Classification algébrique associée à l'optimisation de contraste pour l'IRM

B. Bonnard[1], J.-C. Faugère[2], A. Jacquemard[2],
M. Safey El Din[2], **T. Verron**[2]
[1] Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR CNRS 5584
Dijon, France
[2] Équipe PolSys, LIP6, UPMC Sorbonne Universités, INRIA, CNRS
Paris, France
`bernard.bonnard@u-bourgogne.fr`,
`jean-charles.faugere@inria.fr`,
`alain.jacquemard@lip6.fr`, `mohab.safey@lip6.fr`,
`thibaut.verron@lip6.fr`

L'imagerie à résonance magnétique nucléaire (IRMN ou IRM) est un procédé d'imagerie médicale reposant sur la réaction des substances biologiques à l'application d'un champ magnétique. Le contraste de l'image obtenue dépend de plusieurs paramètres régulant cette réaction. Lorsque le contraste est insuffisant, cela signifie que les deux milieux que l'on cherche à distinguer ont des paramètres trop proches. Il est possible de remédier à ce problème en altérant ces paramètres par injection au patient de produits de contraste, mais avec le risque d'effets médicaux indésirables. Nous privilégions une optimisation par l'étude fondamentale d'un modèle physique.

En pratique, la recherche de paramètres donnant un bon contraste est réalisée par des raisonnements qualitatifs. L'influence des paramètres sur le contraste est régie par les équations de Bloch, dont l'inversion permettrait, de manière systématique, de caractériser les paramètres optimisant le contraste.

Dans [3], les auteurs exposent une technique, utilisant la théorie du contrôle optimal, permettant d'obtenir une image dont le contraste est proche de la limite théorique.

Cet algorithme numérique décrit des trajectoires dans l'espace des paramètres. Dans [1], les auteurs s'intéressent aux fondations mathématiques de cette méthode : les points où ces trajectoires peuvent diverger peuvent être décrits comme le lieu singulier d'une variété algébrique. Les auteurs décrivent formellement ce lieu singulier dans plusieurs cas particuliers, à l'aide de bases de Gröbner ([2]).

Dans ce travail, nous cherchons à décrire ce lieu singulier dans le cas général. Plus précisément, on s'intéresse à un sous-ensemble de ces équations, qui s'écrit en termes de singularités d'un déterminant : on considère la matrice M, de taille 4×4, à les coefficients dans $\mathbb{R}[\gamma_1, \gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_2, y_1, y_2, z_1, z_2]$, définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -\Gamma_1 y_1 & -z_1 - 1 & -\Gamma_1 + (\gamma_1 - \Gamma_1)\, z_1 & (2, \gamma_1 - 2\,\Gamma_1)\, y_1 \\ -\gamma_1 z_1 & y_1 & (\gamma_1 - \Gamma_1)\, y_1 & 2\,\Gamma_1 - \gamma_1 - (2\,\gamma_1 - 2\,\Gamma_1)\, z_1 \\ -\Gamma_2 y_2 & -z_2 - 1 & -\Gamma_2 + (\gamma_2 - \Gamma_2)\, z_2 & (2\,\gamma_2 - 2\,\Gamma_2)\, y_2 \\ -\gamma_2 z_2 & y_2 & (\gamma_2 - \Gamma_2)\, y_2 & 2\,\Gamma_2 - \gamma_2 - (2\,\gamma_2 - 2\,\Gamma_2)\, z_2 \end{pmatrix}$$

et on note $D(\gamma_1, \gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$ son déterminant. On cherche les valeurs des paramètres (Γ_i, γ_i) au-dessus desquelles existe un point où le déterminant de M est singulier en (y_i, z_i). En théorie, résoudre ce problème revient à calculer une seule base de Gröbner éliminant z_i, y_i du système ci-dessus, mais il s'avère que ce calcul direct est impraticable.

Dans cet exposé, on montrera comment la structure déterminantielle du système nous permet de diriger les calculs : en décomposant ce système par étapes, on parvient à identifier et caractériser différentes composantes de l'espace des paramètres pour lesquels le déterminant D peut être singulier.

Bibliographie

[1] Bernard Bonnard, Monique Chyba, Alain Jacquemard, and John Marriott. Algebraic geometric classification of the singular flow in the contrast imaging problem in nuclear magnetic resonance. *Mathematical Control and Related Fields*, 3(4) :397–432, 2013.

[2] Bruno Buchberger. A theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms. *ACM SIGSAM Bulletin*, 10(3) :19–29, 1976.

[3] Marc Lapert, Yun Zhang, Martin A. Janich, Steffen J. Glaser, and Dominique Sugny. Exploring the physical limits of saturation contrast in magnetic resonance imaging. *Scientific Reports*, 2(589), 2012.