Un algorithme déterministe pour calculer une racine approchée d'un système polynomial en complexité moyenne polynomiale

P. Lairez

TU Berlin, Allemagne

pierre@lairez.fr

Une racine d'un système d'équations polynomiales peut être calculée numériquement par la méthode homotopique : pour résoudre un système f , on part d'un système g dont on connaît une racine η , et on le déforme progressivement jusqu'à arriver à f tout en faisant suivre la racine η à l'aide d'itérations de Newton. La complexité de cette méthode est bien comprise en terme du conditionnement des systèmes polynomiaux que l'on rencontre le long du chemin de déformation, mais il est difficile de trouver *a priori* un chemin de déformation efficace.

Shub et Smale [4, p. ex.] ont étudié la complexité *en moyenne* des méthodes homotopiques, où l'on suppose que le système à résoudre est uniformément distribué dans un certain espace. Beltrán et Pardo [1] ont décrit un algorithme probabiliste pour calculer une racine approchée d'un système polynomial dont la complexité est polynomiale par rapport à la taille de l'entrée *en moyenne*, à la fois par rapport à l'entrée de l'algorithme et sa source d'aléa. Bürgisser et Cucker [2] ont eux décrit un algorithme déterministe de complexité $N^{\mathcal{O}(\log \log N)}$, où N est la taille de l'entrée. Tous ces travaux utilisent le modèle BSS : une machine capable d'opérer de manière exacte sur des nombres réels et dotée d'une mémoire à accès direct dont les registres sont capables de stocker des nombres réels à précision infinie.

L'objet de ce travail [3] est de montrer comment supprimer l'aléa dans l'algorithme de Beltrán et Pardo, donnant ainsi un algorithme déterministe de complexité moyenne polynomiale. L'idée principale consiste à exploiter la précision infinie qui nous est donnée dans le modèle BSS : en séparant les bits de poids forts et les bits de poids faible, on décompose le système donné

en entrée et on obtient, d'un côté, une approximation de ce système, et de l'autre, des bits aléatoires qu'on peut utiliser pour pourvoir l'algorithme de Beltrán et Pardo.

Références

- [1] Carlos Beltrán and Luis Miguel Pardo. Fast linear homotopy to find approximate zeros of polynomial systems. *Found. Comput. Math.*, 11(1) :95–129, 2011.
- [2] Peter Bürgisser and Felipe Cucker. On a problem posed by Steve Smale. *Ann. of Math. (2)*, 174(3) :1785–1836, 2011.
- [3] Pierre Lairesz. A deterministic algorithm to compute approximate roots of polynomial systems in polynomial average time, 2015.
- [4] Michael Shub and Steve Smale. Complexity of Bezout's theorem. V. Polynomial time. *Theoret. Comput. Sci.*, 133(1) :141–164, 1994. Selected papers of the Workshop on Continuous Algorithms and Complexity (Barcelona, 1993).