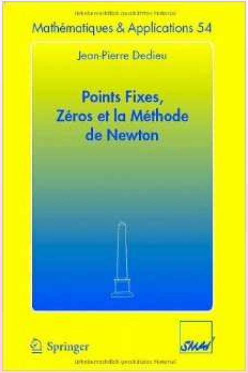
Approximation des racines multiples isolées des systèmes polynomiaux.

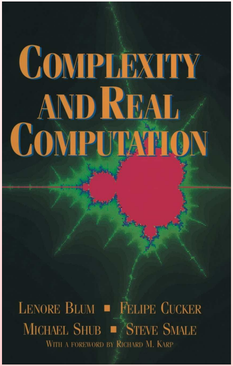
Marc Giusti[1]   Jean-Claude Yakoubsohn[2]

[1] Laboratoire d'Informatique
CNRS-Polytechnique
Palaiseau, France

[2] Institut de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier
Toulouse, France

JNCF 2014 CIRM Luminy





Vidéo :
Cédric Villani, Le fabuleux destin de la méthode de Newton

http://webcast.in2p3.fr/videos-fmjh_2011_le_fabuleux_destin_de_la_methode_de_newton_cedric_villani

$x \in \mathbb{C}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbb{C}[x]^n$,
$degf_i = d_i$, $D = \max d_i \geq 2$.

$$N_f(x) = x - Df(x)^{-1} f(x).$$

Théorème. Récup' du Théorème γ de Schub-Smale

Soit ζ un zéro régulier de f : $f(\zeta) = 0$ et $Df(\zeta)^{-1}$ existe.
Alors pour tout x_0 vérifiant

$$\|x_0 - \zeta\| < \frac{5 - \sqrt{17}}{4 \; \frac{D^2}{2} \max(1, ||f||) \quad (1 + \|\zeta\|^2)^{\frac{D-2}{2}} \quad \|Df(\zeta)^{-1}\|}$$

la suite

$$x_{k+1} = N_f(x_k), k \geq 0,$$

converge quadratiquement vers ζ.

$x \in \mathbb{C}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbb{C}[x]^n$,
$deg f_i = d_i$, $D = \max d_i \geq 2$.

$$\Delta(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{||x||^{d_1 - 1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{||x||^{d_n - 1}} \end{bmatrix}.$$

$$N_f(x) = x - Df(x)^{-1} f(x).$$

Théorème. Récup' du Théorème γ de Schub-Smale

Soit ζ un zéro régulier de f : $f(\zeta) = 0$ et $Df(\zeta)^{-1}$ existe.
Alors pour tout x_0 vérifiant

$$\|x_0 - \zeta\| \leq \frac{\left(\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2\sqrt{2} + 4}\right)\left(\sqrt{2} - 1\right)}{D^{3/2}\, ||f||\, \|\zeta\|\, \|\left(\Delta(\zeta) Df(\zeta)\right)^{-1}\|}$$

la suite

$$x_{k+1} = N_f(x_k), k \geq 0,$$

converge quadratiquement vers ζ.

Cas étudiés.

$x \in \mathbb{C}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \mathbb{C}[x]^m$,

1– Le cas régulier : $Df(x)$ inversible dans une boule.

2– Le cas surjectif : moins d'équations que d'inconnues et $Df(x)$ de rang maximum dans une boule.

3– Le cas injectif : plus d'équations que d'inconnues et $Df(x)$ de rang maximum dans une boule.

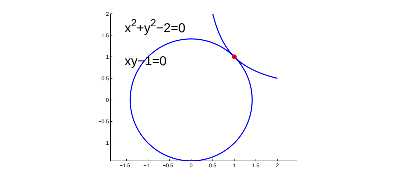
4– Le cas $Df(x)$ de rang constant $r \leq n$: alors $f^{-1}(0)$ est une sous variété analytique de dimension $n - r$.

Dans ces quatre situations l'opérateur suivant

$$N_f(x) = x - Df(x)^\dagger f(x)$$

est bien défini.
Il y a des théorèmes d'existence et de convergence quadratique.

$f^{-1}(0)$ possède une racine multiple isolée.



La multiplicité d'une racine isolée d'un système polynomial est la dimension de l'algèbre locale.

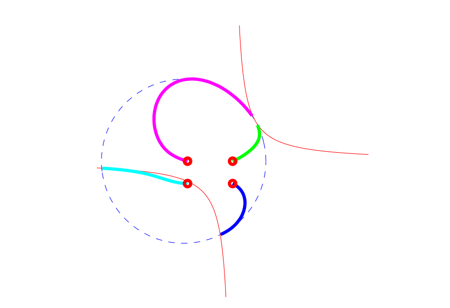
But : Calcul de toutes les racines isolées du système polynomial.

On choisit au hasard un $f_0(x)$ dont on connaît toutes les racines (complexes !) qui sont régulières. On définit l'homotopie

$$h(t,x) = (1-t)f_0(x) + tf(x)$$

Il est classique qu'il existe des courbes $x_k(t)$ régulières pour $t \in [0,1[$ telles que

$$h(t, x_k(t)) = 0.$$



Un exemple.

1– $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

2– un système polynomial $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{C}^m[x]$.

3– ζ une racine multiple isolée de f, i.e. $f(\zeta) = 0$ et $Df(\zeta)$ n'est pas de rang maximum.

La convergence quadratique de la méthode de Newton est perdue au voisinage de ζ. Il se peut également que la méthode de Newton diverge.

Exemple : Osborne et Griewank, 1983. $f(x, y = \begin{bmatrix} x - y^2 \\ 2cy^3 - 2xy \end{bmatrix}$

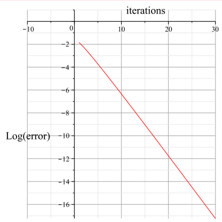


Fig. 1. Convergence linéaire de la suite de Newton avec $x_0 = (0.1, -0.2)$ et $c = 5/32$.

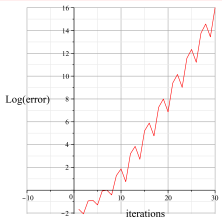


Fig. 2. Divergence de la suite de Newton avec $x_0 = (0.1, -0.2)$ et $c = 29/32$.

Exemple : Osborne et Griewank, 1983. $f(x,y = \begin{bmatrix} x-y^2 \\ 2cy^3-2xy \end{bmatrix}$

Le but est de détérminer un système régulier qui s'annule en ζ à partir du système initial.

Dans cet exemple on remarque que le gradient de $2cy^3-2xy$ est nul en $(0,0)$.
On remplace alors le polynôme $2cy^3-2xy$ par les deux polynômes constituant le gradient :

$$y \quad \text{et} \quad 3\text{cy}^2 - \text{x}.$$

La jacobienne en $(0,0)$ du système déflaté $\begin{bmatrix} x-y^2 \\ 3cy^2-x \\ y \end{bmatrix}$ est égale à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi le système déflaté est régulier en $(0,0)$.

- Macaulay, 1916.
- Emsalem, 1978.

- Mourrain, 1997 et Mourrain, Mantzaflaris, 2011.

- Dayton, Li, Zeng, 2005.
- Leykin, Verschelde, Zhao, 2006 et 2008.

Qu'allons nous faire ?

Avant la déflation

Avant le dénoyautage.

Aprés le dégonflage.

Déflater c'est remplacer une équation $g(x) = 0$ par les n equations $\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1 : n$ si

$$g(\zeta) = 0, \quad \frac{\partial g(\zeta)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1 : n.$$

Soit $f_1 = x^3/3 + y^2 x + x^2 + 2yx + y^2$, $\quad f_2 = x^2 y + x^2 + 2yx + y^2$

La multiplicité $(0,0)$ is 6.

On a

$$\begin{array}{cc|cc} \partial_1 & \partial_2 & \partial_1 & \partial_2 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y & 2yx + 2x + 2y & 2xy + 2x + 2y & x^2 + 2x + 2y \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc||cc|cc} \partial_{11} & \partial_{12} & \partial_{21} & \partial_{22} & \partial_{11} & \partial_{12} & \partial_{11} & \partial_{12} \\ 2x+2 & 2y+2 & 2y+2 & 2x+2 & 2y+2 & 2x+2 & 2x+2 & 2 \end{array}$$

Le système déflaté est $(x^2 + y^2 + 2x + 2y, \quad xy + x + y, \quad x^2 + 2x + 2y)$

Sa matrice jacobienne en $(0,0)$ est $\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & \\ 1 & 1 & , \\ 2 & 2 & \end{array} \right]$.

Le rang en $(0,0)$ de ce système est 1.

Soit $Df(\zeta) = \begin{pmatrix} A(\zeta) & B(\zeta) \\ C(\zeta) & D(\zeta) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rang r

avec $A(\zeta)$ inversible de taille $r \times r$.

Alors ζ est une racine de tous les éléments du complément de Schur

$$S(x) = D(x) - C(x)A(x)^{-1}B(x).$$

Dénoyauter c'est ajouter au système initial les numérateurs des éléments non identiquement nuls de $S(x)$.

Soit $f_1 = x^2 + y^2 + 2x + 2y, \quad f_2 = xy + x + y, \quad f_3 = x^2 + 2x + 2y.$
La multiplicité $(0,0)$ is 6.

On a $J := Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+2 & 2y+2 \\ y+1 & x+1 \\ 2x+2 & 2y+2 \end{bmatrix}$ et $Df(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ est de rang 1.
On ajoute les deux polynômes :

$$numer(J(2..3,2) - J(2..3,1)J(1,1)^{-1}J(1,2)) = \begin{pmatrix} 2x^2 + 4x - 2y \\ 2y \end{pmatrix}$$

Maintenant le rang du système est égal à 2 puisque la matrice jacobienne du nouveau système en $(0,0)$ est $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Dégonfler c'est déflater + dénoyauter

Lire :

Giusti, M., Yakoubsohn, J.-C.,

Multiplicity hunting and approximating multiple roots of polynomials systems,

Contemporary Mathematics Contemporary Mathematics 604, American Mathematical Society, Recent Advances in Real Complexity and Computation, 2013.

Le dégonflage consiste à déterminer, sans ajout de nouvelles variables, la suite de systèmes

$$F_0 = f$$

$$F_k = \text{dénoyauté}(\text{déflaté}(F_{k-1})), \quad k \geq 1.$$

Dans le cas des racines isolées, la longueur de cette suite est finie !

Notations : $[F]_w$, λ et ρ.

$$\begin{aligned}[F]_w &:= \sum_{i\geq 1} \frac{||D^i f(w)||}{i!} t^i \\ &\leq \frac{\lambda t}{1-\rho t}.\end{aligned}$$

Estimation du rayon de la boule de convergence quadratique de la méthode de Newton associé au système dégonflé.

Théorème. Soit m_j l'ordre de la déflation de chaque système F_j.

Soit r_j le rang de la jacobienne du déflaté de F_j, $j = 0 : k-1$.

On note μ le maximum des normes μ_j des sous matrices de rang r_j.

Soient λ_0 et ρ_0 les quantités telles que $[F_0]_w \leq \frac{\lambda_0 t}{1-\rho_0 t}$. Alors

$$\lambda_k \leq (4(\sqrt{2}+1)\mu)^{k-1}(2+\sqrt{2})^{\sum_{j=0}^{k-1} j(m_j+1)-1} \prod_{j=0}^{k-1}(m_j+1)\lambda_0 \rho_0^{k-1+\sum_{j=0}^{k-1} m_j}$$

$$\rho_k \leq (2+\sqrt{2})^{k-1} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{m_j+2}{2}\rho_0, \quad \text{où } [F_k]_w \leq \frac{\lambda_k t}{1-\rho_k t}.$$

Si F_k est régulier en w, le rayon de la boule de convergence quadratique de la méthode de Newton associé au système dégonflé est en $\dfrac{1}{\rho_k}$.

Pour la technologie des séries majorantes, lire :

Giusti, M. and Lecerf, G. and Salvy, B. and Yakoubsohn, J.-C.
On location and approximation of clusters of zeros : Case of embedding dimension one, Foundations of Computational Mathematics, 7, 1, p. 1–58, 2007, Springer.

1– Dégonflage numérique avec Marc Giusti.

2– Analyse numérique d'une méthode de Newton sur le système initial avec Gregorio Malajovich.

Merci de votre attention ...

... en espérant ne pas vous avoir dégonflé !

$$f_i = \sum_{k=1}^{9} x_k + x_i^2 - 2x_i - n + 1, \quad i = 1 : n.$$

$w = (1, \ldots, 1)$ de multiplicité $2^n - 1$ si n est pair.

$$J(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2x_2 - 1 & \ldots & 1 \\ & & & \\ 1 & 1 & \ldots & 2x_n - 1 \end{pmatrix} \qquad J_\zeta = (1)_{i,j}. \text{ Le rang de } J = 1.$$

Le complément de Schur est $\begin{pmatrix} 2x_2 - 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2x_3 - 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 2x_n - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2x_1 - 1}(1, \ldots, 1).$

Le système dégonflé est

$$(f_1, \ldots, f_n, \quad x_1 - 1, \quad (2x_1 - 1)(2x_i - 1) - 1, \quad i = 2 : n)$$