

Calcul sur des nombres à virgule flottante symboliques

Antoine PLET

LIP (AriC) - ENS de Lyon

JNCF - 4 novembre 2014

Travail réalisé avec C.-P. Jeannerod, N. Louvet et J.-M. Muller



Définition

En base β et précision p :

$$(-1)^s \cdot m \cdot \beta^e$$

avec $s \in \{0, 1\}$, $m \in \mathbb{N}$ (**mantisse**) tel que $m < \beta^p$ et $e \in \mathbb{Z}$ (**exposant**).

On note \mathbb{F}_p leur ensemble.

Définition

En base β et précision p :

$$(-1)^s \cdot m \cdot \beta^e$$

avec $s \in \{0, 1\}$, $m \in \mathbb{N}$ (**mantisse**) tel que $m < \beta^p$ et $e \in \mathbb{Z}$ (**exposant**).
On note \mathbb{F}_p leur ensemble.

Formats standards

La norme IEEE 754-2008 définit deux formats standards en base 2 :

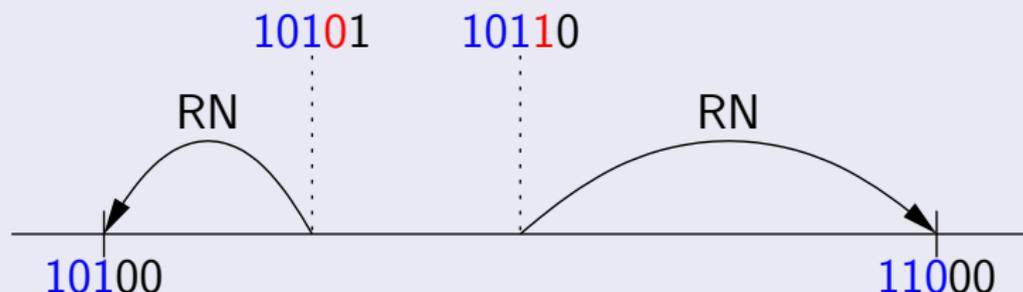
- binary32 (type *float* en C), avec $p = 24$,
- binary64 (type *double* en C), avec $p = 53$.

Approximation des réels pour les calculs, avec une règle (arrondi correct) définie par la norme pour les opérations de base.

Fonction d'arrondi

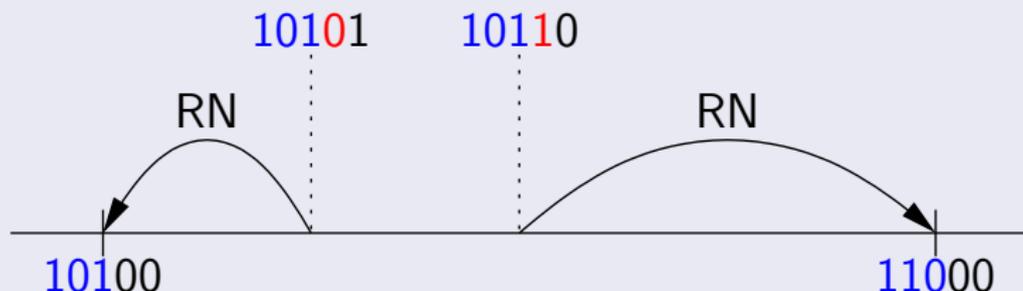
Arrondi au plus proche vers la mantisse paire (RN)

En base 2 et précision $p = 3$:



Arrondi au plus proche vers la mantisse paire (RN)

En base 2 et précision $p = 3$:



- Opérations de base : $+$, $-$, \times , \div , $\sqrt{\quad}$ et FMA (Fused Multiply-Add) qui calcule $a \times b + c$. Calcul de l'arrondi des résultats exacts.
- Erreur relative $\frac{|valeur\ calculée - valeur\ exacte|}{|valeur\ exacte|}$ bornée par $u = \frac{1}{2}\beta^{1-p}$.

Calcul de $r = ab + cd$

```
algorithm naïf( $a, b, c, d$ )  
   $\hat{p}_1 := \text{RN}(ab);$   
   $\hat{p}_2 := \text{RN}(cd);$   
   $\hat{r} := \text{RN}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2);$   
return  $\hat{r}$ 
```

Calcul de $r = ab + cd$

```
algorithm naïf( $a, b, c, d$ )  
   $\hat{p}_1 := \text{RN}(ab)$ ;  
   $\hat{p}_2 := \text{RN}(cd)$ ;  
   $\hat{r} := \text{RN}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)$ ;  
  return  $\hat{r}$ 
```

Borne d'erreur [Higham, '02] :

$$\frac{|r - \hat{r}|}{|r|} \leq (2u + u^2) \frac{|ab| + |cd|}{|ab + cd|}.$$

Calcul de $r = ab + cd$

```
algorithm naïf( $a, b, c, d$ )  
   $\hat{p}_1 := \text{RN}(ab)$ ;  
   $\hat{p}_2 := \text{RN}(cd)$ ;  
   $\hat{r} := \text{RN}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)$ ;  
  return  $\hat{r}$ 
```

Borne d'erreur [Higham, '02] :

$$\frac{|r - \hat{r}|}{|r|} \leq (2u + u^2) \frac{|ab| + |cd|}{|ab + cd|}.$$

Exemple de mauvais cas

En entrée :

- $a = 2^{p-1} + 2^{p-2} - 1$
- $b = -a$
- $c = a + 1$
- $d = a - 1$

En sortie :

- $r = -1$
- $\hat{r} = -2^p$

⇒ Erreur relative :

$$2^p - 1 = \frac{1}{u} - 1 \gg 1.$$

algorithm CHT(a, b, c, d)

$\hat{p}_1 := \text{RN}(ab);$

$e_1 := \text{RN}(ab - \hat{p}_1);$

$\hat{p}_2 := \text{RN}(cd);$

$e_2 := \text{RN}(cd - \hat{p}_2);$

$\hat{r} := \text{RN}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2);$

$\hat{e} := \text{RN}(e_1 + e_2);$

$\hat{s} := \text{RN}(\hat{r} + \hat{e});$

return \hat{s}

algorithm CHT(a, b, c, d)

$\hat{p}_1 := \text{RN}(ab);$

$e_1 := \text{RN}(ab - \hat{p}_1);$

$\hat{p}_2 := \text{RN}(cd);$

$e_2 := \text{RN}(cd - \hat{p}_2);$

$\hat{r} := \text{RN}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2);$

$\hat{e} := \text{RN}(e_1 + e_2);$

$\hat{s} := \text{RN}(\hat{r} + \hat{e});$

return \hat{s}

- Erreur relative $\leq \mathcal{O}(u)$
[Cornea, Harrison et Tang, '02],
- Erreur relative $\leq 2u$
[Jeannerod, '14].

Algorithme de Cornea, Harrison et Tang pour $r = ab + cd$

algorithm CHT(a, b, c, d)

$\hat{p}_1 := \text{RN}(ab);$

$e_1 := \text{RN}(ab - \hat{p}_1);$

$\hat{p}_2 := \text{RN}(cd);$

$e_2 := \text{RN}(cd - \hat{p}_2);$

$\hat{r} := \text{RN}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2);$

$\hat{e} := \text{RN}(e_1 + e_2);$

$\hat{s} := \text{RN}(\hat{r} + \hat{e});$

return \hat{s}

Certificat d'optimalité en base 2

[Muller, '13] :

- $a = c = 2^p - 1,$
- $b = 2^{p-3} + 2^{-1},$
- $d = 2^{p-3} + 2^{-2}.$

$$r = 2^{2p-2} + 2^{p-1} - 3 \cdot 2^{-2}$$

$$\hat{s} = 2^{2p-2}$$

- Erreur relative $\leq \mathcal{O}(u)$
[Cornea, Harrison et Tang, '02],
- Erreur relative $\leq 2u$
[Jeannerod, '14].

algorithm CHT(a, b, c, d)

$\hat{p}_1 := \text{RN}(ab);$

$e_1 := \text{RN}(ab - \hat{p}_1);$

$\hat{p}_2 := \text{RN}(cd);$

$e_2 := \text{RN}(cd - \hat{p}_2);$

$\hat{r} := \text{RN}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2);$

$\hat{e} := \text{RN}(e_1 + e_2);$

$\hat{s} := \text{RN}(\hat{r} + \hat{e});$

return \hat{s}

Certificat d'optimalité en base 2

[Muller, '13] :

- $a = c = 2^p - 1,$
- $b = 2^{p-3} + 2^{-1},$
- $d = 2^{p-3} + 2^{-2}.$

$$r = 2^{2p-2} + 2^{p-1} - 3 \cdot 2^{-2}$$

$$\hat{s} = 2^{2p-2}$$

- Erreur relative $\leq \mathcal{O}(u)$
[Cornea, Harrison et Tang, '02],

- Erreur relative $\leq 2u$
[Jeannerod, '14].

$$\Rightarrow \text{Erreur relative} \geq 2u - 7u^2$$

La borne d'erreur est asymptotiquement optimale.

Deux étapes :

- Calcul d'une borne sur l'erreur relative : analyse d'erreur a priori pour p « suffisamment grand ».
- Étude de la qualité de cette borne : recherche de mauvais cas à la main.

Inconvénients de la vérification de certificats à la main

- Fort risque d'erreur.
- Demande beaucoup de temps.
- Tout est à reprendre en cas de changement de base.

Exemple de l'évaluation de $ab + cd$ par l'algorithme naïf

Entrées :

$$a = 2^{p-1} + 2^{p-2} - 1, \quad b = -a, \quad c = a + 1, \quad d = a - 1.$$

- $a^2 = 2^{2p-2} + 2^{2p-4} + 1 + 2 \cdot 2^{2p-3} - 2 \cdot 2^{p-1} - 2 \cdot 2^{p-2}$
 $= 2^{2p-1} + 2^{2p-4} - 2^p - 2^{p-1} + 1$
- $ab = -a^2 = -(2^{2p-1} + 2^{2p-4} - 2^p - 2^{p-1} + 1)$
- $\hat{p}_1 = \text{RN}(ab) = -(2^{2p-1} + 2^{2p-4} - 2^p)$
- $cd = a^2 - 1 = 2^{2p-1} + 2^{2p-4} - 2^p - 2^{p-1}$
- $\hat{p}_2 = \text{RN}(cd) = 2^{2p-1} + 2^{2p-4} - 2^{p+1}$
- $\text{RN}(ab) + \text{RN}(cd) = -2^{p+1} + 2^p = -2^p$
- $\hat{r} = \text{RN}(\text{RN}(ab) + \text{RN}(cd)) = -2^p$

Proposer des méthodes automatiques pour le calcul flottant symbolique pour

- accélérer la recherche de mauvais cas,
 - vérifier les certificats d'optimalité existants.
-
- Première approche symbolique, inspirée d'une méthode de calcul numérique.
 - Seconde approche numérique, fondée sur l'évaluation-interpolation.

Les résultats symboliques sont valables pour p « suffisamment grand ».

Illustration

- $\alpha = 2^{2p-2} + 2^{p-1} - 3$.
- $\text{RN}(\alpha) = 2^{2p-2} + 2^{p-1}$ pour $p \geq 4$.
- Si $p = 3$:
 - $\alpha = 17 \Rightarrow \text{RN}(\alpha) = 16$,
 - **mais** $2^{2p-2} + 2^{p-1} = 20$.

⇒ Résultat symbolique valable pour $p \geq p_0$, avec $p_0 = 4$.

Conséquence

Il faut maîtriser le régime asymptotique et trouver une valeur correcte pour p_0 .

Plan de l'exposé

- 1 Contexte et problématique
- 2 Implantation en Maple du calcul flottant symbolique
- 3 Approche alternative numérique
- 4 Conclusion

Hypothèses :

- On travaille en base β paire fixée ($\beta = 2$ ou $\beta = 10$).
- La précision p est symbolique.
- Les calculs sont faits avec l'arrondi au plus proche vers la mantisse paire.

Hypothèses :

- On travaille en base β paire fixée ($\beta = 2$ ou $\beta = 10$).
- La précision p est symbolique.
- Les calculs sont faits avec l'arrondi au plus proche vers la mantisse paire.

Choix de conception :

- Choix d'une structure de données pour la représentation des nombres.
- Implantation des opérations élémentaires exactes (+ et \times).
- Implantation de la fonction d'arrondi.

Choix de représentation

Flottants « creux » \Rightarrow représentation inspirée des polynômes creux :
un flottant est représenté par une liste de couples (coefficient, exposant),
possiblement vide :

$$[(c_1, e_1), (c_2, e_2), \dots, (c_n, e_n)] \mapsto \sum_{i=1}^n c_i \beta^{e_i}.$$

Contraintes sur la structure de données :

- coefficients c_i entiers dans $[1 - \beta, \beta - 1]$, $c_1 \neq 0$,
- exposants : fonctions affines en p ,
- il existe p_0 tel que pour tout $p \geq p_0$ et $1 \leq i < n$,

$$e_i > e_{i+1},$$

$$\text{si } c_i c_{i+1} < 0, \text{ alors } e_i > e_{i+1} + 1.$$

$$\hookrightarrow 2^p - 2^{p-1} - 2^{p-2} = 2^{p-2}$$

Exemple de calcul numérique d'arrondi

$\beta = 2$, $p = 6$ et $\alpha = 812 = 1100101100_2$. Que vaut $\text{RN}(\alpha)$?

Exemple de calcul numérique d'arrondi

$\beta = 2$, $p = 6$ et $\alpha = 812 = 1100101100_2$. Que vaut $\text{RN}(\alpha)$?

- Bit de poids fort : 1100101100_2 .

Exemple de calcul numérique d'arrondi

$\beta = 2$, $p = 6$ et $\alpha = 812 = 1100101100_2$. Que vaut $\text{RN}(\alpha)$?

- Bit de poids fort : 1100101100_2 .
- Bit d'arrondi : 1100101100_2 .

Exemple de calcul numérique d'arrondi

$\beta = 2$, $p = 6$ et $\alpha = 812 = 1100101100_2$. Que vaut $\text{RN}(\alpha)$?

- Bit de poids fort : 1100101100_2 .
- Bit d'arrondi : 1100101100_2 .
- Encadrement : $800 = 1100100000_2 \leq \alpha \leq 1100110000_2 = 816$.

Exemple de calcul numérique d'arrondi

$\beta = 2$, $p = 6$ et $\alpha = 812 = 1100101100_2$. Que vaut $\text{RN}(\alpha)$?

- Bit de poids fort : 1100101100_2 .
- Bit d'arrondi : 1100101100_2 .
- Encadrement : $800 = 1100100000_2 \leq \alpha \leq 1100110000_2 = 816$.
- $\text{RN}(\alpha) = 816$.

Calcul symbolique d'arrondi

On cherche $RN(\alpha)$ où

$$\alpha = \underbrace{2^{2p-2}}_{\text{exposant maximal}} + \underbrace{2^{2p-3} + 2^{2p-6} + 2^{p+1} + 2^{p-1} + 2^2}_{\text{suite de l'expression}}$$

Calcul symbolique d'arrondi

On cherche $RN(\alpha)$ où

$$\alpha = \underbrace{2^{2p-2}}_{\text{exposant maximal}} + \underbrace{2^{2p-3} + 2^{2p-6} + 2^{p+1} + 2^{p-1} + 2^2}_{\text{suite de l'expression}}$$

- $2^{2p-2} \leq \alpha < 2^{2p-1}$

Calcul symbolique d'arrondi

On cherche $RN(\alpha)$ où

$$\alpha = \underbrace{2^{2p-2}}_{\text{exposant maximal}} + \underbrace{2^{2p-3} + 2^{2p-6} + 2^{p+1} + 2^{p-1} + 2^2}_{\text{suite de l'expression}}$$

- $2^{2p-2} \leq \alpha < 2^{2p-1}$
- On peut localiser le bit d'arrondi associé à l'exposant $p - 2$:

$$\alpha = \underbrace{2^{2p-2} + 2^{2p-3} + 2^{2p-6} + 2^{p+1} + \underbrace{2^{p-1}}_{\text{parité de la mantisse}}}_{\text{partie supérieure}} + \underbrace{0 \cdot 2^{p-2} + 2^2}_{\text{bit d'arrondi} \quad \text{partie inférieure}}$$

Calcul symbolique d'arrondi

On cherche $RN(\alpha)$ où

$$\alpha = \underbrace{2^{2p-2}}_{\text{exposant maximal}} + \underbrace{2^{2p-3} + 2^{2p-6} + 2^{p+1} + 2^{p-1} + 2^2}_{\text{suite de l'expression}}$$

- $2^{2p-2} \leq \alpha < 2^{2p-1}$
- On peut localiser le bit d'arrondi associé à l'exposant $p - 2$:

$$\alpha = \underbrace{2^{2p-2} + 2^{2p-3} + 2^{2p-6} + 2^{p+1} + \underbrace{2^{p-1}}_{\text{parité de la mantisse}}}_{\text{partie supérieure}} + \underbrace{0 \cdot 2^{p-2} + 2^2}_{\text{bit d'arrondi partie inférieure}}$$

- $\text{partie supérieure} \leq \alpha \leq \text{partie supérieure} + 2^{p-1}$

Calcul symbolique d'arrondi

On cherche $RN(\alpha)$ où

$$\alpha = \underbrace{2^{2p-2}}_{\text{exposant maximal}} + \underbrace{2^{2p-3} + 2^{2p-6} + 2^{p+1} + 2^{p-1} + 2^2}_{\text{suite de l'expression}}$$

- $2^{2p-2} \leq \alpha < 2^{2p-1}$
- On peut localiser le bit d'arrondi associé à l'exposant $p-2$:

$$\alpha = \underbrace{2^{2p-2} + 2^{2p-3} + 2^{2p-6} + 2^{p+1} + \underbrace{2^{p-1}}_{\text{parité de la mantisse}}}_{\text{partie supérieure}} + \underbrace{0 \cdot 2^{p-2} + 2^2}_{\substack{\text{bit d'arrondi} \\ \text{partie inférieure}}}$$

- $\text{partie supérieure} \leq \alpha \leq \text{partie supérieure} + 2^{p-1}$
- Finalement, bit d'arrondi = 0 donc

$$RN(\alpha) = 2^{2p-2} + 2^{2p-3} + 2^{2p-6} + 2^{p+1} + 2^{p-1}.$$

Code Maple

Démonstration.

Code Maple

Démonstration.

Vérification des certificats d'optimalité présentés dans :

- *Error Bounds on Complex Floating-Point Multiplication*, [Brent, Percival et Zimmermann, '07] ([2 exemples](#)) ;
- *Further analysis of Kahan's algorithm for the accurate computation of 2×2 determinants*, [Jeannerod, Louvet et Muller, '13] ([8-12 exemples](#)) ;
- *On the componentwise accuracy of complex floating-point division with an FMA*, [Jeannerod, Louvet et Muller, '13] ([8-11 exemples](#)) ;
- *On the error of computing $ab + cd$ using Cornea, Harrison and Tang's method*, [Muller, '14] ([1 exemple](#)).

Plan de l'exposé

- 1 Contexte et problématique
- 2 Implantation en Maple du calcul flottant symbolique
- 3 Approche alternative numérique**
- 4 Conclusion

Structure de données \leftrightarrow polynômes. On rassemble les exposants ayant le même coefficient linéaire en p pour créer un monôme.

Illustration

Sur l'algorithme de Cornea, Harrison et Tang, avec $x = 2^p$, on a en entrée :

- $a = 2^p - 1 = x - 1$,
- $b = 2^{p-3} + 2^{-1} = 2^{-3}x + 2^{-1}$,
- $c = 2^p - 1 = x - 1$,
- $d = 2^{p-3} + 2^{-2} = 2^{-3}x + 2^{-2}$;

et en sortie :

- $\hat{s} = 2^{2p-2} = 2^{-2}x^2$.

Notation : $\mathbb{F} = \bigcup_{p \geq 2} \mathbb{F}_p$ ensemble des réels à support fini en base β .

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a > 0$ et $x = \beta^{ap+b}$. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{F}[X]$, il existe un polynôme $R \in \mathbb{F}[X]$ et un entier p_0 tels que

$$RN_p(Q(x)) = R(x) \quad \text{pour tout } p \geq p_0.$$

Notation : $\mathbb{F} = \bigcup_{p \geq 2} \mathbb{F}_p$ ensemble des réels à support fini en base β .

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a > 0$ et $x = \beta^{ap+b}$. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{F}[X]$, il existe un polynôme $R \in \mathbb{F}[X]$ et un entier p_0 tels que

$$RN_p(Q(x)) = R(x) \quad \text{pour tout } p \geq p_0.$$

Remarques :

- On peut calculer p_0 à partir de Q .
- $\deg(R) = \deg(Q)$.

Évaluation-interpolation

$P \in \mathbb{Q}[X]$, $d = \deg(P)$. Il suffit de connaître la valeur de P en $d + 1$ points distincts pour retrouver ses coefficients.

$P \in \mathbb{Q}[X]$, $d = \deg(P)$. Il suffit de connaître la valeur de P en $d + 1$ points distincts pour retrouver ses coefficients.

Conséquence

On peut calculer sur des flottants symboliques avec une méthode numérique : l'évaluation-interpolation.

Calcul d'une opération suivie d'un arrondi :

- choix de $x = \beta^{ap+b}$ et calcul de Q ,
- déduction de p_0 et du degré d de R ,
- évaluation de $\text{RN}(Q(x))$ pour $x_i = \beta^{ap_i+b}$, $i = 0, \dots, d$,
- interpolation pour trouver R ,
- évaluation de R en x .

Exemple : calcul de l'arrondi d'une multiplication

En base 2, on veut calculer $\text{RN}(cd)$ sur les entrées $c = 2^p - 1$ et $d = 2^{p-3} + \frac{1}{2}$.

- $x = 2^{p-3} \Rightarrow c = 8x - 1$ et $d = x + \frac{1}{2}$;

Exemple : calcul de l'arrondi d'une multiplication

En base 2, on veut calculer $\text{RN}(cd)$ sur les entrées $c = 2^p - 1$ et $d = 2^{p-3} + \frac{1}{2}$.

- $x = 2^{p-3} \Rightarrow c = 8x - 1$ et $d = x + \frac{1}{2}$;
- $Q(x) = cd = 8x^2 + 3x - \frac{1}{2}$;

Exemple : calcul de l'arrondi d'une multiplication

En base 2, on veut calculer $\text{RN}(cd)$ sur les entrées $c = 2^p - 1$ et $d = 2^{p-3} + \frac{1}{2}$.

- $x = 2^{p-3} \Rightarrow c = 8x - 1$ et $d = x + \frac{1}{2}$;
- $Q(x) = cd = 8x^2 + 3x - \frac{1}{2}$;
- $p_0 = 5$ et $\deg(R) = 2$;
- Points d'évaluation : $x_0 = 2^2$ ($p = 5$), $x_1 = 2^3$ ($p = 6$), $x_2 = 2^4$ ($p = 7$);

Exemple : calcul de l'arrondi d'une multiplication

En base 2, on veut calculer $\text{RN}(cd)$ sur les entrées $c = 2^p - 1$ et $d = 2^{p-3} + \frac{1}{2}$.

- $x = 2^{p-3} \Rightarrow c = 8x - 1$ et $d = x + \frac{1}{2}$;
- $Q(x) = cd = 8x^2 + 3x - \frac{1}{2}$;
- $p_0 = 5$ et $\deg(R) = 2$;
- Points d'évaluation : $x_0 = 2^2$ ($p = 5$), $x_1 = 2^3$ ($p = 6$), $x_2 = 2^4$ ($p = 7$);
- Évaluation :

$$\begin{aligned}\text{RN}_5(Q(2^2)) &= \text{RN}_5(139, 5) = 136 \\ \text{RN}_6(Q(2^3)) &= \text{RN}_6(535, 5) = 528 \\ \text{RN}_7(Q(2^4)) &= \text{RN}_7(2095, 5) = 2080\end{aligned}$$

Exemple : calcul de l'arrondi d'une multiplication

En base 2, on veut calculer $\text{RN}(cd)$ sur les entrées $c = 2^p - 1$ et $d = 2^{p-3} + \frac{1}{2}$.

- $x = 2^{p-3} \Rightarrow c = 8x - 1$ et $d = x + \frac{1}{2}$;
- $Q(x) = cd = 8x^2 + 3x - \frac{1}{2}$;
- $p_0 = 5$ et $\deg(R) = 2$;
- Points d'évaluation : $x_0 = 2^2$ ($p = 5$), $x_1 = 2^3$ ($p = 6$), $x_2 = 2^4$ ($p = 7$);
- Évaluation :

$$\begin{aligned}\text{RN}_5(Q(2^2)) &= \text{RN}_5(139, 5) = 136 \\ \text{RN}_6(Q(2^3)) &= \text{RN}_6(535, 5) = 528 \\ \text{RN}_7(Q(2^4)) &= \text{RN}_7(2095, 5) = 2080\end{aligned}$$

- Interpolation :

$$\begin{aligned}R(X) &= 136 \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + 528 \frac{(X-x_0)(X-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + 2080 \frac{(X-x_0)(X-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= 8X^2 + 2X\end{aligned}$$

Exemple : calcul de l'arrondi d'une multiplication

En base 2, on veut calculer $\text{RN}(cd)$ sur les entrées $c = 2^p - 1$ et $d = 2^{p-3} + \frac{1}{2}$.

- $x = 2^{p-3} \Rightarrow c = 8x - 1$ et $d = x + \frac{1}{2}$;
- $Q(x) = cd = 8x^2 + 3x - \frac{1}{2}$;
- $p_0 = 5$ et $\deg(R) = 2$;
- Points d'évaluation : $x_0 = 2^2$ ($p = 5$), $x_1 = 2^3$ ($p = 6$), $x_2 = 2^4$ ($p = 7$);
- Évaluation :

$$\begin{aligned}\text{RN}_5(Q(2^2)) &= \text{RN}_5(139, 5) = 136 \\ \text{RN}_6(Q(2^3)) &= \text{RN}_6(535, 5) = 528 \\ \text{RN}_7(Q(2^4)) &= \text{RN}_7(2095, 5) = 2080\end{aligned}$$

- Interpolation :

$$\begin{aligned}R(X) &= 136 \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + 528 \frac{(X-x_0)(X-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + 2080 \frac{(X-x_0)(X-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= 8X^2 + 2X\end{aligned}$$

- $\text{RN}(cd) = R(x) = 2^{2p-3} + 2^{p-2}$.

Conclusion

- Implantation des opérations $+$, $-$, \times et FMA en Maple.
- Vérification rapide de nombreux certificats d'optimalité.
- Méthode de calcul alternative : l'évaluation-interpolation.

Conclusion

- Implantation des opérations $+$, $-$, \times et FMA en Maple.
- Vérification rapide de nombreux certificats d'optimalité.
- Méthode de calcul alternative : l'évaluation-interpolation.

Perspectives

- Comparaison des deux approches.
- Implantation des autres modes d'arrondi.
- Ajout de la division.
- Vers une formalisation en Coq.
- Gestion d'une base symbolique.