Formules de quadrature, extension plate et optimization convexe

B. Mourrain
Inria Méditerranée
2004 route des Lucioles
06902 Sophia Antipolis
bernard.mourrain@inria.fr

Les formules de quadrature jouent un rôle important en calcul scientifique et ont été étudiées depuis de nombreuses années par des mathématiciens célèbres : Gauss, Legendre, Chebyshev, Lobatto, Radau, Radon [3], ... Elles sont aussi reliées à des développements très intéressants autour des polynômes orthogonaux.

L'objectif de ces formules est de calculer une bonne approximation d'intégrales de fonctions. Plus précisément, étant donné un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction w positive sur Ω, nous voulons remplacer le calcul de

$$I[f] = \int_{\Omega} w(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

par une formule plus simple à évaluer, de la forme

$$\langle \sigma | f \rangle = \sum_{j=1}^{r} w_j \, f(\zeta_j) \tag{1}$$

où $\zeta_j \in \mathbb{R}^n$ et $w_j \in \mathbb{R}$ sont indépendants de la fonction f. Ils sont choisis de telle manière que

$$\forall f \in V, \ \langle \sigma | f \rangle = I[f],$$

V étant un espace vectoriel de fonctions de dimension finie. Typiquement, V est l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq d$. Ceci permet par exemple de contrôler l'erreur entre $\langle \sigma | f \rangle$ et $I[f]$, par le reste d'un développement de Taylor de la fonction.

De nombreuses méthodes ont été développées au cours du temps [4, 2] pour traiter les cas de petits degrés en petite dimension, avec symétrie, sur des domaines standards, ...Nous présentons une approche algorithmique qui permet de traiter le problème d'un domaine général en dimension quelconque.

Pour cela, nous transformons le problème de quadrature en un problème de complétion de matrices de Hankel tronquées. Nous analysons les propriétés algébriques liées aux extensions plates de matrices de Hankel, et montrons comment retrouver les points de quadrature et les poids à partir de ces matrices. Nous décrivons ensuite un algorithme de vérification des propriétés d'extensions plates qui permet aussi de calculer la formule de quadrature. Pour construire une formule de quadrature avec un nombre minimal de points, nous proposons une hiérarchie de problèmes d'optimization convexe minimisant la norme nucléaire des matrices de Hankel associées. Nous montrons que pour un ordre assez élevé de la relaxation, une solution du problème d'optimisation convexe fournit une formule de quadrature. Nous illustrons l'approche sur quelques exemples conduisant à de nouvelles formules de quadratures avec un nombre minimal de points.

Pour plus de détails sur ce travail en commun avec M. Abril Bucero, C. Bajaj, voir [1].

Bibliographie

[1] M. Abril Bucero, C. Bajaj, and B. Mourrain. On the construction of general cubature formula by flat extensions. To appear in *Linear Algebra and Applications*. `hal.inria.fr/hal-01158099`, 2015.

[2] R. Cools. Constructing cubature formulae : the science behind the art. *Acta numerica*, 6 :1–54, 1997.

[3] J. Radon. Zur mechanischen kubatur. *(German) Monatsh. Math*, 52 :286–300, 1948.

[4] A. H. Stroud. Quadrature methods for functions of more than one variable. *Ann. New York Acad. Sci.*, 86 :776–791, 1960.