

Computer algebra methods for testing the structural stability of multidimensional systems

Yacine Bouzidi, Alban Quadrat, Fabrice Rouillier
L2S, Supelec
Gif-sur-Yvette, France
Prenom.nom@inria.fr

En théorie des systèmes dynamiques, un système multidimensionnel (ou système n -D) est un système dans lequel l'information se propage dans plus d'une direction indépendante (habituellement, la direction du temps pour les systèmes 1-D classiques). Les systèmes multidimensionnels apparaissent dans l'étude des équations aux dérivées partielles, des systèmes avec retard ou dans le traitement d'images.

Une question fondamentale dans l'étude des systèmes multidimensionnels concerne leur stabilité, cette propriété étant une condition nécessaire à leur bon fonctionnement.

Dans ce travail, on s'intéresse au test de stabilité des systèmes multidimensionnels linéaires et discrets à coefficients invariants dans le temps.

Dans le domaine fréquentiel, un système multidimensionnel est décrit au moyen d'une fonction de transfert qui relie la sortie du système à son entrée. Dans le cas des systèmes qui nous intéressent, celle-ci est donnée sous la forme

$$G(z_1, \dots, z_n) = \frac{N(z_1, \dots, z_n)}{D(z_1, \dots, z_n)}, \quad (1)$$

avec N et D des polynômes dans $\mathbb{R}[z_1, \dots, z_n]$.

Dans la description à base de fonction de transfert, un système est dit *structurellement stable* si et seulement si le dénominateur de la fonction de transfert, $D(z_1, \dots, z_n)$, est dépourvu de zéros complexes dans le polydisque unité $\mathbb{D}^n := \prod_{k=1}^n \{z_k \in \mathbb{C} \mid |z_k| \leq 1\}$ ou, en d'autres termes :

$$D(z_1, \dots, z_n) \neq 0 \text{ for } |z_1| \leq 1, \dots, |z_n| \leq 1. \quad (2)$$

Par conséquent, tester qu'un système est structurellement stable revient à tester la condition 2. La simple formulation de cette condition contraste cependant avec la difficulté de mettre au point des implantations efficaces pour la tester. Les quelques algorithmes proposés dans la littérature [1, 2] sont soit inefficaces, soit ils se contentent d'en tester une formulation plus forte (Une condition de stabilité suffisante mais non nécessaire).

Dans cette présentation, on propose un nouvel algorithme certifié et efficace pour tester la stabilité structurelle d'un système multidimensionnel. Plus précisément, partant de la condition 2, on montre dans un premier temps que le problème de tester si une hypersurface a des zéros dans le polydisque, est équivalent à celui de décider si un ensemble algébrique à des zéros réels. Ceci permet d'obtenir de nouvelles conditions que l'on teste ensuite à l'aide d'algorithmes classiques de recherche de zéros réels d'ensembles algébriques.

Notre algorithme a été implanté sous la forme d'une routine `Maple`. Celle-ci prend en entrée un polynôme $D(z_1, \dots, z_n)$ et renvoie vrai si celui-ci n'a pas de zéros à l'intérieur du polydisque et faux sinon. Les nombreux tests et comparaisons effectués ont permis de valider notre approche.

Bibliographie

- [1] I. SERBAN AND M. NAJIM, *Multidimensional systems : Bibo stability test based on functional schur coefficients*, Signal Processing, IEEE Transactions on, 55(11) :5277–5285, 2007.
- [2] B. DUMITRESCU, *Stability test of multidimensional discrete-time systems via sum-of-squares decomposition*, Circuits and Systems I : Regular Papers, IEEE Transactions on, 53(4) :928–936, April 2006.