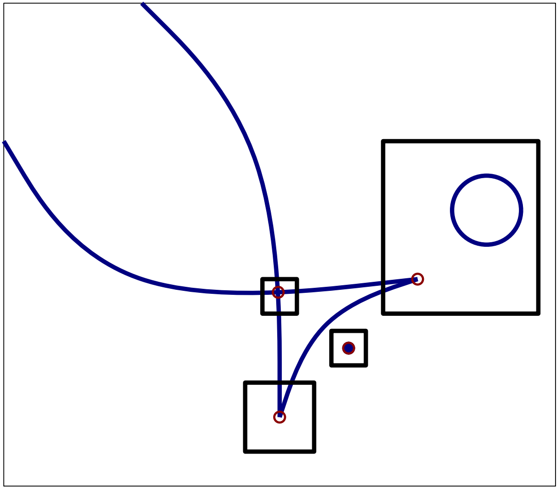
Topologie : topologie locale



Topologie : topologie complète

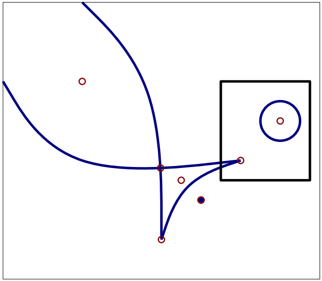


Topologie : vérification

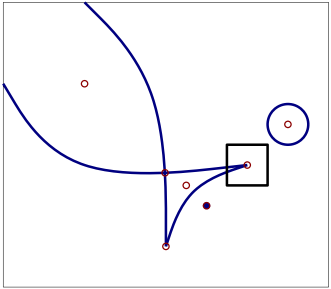


Détection de boucle

Retour au système (E) $\quad \delta_x = \delta_y = 0.$



$\longrightarrow$



Idée. Réduire les boîtes singulières jusqu'à ce que:

- Chaque boîte ne contient qu'une racine de (E)
- Le nombre de branche coupant le bord est correcte

Séparer les singularités des extrêmes

Solutions de $\delta_x = \delta_y = 0$	Multiplicité dans (E)
Nœud	1
Cusp ordinaire	2
Points hors de $\delta = 0$	≥ 1

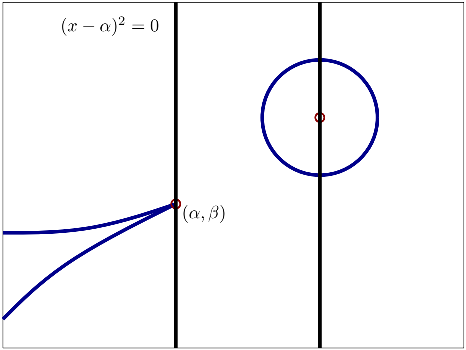
Cas où la boîte B contient un nœud

- Multiplicité 1 dans $\langle \delta_x, \delta_y \rangle$
- Méthode numérique Newton par intervalle: garanti solution unique

Cas où la boîte B contient un point cusp

- Multiplicité 2 dans $\langle \delta_x, \delta_y \rangle$
- Rouché multivarié:
  - permet de compter avec multiplicité le nombre de solutions dans B
  - nécessite de trouver un système dominant sur le bord de B
- Réduction à un polynôme univarié

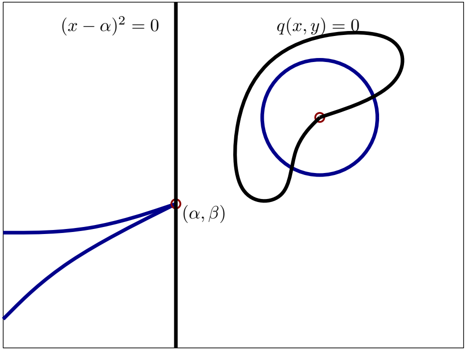
Approche classique: élimination



Résultant éliminant y

$$r(x) = \mathrm{Res}_y(\delta_x, \delta_y) \in \langle \delta_x, \delta_y \rangle$$
$$= (x-\alpha)^2 q(x)$$

Nouvelle approche: élimination locale



Trouver $q(x, y)$ tel que:

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 q(x,y) \in \langle \delta_x, \delta_y \rangle \\ q(\alpha, \beta) \neq 0 \end{cases}$$

Application au points cusps

- $\square f(B)$ est l'évaluation de f en B par une arithmétique d'intervalle
  - $f(B) \subset \square f(B)$
  - diamètre $\square f(B) = \mathrm{O}(\text{diamètre } B)$

Théorème

Soit B une boîte contenant un point cusp de $\delta = 0$.

$$\begin{aligned}
J &= \square\delta_{yy} \\
K &= \square\delta_{yy}^2 \square\delta_{xxx} - 3\square\delta_{yy}\square\delta_{xy}\square\delta_{xxy} + 3\square\delta_{xy}^2\square\delta_{xyy} - \square\delta_{xy}\square\delta_{xx}\square\delta_{yyy} \\
L &= \square\delta_{yy}\square\delta_{xxy} + \square\delta_{xx}\square\delta_{yyy} - 2\square\delta_{xy}\square\delta_{xyy} \\
M &= \square\delta_{yy}\square\delta_{xy} - \square\delta_{xy}\square\delta_{yy}
\end{aligned}$$

Si $0 \notin J(JK - LM)$ alors B ne contient pas de boucle fermé de $\delta = 0$.

Esquisse de preuve

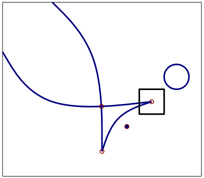
- Expansion of order 2 at point p: $\Delta x = x - \alpha$, $\Delta y = y - \beta$

$$\delta_x(x,y) = \begin{array}{c} c_{00} \\ + \\ c_{10}\Delta x + c_{01}\Delta y \\ + \\ c_{20}(x)\Delta x^2 + c_{11}(x)\Delta x\Delta y + c_{02}(x,y)\Delta y^2 \end{array}$$

$$\delta_y(x,y) = \begin{array}{c} d_{00} \\ + \\ d_{10}\Delta x + d_{01}\Delta y \\ + \\ d_{20}(x)\Delta x^2 + d_{11}(x)\Delta x\Delta y + d_{02}(x,y)\Delta y^2 \end{array}$$

- Pseudo résultant en Δy: c_{ij} et d_{ij} considérés comme constantes
- Évaluation en $p \in B$: $c_{ij}(p) \in \frac{\Box\delta_{x^{i+1}y^j}}{i!j!}$ et $d_{ij}(p) \in \frac{\Box\delta_{x^i y^{j+1}}}{i!j!}$

Conclusion



- Système bien posé : pour une boîte assez petite B
  - Permet de certifier l'existence ou l'absence de point singulier dans B
  - Permet de certifier l'absence de boucle fermée dans B
  - Uniquement par évaluation de fonction adaptée
- Cas B boîte grande
  - Peut être combiner avec un algorithm de subdivision ou d'homotopie
- Limites et généralisation
  - Degrés élevés $\Longrightarrow$ perte de précision dans l'évaluation
  - Cas f non polynômial ?
  - Cas du discriminant d'une surface de $\mathbb{R}^n$?