A short survey on Kantorovich-like theorems for Newton's method

G. Lecerf, **J. Saadé**
Laboratoire d'informatique de l'École polytechnique
LIX, UMR 7161 CNRS
Campus de l'École polytechnique
1, rue Honoré d'Estienne d'Orves
Bâtiment Alan Turing, CS35003
91120 Palaiseau, France
gregoire.lecerf@math.cnrs.fr,saade@lix.polytechnique.fr

Au cours des dernières années, l'opérateur de Newton est devenu omniprésent dans les calculs numérique et symbolique. Sur des fonctions spécifiques comme les polynômes de degré deux dans $\mathbb{R}$, le comportement de l'opérateur de Newton est simple. Mais en général, il est difficile de savoir si une suite de Newton partant d'une valeur initiale va converger ou non vers un zéro. Plus précisement, soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de classe C^1, c'est à dire différentiable et ϕ' continue. Dans la théorie, on sait bien que la suite de Newton $(r_k)_{k\geq 0}$ définie par $r_{k+1} = r_k - \frac{\phi(r_k)}{\phi'(r_k)}$ converge quadratiquement si la valeur initiale r_0 est suffisamment proche d'un zéro simple r_- de ϕ, c'est à dire $\phi'(r_-) \neq 0$. Mais en pratique cette information de distance n'est pas suffisante, et on voudrait savoir ce qu'on entend par "suffisamment proche".

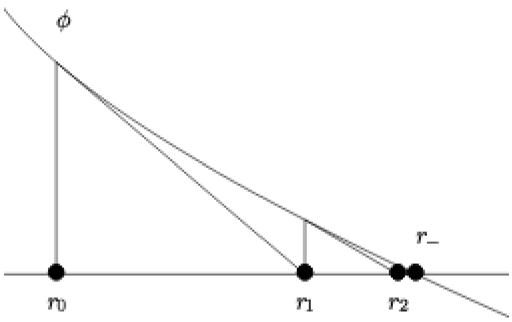

FIGURE 1 – Graphe de ϕ et les premiers itérations de Newton

Dans la Figure 1, on présente le comportement de la suite de Newton au voisinage d'un zéro simple r_-. En effet, c'est un resultat classique si ϕ est décroissante et convexe dans $[r_0, R]$, et $\phi(r_0) > 0$, et $\phi(R) < 0$, alors il existe un unique zéro r_- de ϕ dans $[r_0, R]$, et la suite de Newton $(r_k)_{k\geq 0}$ converge vers r_-. Dans un voisinage de r_-, cette convergence est quadratique.

Généralement, pour une fonction complexe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, l'ensemble des valeurs initiales menant à une suite qui converge vers un zéro de f forme une *fractale de Newton*, c'est à dire un ensemble de Julia de la fonction méromorphe $z \mapsto z - \frac{f(z)}{f'(z)}$. En pratique, il est important de donner des critères simples de convergence. Si le critère est satisfait alors on aura convergence dans le voisinage d'un unique zéro ; sinon, on ne peut rien dire. On trouve beaucoup de critères dans la littérature, mais il est difficile de choisir le critère le plus efficace parce que l'on doit faire un compromis entre la vitesse et la précision.

Notre présentation commence par une extension générale du critère de Kantorovich [1]. Après, on montre comment d'autres critères connus [2, 3] se d 'eduisent de ce cas général ; puis on présente une discusion rapide sur la façon de former des critères offrant des compromis alternatifs [4, 5]. Des notes historiques sont incluses à la fin.

Bibliographie

[1] L.V. Kantorovich, *Functional analysis and applied mathematics*, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) (1948) pp.89–185

[2] S. Smale, *Newton's method estimates from data at one point*, In The merging of disciplines : new directions in pure, applied, and computational mathematics (1985) pp.185–196

[3] W. B. Gragg and R. A. Tapia, *Optimal error bounds for the Newton-Kantorovich theorem*, SIAM J. Numer. Anal.,(1974) pp.10–13

[4] Z. Da Huang, *A note on the Kantorovich theorem for Newton iteration*, J. Comput. Appl. Math., (1993) pp.211–217

[5] J.A. Ezquerro, D.González, and M.Á. Hernández, *On the local convergence of Newton's method under generalized conditions of Kantorovich*, Appl. Math. Lett., (2013) pp.566–570