La borne de Jacobi
Déterminant tropical, ordre et formes normales des systèmes d'EDO

François Ollivier   LIX, UMR CNRS – École polytechnique n° 7161

Voyage exotique de Königsberg à Rome via Berlin…

Travaux de Carl Gustav Jacob (Jacques Simon) Jacobi (1804-1851) entre 1836 et 1843.

Le calcul du dernier multiplicateur… Nécessite de connaître une forme normale…

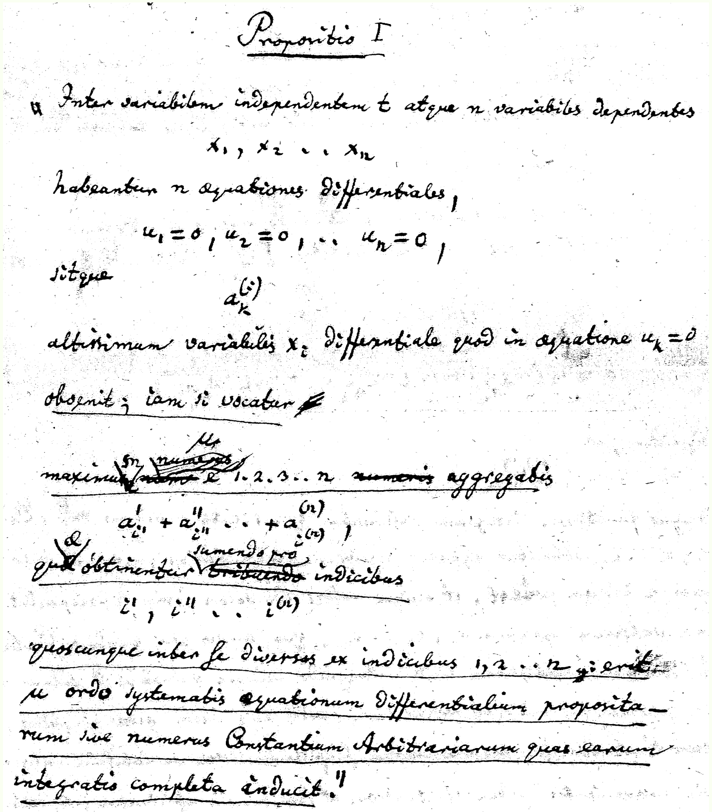
Pour certains systèmes, comme les systèmes isopérimétriques, il faut dériver ℓ_i fois l'équation P_i pour la calculer…

L'ordre du système est majoré par un déterminant tropical.

La méthode de Jacobi le calcule en temps polynomial ($O(n^{3 \text{ ou } 4})$).

L'algorithme produit aussi les valeurs minimales des ℓ_i et l'ordre est atteint si le déterminant tronqué est non nul.

Manuscripts posthumes…



Proposition I.

« Soient

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \ldots,\ u_n = 0,$$

n équations différentielles entre la variable indépendante t et les variables dépendentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et soit

$$a_k^{(i)}$$

l'ordre maximal de la variable x_i dans l'équation $u_k = 0$. *Alors, si on appelle*

$$\mu$$

le maximum des sommes

$$a'_{(i')} + a''_{(i'')} + \cdots + a^{(n)}_{i^{(n)}},$$

que l'on obtient pour tous les différents indices $i', i'', \ldots, i^{(n)}$ *choisis parmi les indices* $1, 2, \ldots, n$ *;* μ *sera l'ordre du système d'équations différentielles, ou aussi le nombre de constantes arbitraires que son intégration complète fait apparaître.* »

Le principe du dernier multiplicateur

Pour $\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1(x_1,x_2)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{a_2(x_1,x_2)}$, le multiplicateur d'Euler satisfait $\mathrm{d}(\mu(f_1\mathrm{d}x_1 + f_2\mathrm{d}x_2)) = 0$: le calcul d'une intégrale première se ramène à une intégration.

Pour un système $\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1(x)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{a_n(x)}$, soient ω_i, $1 \leq i < n$, $n-1$ intégrales premières, toute intégrale première ω est solution de

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\omega}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\omega_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} D_i \frac{\partial}{\partial x_i}\omega = 0.$$

Le dernier multiplicateur μ est défini par $\mu \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} D_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

À un système d'EDO $x_i' = f_i(x), \quad 1 \leq i \leq n$, complété par $t' = 1$ on associe le système de Lagrange $\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(x)} = \frac{\mathrm{d}t}{1}$.

Le dernier multiplicateur est donné par la formule $\mu = e^{-\int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\mathrm{d}t}$.

C'est une sorte de Wrońskien : $\mu_2 = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right| \mu$.

Il faut connaître…

— $n-1$ intégrales premières ;

On peut leur faire faire des petits grâce aux crochets de Poisson.

— une forme normale du système.

Facile pour les systèmes provenant d'un lagrangien ou d'un hamiltonien.

Problème des systèmes isopérimétriques

Les systèmes isopérimétriques

On veut imposer que l'intégrale $\int U(x(t))\mathrm{d}t$ soit extrémale. Ceci implique

$$\begin{array}{lcll} P_1(x) & := & \frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x'_1}}{\mathrm{d}t} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x''_1}}{\mathrm{d}t^2} - \text{etc.}, & = 0 \\ P_2(x) & := & \frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x'_2}}{\mathrm{d}t} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x''_2}}{\mathrm{d}t^2} - \text{etc.}, & = 0 \\ P_3(x) & := & \frac{\partial U}{\partial x_3} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x'_3}}{\mathrm{d}t} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x''_3}}{\mathrm{d}t^2} - \text{etc.} & = 0 \quad \text{etc.} \end{array}$$

Si $\mathrm{ord}_{x_i} U = e_i$, alors $\mathrm{ord}_{x_j} P_i \leq e_i + e_j$.
En supposant que $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n$, il faut dériver P_i $e_n - e_i$ fois pour calculer une forme normale, si $\left|\frac{\partial P_i}{\partial x_j^{(e_i+e_j)}}\right| = \left|\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^{(e_i)} \partial x_j^{(e_j)}}\right| \neq 0$.

Si les mineurs principaux de $\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j^{(e_i+e_j)}}\right)$ sont non nuls,

– de $\partial P_1/\partial x_{1^{e_1}} \neq 0$, on déduit $x_1^{(2e_1)} = f_1(x)$.

– de $\begin{vmatrix} \partial P_1^{(e_2-e_1)}/\partial x_1^{(e_1+e_2)} & \partial P_1^{(e_2-e_1)}/\partial x_2^{(2e_2)} \\ \partial P_2/\partial x_1^{(e_1+e_2)} & \partial P_2/\partial x_2^{(2e_2)} \end{vmatrix} \neq 0$ on déduit $x_2^{(2e_2)} = f_2(x)$. etc.

$\mapsto$ Intuitions pour traiter le cas général…

Si le déterminant $\left|\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j^{(e_i+e_j)}}\right|$ *est non nul :*

— L'ordre du système est $2\sum_{i=1}^{n} e_i = |A|_{\odot}$, où $a_{i,j} := \mathrm{ord}_{x_j} P_i$.
Déterminant tropical.

— Pour calculer une forme normale, il suffit de dériver P_i au plus $\lambda_i = (\max_{i=1}^{n} e_i) - e_i$.

— $(a_{i,j} + \lambda_i)$ est un *canon* : il existe une permutation σ telle que $a_{\sigma(i)}$ soit maximal dans sa colonne ($\Longleftrightarrow \quad a_{i,j} = e_i + e_j$).
— e_i, e_i est une *couverture minimale* (Egerváry). ($a_{i,j} \leq \mu_i + \nu_j$ avec $\sum_{i=1}^{n}(\mu_i + \nu_i)$ minimale.)

Traduisons en algèbre différentielle

$\mathcal{F}$ corps différentiel de caractéristique 0 (Corps commutatif $+$ existence d'une dérivation $(a+b)' = a' + b'$, $(ab)' = a'b + ab'$).

$\mathcal{F}\{x_1, \ldots, x_n\}$, anneau des polynômes différentiels en x $=$ anneau des polynômes en les dérivées $x_i^{(k)}$ avec la dérivation qui va bien.

Idéal différentiel $[P]$ $=$ idéal $+$ stable par dérivation. $\{P\} := \sqrt{[P]}$

Ordre admissible $v < v'$, $v_1 < v_2 \Longrightarrow v_1' < v_2'$.

Ensemble charactéristique de I. $\mathcal{A}$, $A^{(k)}$ est un ensemble caractéristique (partiellement réduit) de I. Les éléments de I sont (pseudo-)réduits à 0 par $\mathcal{A}$ et ses dérivées.

$P = I_P v_P^{d_{\max}} + \cdots$, où v_P est la dérivée maximale de P, I_P l'initial de P.

Séparant : $S_P := \partial P / \partial v_P$.

Un peu plus de combinatoire...

Soit $P_i \in \mathcal{F}\{x_1, \ldots, x_n\}$, $0 \leq i \leq n$, A_P la matrice des ordres de P, $a_{i,j} := \mathrm{ord}_{x_j} P_i$, $\mathcal{O}_P := |a_{i,j}|_{\odot}$, le nombre de Jacobi de P, ℓ_i un canon de A.

Si P_i ne dépend pas de x_j on peut poser $\mathrm{ord}_{x_j} P_i := 0$ (nombre de Jacobi large) ou $\mathrm{ord}_{x_j} P_i := -\infty$ (nombre de Jacobi strict). Ritt 1935.

On peut associer à ℓ une couverture minimale de A : $L := \max_{i=1}^n \ell_i$, $\mu_i := L - \ell_i$, $\nu_j := \max_{i=1}^n a_{i,j} - \mu_i$.

(On peut aussi à toute couverture minimale μ, ν associer un canon $\ell_i := (\max_{i=1}^n \mu_i) - \mu_i$.)

Théorème. (Jacobi c. 1840) — Si ℓ et ℓ' sont deux canons, $\min(\ell_i, \ell'_i)$ est un canon.
Il existe un unique canon minimal λ, avec $\lambda_i \geq 0$.
Il existe une permutation σ telle que $\mathcal{O} = \sum_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$

Théorème. (Egerváry 1931) — Si μ, ν est un canon minimal de A, alors $\mathcal{O} = \sum_{i=1}^n (\mu_i + \nu_i)$ et il existe σ tq $a_{i,\sigma(i)} := \mu_i + \nu_{\sigma(i)}$.

On note $\nabla_P := \left|\frac{\partial P_i}{\partial x_i^{(\mu_i+\nu_j)}}\right|$ le déterminant du système P. (*Determinans mutilatum, sive mancum* : Jacobi ne retient dans $\left|\frac{\partial P_i}{\partial x_i^{(a_{i,j})}}\right|$ que les produits correspondant à des sommes maximales.)

THÉORÈME i) L'idéal $[P] : \nabla_P^\infty$ $(= [P, u\nabla_P - 1] \cap \mathcal{F}\{x\}$ est radical.
ii) On peut calculer une représentation caractéristique $[P] : \nabla_P^\infty = \cap_{h=1}^r R_h$ avec des ensembles caractéristiques $\mathcal{A}_h$ tels que $\mathcal{A}_h \subset [P_i^{(k)} | 0 \le i \le n,\ 0 \le h \le \ell_i]$, pour un ordre tel que $x_j^{(k)} < x_{j'}^{(k')}$ si $k - \nu_j < k' - \nu_{j'}$.

Généralise Boulier, Lazard, O. et Petitot (1997–2009) (et Jacobi qui ne considérait que le canon minimal et ne se souciait pas de la radicalité des idéaux.)

$\{P\} = \cap_{h=1}^{r} \mathcal{P}_h$, avec $\mathcal{P}_h$ premier. On note $\mathcal{G}_h$ l'extension de corps différentiel associée à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{M}_h$ le module $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{F}\{x\}} \Omega_{\mathcal{F}\{x\}/\mathcal{F}}$. On dit que $\mathcal{P}_h$ est quasi-regulière si $\mathrm{d}\mathcal{P} = (\mathrm{d}P_i^{(k)} | 1 \le i \le n,\ k \in \mathbf{N})$ est un sous $\mathcal{G}_h[\delta]-$module$\mathcal{M}_h$ libre de $\mathcal{M}_h$ engendré par $\mathrm{d}P$.

En clair, le « système linéarisé » $\mathrm{d}P$ se « comporte comme » le système non linéaire P : même ordre, et plus généralement si $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique de $\mathcal{P}$, $\mathrm{d}\mathcal{A}$ est une base standard de $\mathcal{M}_h$. Johnson 1968, 1969, 1978 (Conjecture de Janet).

Théorème (Jacobi à l'algèbre près) — Si $\mathcal{P}_h$ est quasi-régulière, alors $\mathrm{ord}\mathcal{P}_h = \mathcal{O}$, avec égalité ssi $\nabla \notin \mathcal{P}_h$.

Preuve

— Il suffit de le montrer pour un système linéaire (quasi-régularité).

— On se ramène à un système à coefficients constants.
La dérivation n'agit pas sur les coefficient des « termes de tête » ($x_i^{(a_{i,j})}$ avec $a_{i,j} = \mu_i + \nu_j$). Si $\nabla \in \mathcal{P}_h$, les termes de tête d'un $\mathrm{d}P_i$ sont tués, on se ramène à un système de nombre de Jacobi inférieur pour lequel le nombre de Jacobi sera strictement inférieur.

— $\mathrm{d}P_i = \sum_{j=1}^{n} Q_{i,j}(\delta)\mathrm{d}x_j$, avec $\deg Q_{i,j} = a_{i,j}$. L'ordre est le nombre de solution indépendantes qui est $\deg |Q_{i,j}| = |A|_{\odot}$.

Postérité

Chrystal 1895. Cas linéaire à coefficients constants.

Jordan 1883. Heuristiques à base d'éliminations successives, hypothèses de généricité non explicitées.

Ritt 1935. Cas linéaire. $+\ 2$ équations.

Volevich 1960. Cas linéaire (opérateurs différentiels).

Kondratieva, Mikhalev et Pankratiev 1982. (Johnson)

F.O. Sadik 2006. Diffiétés. ∇.

Shaleninov 1990. Réduction la plus courte

Pryce 2001. Réduction la plus courte.

Problème ouvert

Lien avec la conjecture dimensionnelle :
p équations $\mapsto$ codimension différentielle au plus p.

Cohn 1983. Conjecture de Jacobi implique conjecture dimensionnelle.

Valable uniquement pour des systèmes.

L'algorithme

Processus préparatoire : un maximum (dans sa colonne) dans chaque ligne.
$\mapsto$ Déjà au moins 2 maxima transversaux.
À chaque étape : un ensemble de maxima transversaux étoilés.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{\quad * \quad \ddots \quad * \quad}}^{\textit{gauche}} & \overbrace{\hphantom{\quad * \quad \ddots \quad * \quad}}^{\textit{droite}} \end{array} \\
\begin{array}{r} \textit{haut} \left\{ \vphantom{\begin{array}{c} * \\ \ddots \\ * \end{array}} \right. \\ \textit{bas} \left\{ \vphantom{\begin{array}{c} * \\ \ddots \\ * \end{array}} \right. \end{array} &
\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{array} & \phantom{\begin{array}{ccc} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{array}} \\ \hline \phantom{\begin{array}{c} * \\ \ddots \\ * \end{array}} & \end{array} \right)
\end{array}$$

Chemin de la ligne i à la ligne i' : $a^*_{i,i} = a_{i',i}$. Clôture réflexive transitive de la relation « chemin ».

Première classe : les lignes hautes qui ont un maximum droit et celles vers lesquelles il y a un chemin depuis ces dernières.

Troisième classe : les lignes du bas et celles d'où l'on peut atteindre une ligne du bas par un chemin.

Deuxième classe : le reste.

S'il y a un maximum inférieur droit, on l'étoile.
S'il y a une ligne dans la première et la troisième classe :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
a^*_{i_0,i_0} & \cdots & & & & \boldsymbol{a_{i_0,\beta}} \\
\| & & & & & \\
\boldsymbol{a_{i_1,i_0}} & \cdots & a^*_{i_1,i_1} & & & \\
 & & \| & & & \\
 & & \boldsymbol{a_{i_2,i_1}} & \ddots & & \\
 & & & \vdots & & \\
 & & & \ddots & a^*_{i_{p-1},i_{p-1}} & \\
\hline
 & & & & \| & \\
 & & & & \boldsymbol{a_{i_p,i_{p-1}}} & \\
 & & & & &
\end{array}\right)$$

Sinon, on augmente toute la troisième classe de la plus petite valeur telle que : il apparaît un maximum droit ; une série passe de la seconde ou la première classe à la troisième.

Postérité

$\emptyset$ ou presque...

Problème des mariages

Frobenius 1912.

Denés Kőnig, Jenő Egeváry 1931.

Problème des affectation *ab* 1944.

Von Neumann affirme l'existence d'un algorithme polynomial...*et al.*

Kuhn 1955. Méthode hongroise

Cohn 1983. Redécouvre la contribution de Jacobi au problème des affectations. Passe inaperçu.

F.O. Traduction *ab* janvier 2003 (au CIRM !). Contact avec Kuhn fin 2005.

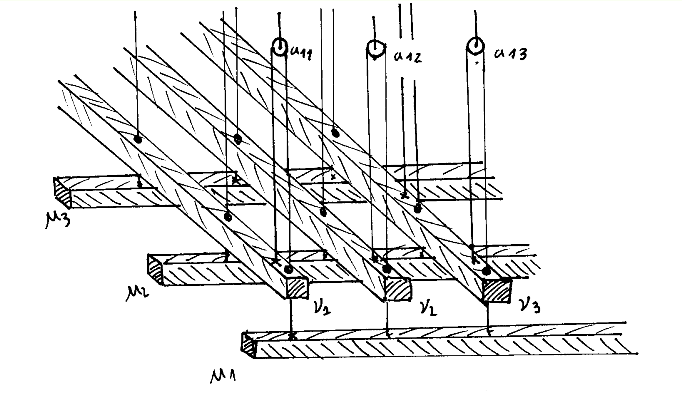
Jacobi et le plus court chemin

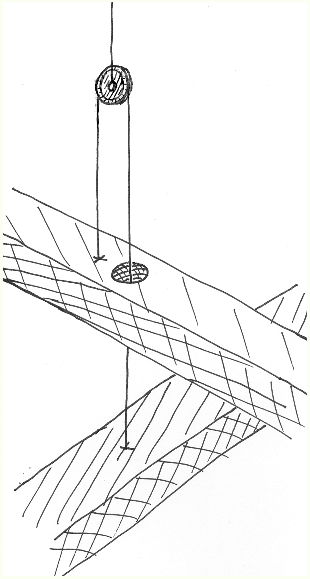
Premier problème : calculer le canon minimal connaissant un canon quelconque. $O(n^3)$ ou $O(n^2 \ln(n))$.

Algorithme de Dijkstra 1959.

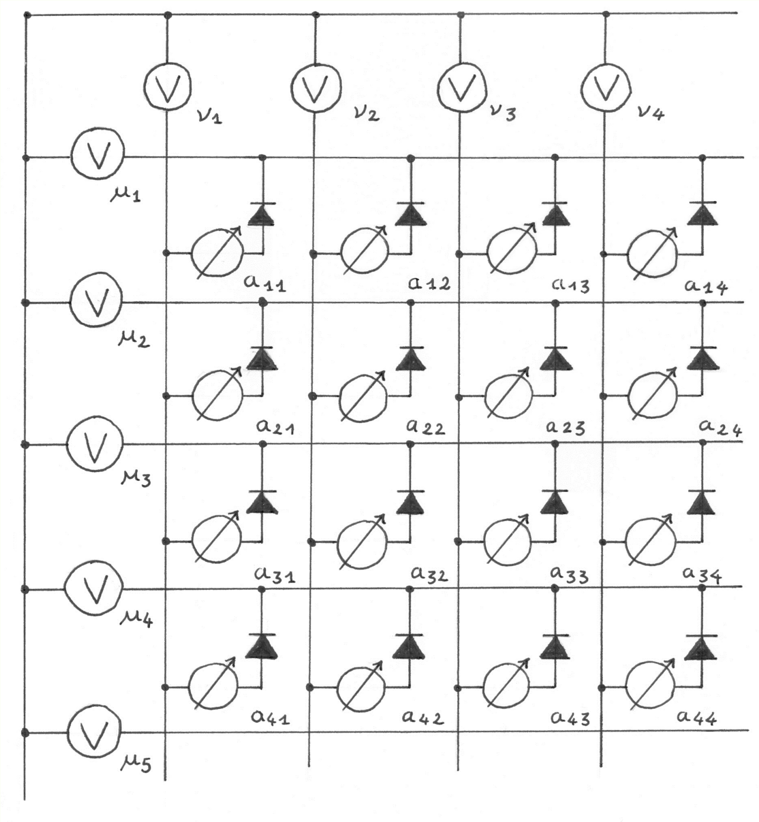
Premier problème : calculer le canon minimal connaissant les éléments d'une somme maximale. $O(n^3)$. Floyd, Warshall 1962.

Machine mécanique



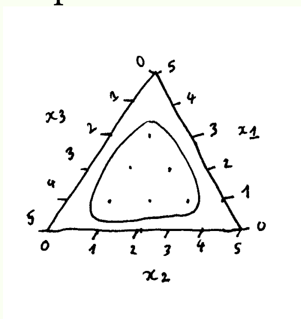


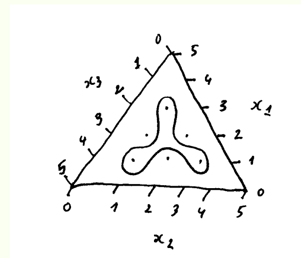
Machine électrique

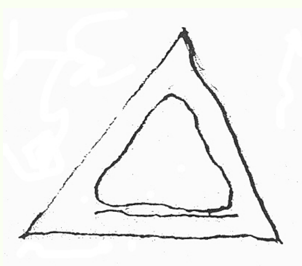


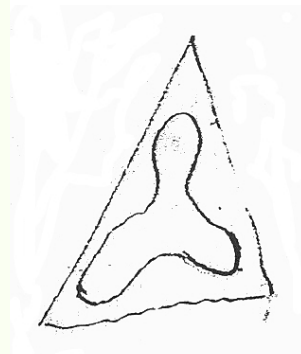
Dessins mystérieux

Jacobi explique comment trouver toute les formes normales d'un système de deux équations. Pour un ordre r, tous les sous-ensemble de $\{(a,b)|a+b=r\}$ sont possibles. Pas pour $n>2$.









Citations

Rien de nouveau sous le soleil
L'Ecclésiaste

La mélodie est sortie du Purgatoire
I. L. Peretz

Merci de votre attention

Un grand merci aux organisateurs !