Sur la précision asymptotique des systèmes (min, +) linéaires continus

J.-L. Boimond, S. Lahaye

LISA EA 4094 - Université d'Angers

MSR Lille, 16-18 Novembre 2011

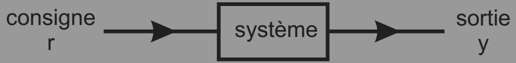
Le papier décrit une méthode de synthèse de commande en boucle ouverte de systèmes $(\min, +)$ linéaires continus, basée sur les notions de :

- *type* de système pour assurer une précision asymptotique dans le cas de consignes $(\min, +)$ polynomiales ;
- commande *juste-à-temps* pour retarder au mieux la commande.

Comme dans le cas de la théorie des systèmes conventionnels, la synthèse d'un correcteur basée sur la notion de type s'avère très simple.

Sommaire

■ Type d'un système linéaire conventionnel

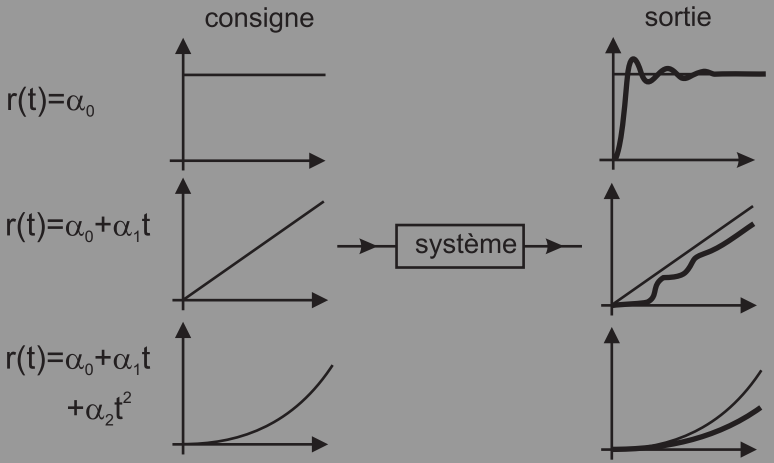


Le type d'un système indique sa capacité à poursuivre asymptotiquement des consignes polynomiales.

Un système linéaire conventionnel est de type m si m est le plus haut degré du polynôme appliqué en consigne pour lequel l'erreur asymptotique consigne – sortie est bornée mais non nulle. Soit une consigne polynomiale r de degré l, on a :

$$\lim_{t\to\infty} err(t) = \lim_{t\to\infty} (r-y)(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq l < m \\ \text{bornée } (\neq 0) & \text{pour } l = m \\ \text{non bornée} & \text{pour } l > m \end{cases}.$$

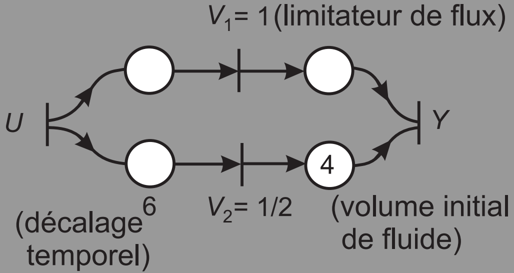
Système de type 1 : erreur asymptotique bornée, non nulle, pour une consigne polynomiale de degré 1, soit $r(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \times t^1$, $\alpha_1 \neq 0$.

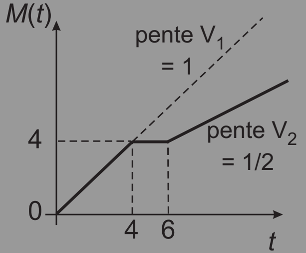


Systèmes $(\min, +)$ linéaires continus

- Graphes d'événements temporisés continus
- Algèbre des Systèmes
- Quelques propriétés asymptotiques des polynômes

Graphes d'événements temporisés continus

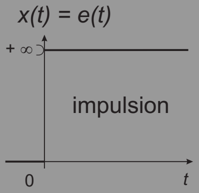




réponse impulsionnelle (continue, linéaire par morceaux)

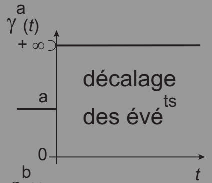
$$x : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \min, +)$$
$$t \longmapsto x(t) : \text{n}^{\text{bre}} \text{ cumulé de tirs de la transition } X \text{ jusqu'au temps } t.$$

Trois systèmes élémentaires pour représenter les GETC :

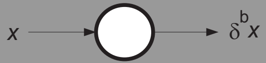


$$\gamma^a(x(t)) = a + x(t)$$

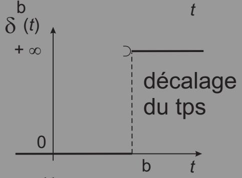
volume initial de fluide



$$\delta^b(x(t)) = x(t - b)$$



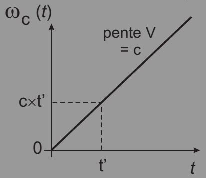
b temporisation



$$\omega_c(x(t)) = \underset{\tau \in R}{Inf}\,(x(t - \tau) + c \times \tau)$$

V = c

limitateur de flux (*vmf*)



Algèbre des Systèmes

Dioïde des fonctions non décroissantes de $\mathbb{R}$ vers $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \min, +)$ auquel sont associées :

1. l'opération min point-à-point, notée $\oplus$:

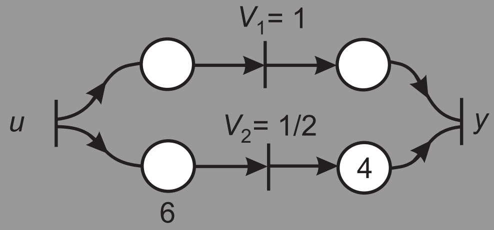
$$\forall t \in \mathbb{R},\ (u \oplus v)(t) = \min(u(t), v(t)).$$

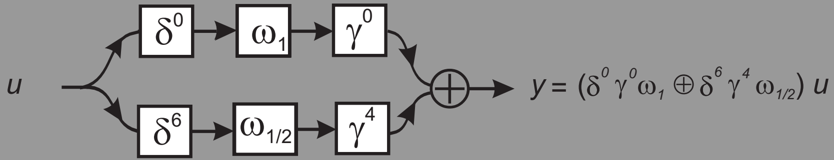
2. l'opération d'*inf-convolution*, notée $\otimes$:

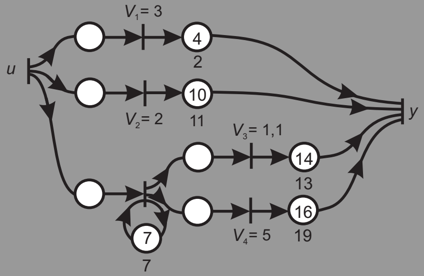
$$\forall t \in \mathbb{R},\ (u \otimes v)(t) = \mathop{Inf}_{\tau \in \mathbb{R}} (u(t-\tau) + v(\tau)).$$

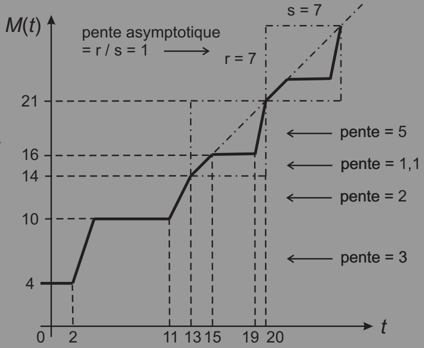
Relation d'ordre : $u \preceq v \Leftrightarrow u(t) \geq v(t),\ \forall t$ ($\geq$ est la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{R}$).

Tout GETC est modélisable par un système $(\min, +)$ linéaire continu obtenu en composant les systèmes élémentaires γ, δ, ω en parallèle ($S = S_1 \oplus S_2$), en série ($S = S_1 \otimes S_2$) ou par bouclage ($y = S(y) \oplus u = \bigoplus_{i \geq 0} S^i(u) = S^*(u)$).









$$M = \delta^2\gamma^4\omega_3 \oplus \delta^{11}\gamma^{10}\omega_2 \oplus \delta^{13}\gamma^{14}(\omega_{1,1} \oplus \delta^6\gamma^2\omega_5)(\delta^7\gamma^7)^*$$

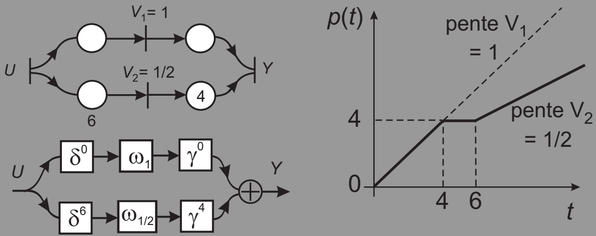
$$M = \quad p \quad \oplus \delta^{\tau}\,\gamma^{\nu} \quad q \quad (\delta^s\gamma^r)^*$$

■ Quelques propriétés asymptotiques des polynômes

Le degré du polynôme $p(t) = \bigoplus_{i=1}^{I} \delta^{\tau_i}\gamma^{\nu_i}\omega_{V_i}(t)$ correspond à sa pente asymptotique, notée $\mathbf{sl}_\infty(p) = \min_{i=1,\dots,I}(V_i)$.

$p = \delta^0\gamma^0\omega_1 \oplus \delta^6\gamma^4\omega_{1/2}$

$Y = p\,U$

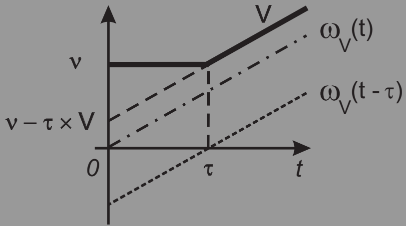


degré de p
$sl_\infty(p) = 1/2$

$val_\delta(p) = 0$
$val_\gamma(p) = 0$

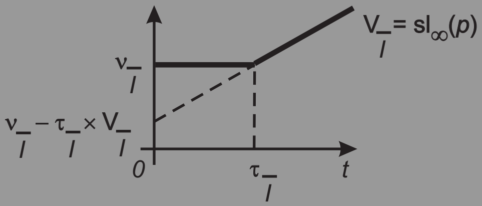
Soit le monôme $\delta^{\tau}\gamma^{\nu}\omega_V$, on a :

- $\lim\limits_{t\to\infty} \delta^{\tau}\gamma^{\nu}\omega_V(t) = \gamma^{\nu} \otimes \lim\limits_{t\to\infty} \omega_V(t-\tau) = \gamma^{\nu-\tau\times V} \otimes \lim\limits_{t\to\infty} \omega_V(t)$



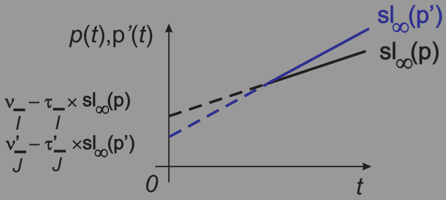
Soit le polynôme $p = \bigoplus_{i=1}^{l} \delta^{\tau_i}\gamma^{\nu_i}\omega_{V_i}$ avec $V_{\bar{l}} = \mathrm{sl}_\infty(p)$.

On note $\delta^{\tau_{\bar{l}}}\gamma^{\nu_{\bar{l}}}\omega_{V_{\bar{l}}}$ le monôme correspondant au comportement asymptotique de p.



- $\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \delta^{\tau_{\bar{l}}}\gamma^{\nu_{\bar{l}}}\omega_{V_{\bar{l}}}(t) = \gamma^{\nu_{\bar{l}} - \tau_{\bar{l}} \times V_{\bar{l}}} \otimes \lim_{t\to\infty} \omega_{V_{\bar{l}}}(t)$

- $\lim_{t\to\infty} (p \oplus p')(t) = \lim_{t\to\infty} p(t) \oplus \lim_{t\to\infty} p'(t)$



- $\lim_{t\to\infty} (p \otimes p')(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\bigoplus_{i=1}^{I} \delta^{\tau_i}\gamma^{\nu_i}\omega_{V_i} \otimes \bigoplus_{j=1}^{J} \delta^{\tau'_j}\gamma^{\nu'_j}\omega_{V'_j}\right)(t)$

$$= \bigoplus_{j=1}^{J} \gamma^{\nu'_j - \tau'_j \times sl_\infty(p)} \otimes \lim_{t\to\infty} p(t) \oplus \bigoplus_{i=1}^{I} \gamma^{\nu_i - \tau_i \times sl_\infty(p')} \otimes \lim_{t\to\infty} p'(t).$$

Type et précision asymptotique

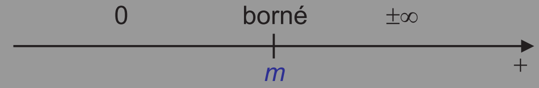
- Définition du type d'un système
- Synthèse d'un correcteur en boucle ouverte
- Un exemple

Définition du type d'un système

Soit r une consigne $(\min, +)$ polynomiale de degré l. Un système $(\min, +)$ est de type (m, m') si

$$\lim_{t\to\infty} (r-y)(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq l \leq m \\ \text{borné } (>0) & \text{pour } m < l \leq m' \\ +\infty & \text{pour } l > m' \end{cases}.$$

type m d'un système linéaire conventionnel



type (m, m') d'un système linéaire (min, +)

Rq : Type (m', m') qd $m' \leq m$: $\lim_{t\to\infty} (r-y)(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } l \leq m' \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$

Soient $M = p \oplus \delta^{\tau}\gamma^{\nu}q(\delta^{s}\gamma^{r})^{*}$ et $r = \bigoplus_{k=1}^{K} \delta^{\tau''_k}\gamma^{\nu''_k}\omega_{V''_k}$ un polynôme de degré l.

- On a : $\lim_{t\to\infty} (Mr)(t) = n \otimes \lim_{t\to\infty} r(t)$

  avec $n = \bigoplus_{i=1}^{I}\gamma^{\nu_i-\tau_i\times l} \oplus \bigoplus_{j=1}^{J}\gamma^{\nu+\nu'_j-(\tau+\tau'_j)\times l}$.

En fait, seuls les monômes représentant les sommets appartenant à l'enveloppe convexe formée par le polynôme $\bigoplus_{i=1}^{I}\gamma^{\nu_i-\tau_i\times l} \oplus \bigoplus_{j=1}^{J}\gamma^{\nu+\nu'_j-(\tau+\tau'_j)\times l}$ sont utiles (pour le calcul).

Par la suite, on pose $n = \bigoplus_{i=1}^{N}\gamma^{\nu_{n_i}-\tau_{n_i}\times l}$.

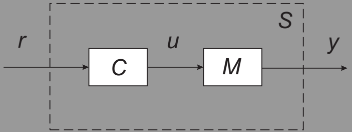
On a : $\lim_{t\to\infty}(r-y)(t) =$

$$\begin{cases} \tau_{n_1}\times l - \nu_{n_1} & \text{pour } 0 \leq l \leq \frac{\nu_{n_2}-\nu_{n_1}}{\tau_{n_2}-\tau_{n_1}}, \\ \tau_{n_2}\times l - \nu_{n_2} & \text{pour } \frac{\nu_{n_2}-\nu_{n_1}}{\tau_{n_2}-\tau_{n_1}} \leq l \leq \frac{\nu_{n_3}-\nu_{n_2}}{\tau_{n_3}-\tau_{n_2}}, \\ \tau_{n_3}\times l - \nu_{n_3} & \text{pour } \frac{\nu_{n_3}-\nu_{n_2}}{\tau_{n_3}-\tau_{n_2}} \leq l \leq \frac{\nu_{n_4}-\nu_{n_3}}{\tau_{n_4}-\tau_{n_3}}, \\ \vdots & \vdots \\ \tau_{n_N}\times l - \nu_{n_N} & \text{pour } \frac{\nu_{n_N}-\nu_{n_{N-1}}}{\tau_{n_N}-\tau_{n_{N-1}}} \leq l \leq \frac{r}{s} \quad (= sl_\infty(M)), \\ +\infty & \text{pour } \frac{r}{s} < l. \end{cases}$$

- Le modèle M est de type $(m, m') = (\frac{\nu_{n_2}}{\tau_{n_2}}, \frac{r}{s})$ *ssi*

$$\mathrm{val}_\delta(M)\ (= \tau_{n_1}) = 0 \text{ et } \mathrm{val}_\gamma(M)\ (= \nu_{n_1}) = 0.$$

Synthèse d'un correcteur en boucle ouverte



$y = S\,r = MC\,r$

Supposons que M est de degré $\frac{r}{s}$, soit le correcteur :

$$C = \delta^{-val_\delta(M)}\gamma^{-val_\gamma(M)}\omega_{m'}.$$

✓ Le terme $\delta^{-val_\delta(M)}\gamma^{-val_\gamma(M)}$ permet de compenser le terme $\delta^{val_\delta(M)}\gamma^{val_\gamma(M)}$ du modèle.

✓ Le terme $\omega_{m'}$ permet de limiter le flux de l'entrée sachant que $m' \leq \frac{r}{s}$.

La valeur de m' correspond au plus haut degré des consignes polynomiales à même d'être appliquées.

Sachant que, plus la valeur de m' sera petite, plus la commande u correspondant à une consigne polynomiale donnée sera grande (relativement à $\preceq$), autrement dit, plus l'objectif de juste-à-temps sera satisfait.

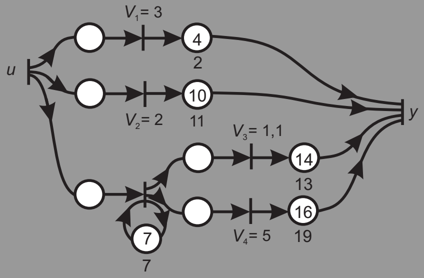
- Le correcteur

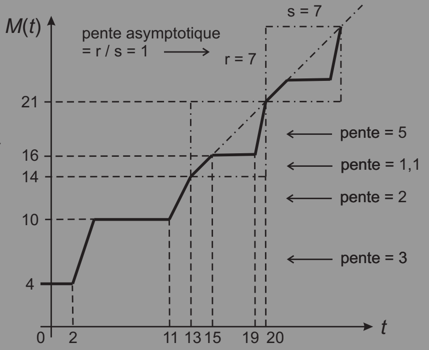
$$C = \delta^{-val_\delta(M)} \gamma^{-val_\gamma(M)} \omega_{m'}$$

est le plus grand correcteur tel que le système $S = MC$ est de type $(\min(\frac{\nu_{n_2}}{\tau_{n_2}}, m'), m')$ avec $n = \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma^{\nu_{n_i} - val_\gamma(M) - (\tau_{n_i} - val_\delta(M)) \times l}$.

Un exemple

Soit $M = \delta^2\gamma^4\omega_3 \oplus \delta^{11}\gamma^{10}\omega_2 \oplus \delta^{13}\gamma^{14}(\omega_{1,1} \oplus \delta^6\gamma^2\omega_5)(\delta^7\gamma^7)^*$.





✓ Supposons que le plus haut degré des consignes polynomiales à considérer est égale à $0,9$, ce qui fixe la valeur de m' à $0,9$ (la condition $m' \leq \frac{r}{s} = 1$ étant satisfaite).

✓ Sachant que $val_\delta(M) = 2$ et $val_\gamma(M) = 4$, il en résulte que le correcteur

$$C = \delta^{-2}\gamma^{-4}\omega_{0,9}$$

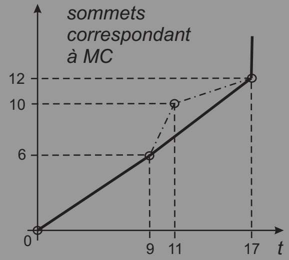
est le plus grand correcteur tel que :

le système $S = MC$ est de type $(\min(\frac{\nu_{n_2}}{\tau_{n_2}}, m'), m')$ avec $m' = 0,9$ et $n = \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma^{\nu_{n_i} - val_\gamma(M) - (\tau_{n_i} - val_\delta(M)) \times I}$.

✓ On déduit $n = \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma^{\nu_{n_i} - val_\gamma(M) - (\tau_{n_i} - val_\delta(M)) \times l}$ de l'expression de $M = \delta^2\gamma^4\omega_3 \oplus \delta^{11}\gamma^{10}\omega_2 \oplus \delta^{13}\gamma^{14}(\omega_{1,1} \oplus \delta^6\gamma^2\omega_5)(\delta^7\gamma^7)^*$.

En fait parmi les sommets correspondant au système MC, soient $(0,0)$, $(9,6)$, $(11,10)$, $(17,12)$, le sommet $(11,10)$ n'appartient pas à l'enveloppe convexe générée par ces monômes, soit :

$$n = \gamma^{0-0\,l} \oplus \gamma^{6-9\,l} \oplus \gamma^{12-17\,l}$$



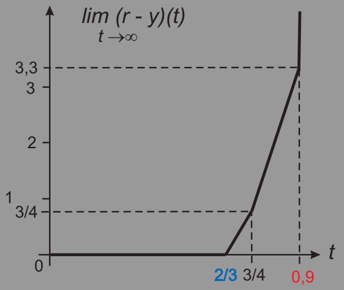
Il en résulte que

$$C = \delta^{-2}\gamma^{-4}\omega_{0,9}$$

est le plus grand correcteur tel que le système $S = MC$ soit de type égal à $(2/3; 0, 9)$.

Plus précisément, si r est une consigne polynomiale de degré l, on a : $\lim_{t \to \infty} (r - y)(t) =$

$$\begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq l \leq m = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ 9l - 6 & \text{pour } \frac{2}{3} \leq l \leq \frac{12-6}{17-9} = \frac{3}{4} \\ 17l - 12 & \text{pour } \frac{3}{4} \leq l \leq m' = 0, 9 \\ +\infty & \text{pour } l > 0, 9 \end{cases}$$



Conclusion (I)

Comme dans le cas des systèmes linéaires conventionnels, la notion de type d'un système, associée à celle de JAT, mène à des correcteurs simples à régler.

commande JAT neutre	$\leq$	commande JAT asympt.	$\leq$	commande JAT optimale
$M \diagdown M = \{\oplus u \mid M u = M\}$		$\delta^{-val_\delta(M)} \gamma^{-val_\gamma(M)} \omega_{m'}$		$r \diagdown M = \{\oplus u \mid M u \geq r\}$
M connu		$val_\delta(M), val_\gamma(M), sl_\infty(M)$ connus		M connu
$\forall$ r		connaissance *a priori* du plus haut degré des consignes polynomiales		connaissance *a priori* de r

Conclusion - perspectives (II)

✓ Etendre l'étude au cas d'une structure de commande en BF, afin de prendre en compte une perturbation d additive ($\oplus$) sur le système. La relation entrées-sortie résultante, soit

$$y = d \oplus MC(r \oplus y) = (MC)^{+} r \oplus (MC)^{*} d,$$

permettrait la synthèse d'un plus grand correcteur - dans un objectif de JAT - visant à assurer une précision asymptotique dans le cas d'entrées r et d polynomiales.

✓ Etudier l'intérêt d'associer au critère de précision asymptotique celui de précision dynamique, induit par un correcteur "proportionnel".

Commande en BO - Type d'un système linéaire conventionnel

$$T(s) = \sum_{i=0}^{n} n_i s^i / \sum_{i=0}^{n} d_i s^i \text{ stable}$$

$$Err(s) = (1 - T(s))R(s)$$

Système T de type m si $n_i = d_i$ pour $i = 0$ à $m - 1$ et $n_m \neq d_m$.

Commande non négative

Pour ne pas générer de commande u négative, autant dans le domaine temporel qu'événementiel, c-à-d, telle que $\mathrm{val}_\delta(u) < 0$, ou $\mathrm{val}_\gamma(u) < 0$, on modifie éventuellement la consigne r avant son application sur le correcteur C.

Soit $Pr_{\underline{\tau},\underline{\nu}}$ l'opérateur de projection de Σ vers Σ où :

$$Pr_{\underline{\tau},\underline{\nu}}(r(t)) = \begin{cases} r(t) & \text{si } t \geq \underline{\tau} \text{ et } r(t) \geq \underline{\nu} \\ max(r(\underline{\tau}), \underline{\nu}) & \text{sinon} \end{cases} .$$

Un tel projecteur revient, au lieu d'appliquer une consigne r négative, à appliquer durant un temps minimum une consigne égale à la valeur $max(r(\underline{\tau}), \underline{\nu})$, ceci sans changer la propriété asymptotique du correcteur.