Échantillonnage dépendant de l'état pour les systèmes avec perturbations et retards

Christophe Fiter[1], Laurentiu Hetel[1], Wilfrid Perruquetti[1,2], Jean-Pierre Richard[1,2]

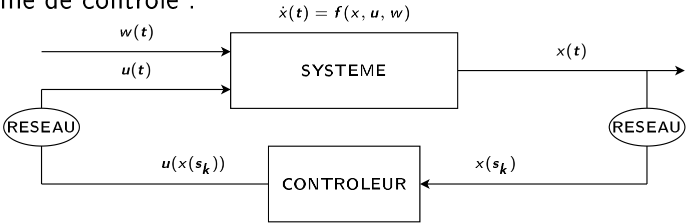
[1]Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal, CNRS FRE 3303, École Centrale de Lille, France

[2]Non-A, INRIA Lille-Nord Europe, France

Modélisation des Systèmes Réactifs, 17 novembre 2011, Lille

Introduction

Système de contrôle :

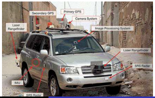


- De nos jours, systèmes embarqués et systèmes commandés en réseau sont omniprésents
- De l'information doit être échangée entre le système et le contrôleur
- La commande en boucle fermée a un coût (charge processeur, bande passante, $\cdots$)
- $\Rightarrow$ Nécessité de réduire ces coûts.

Applications

- Systèmes temps-réel
  - Un seul microprocesseur pour plusieurs tâches
  - Charge de calcul limitée
  - Systèmes de contrôle : contraintes fortes sur l'ordonnanceur temps-réel

- Systèmes distribués :
  - Réseau de communication partagé
  - Bande passante limitée
  - Communication à minimiser



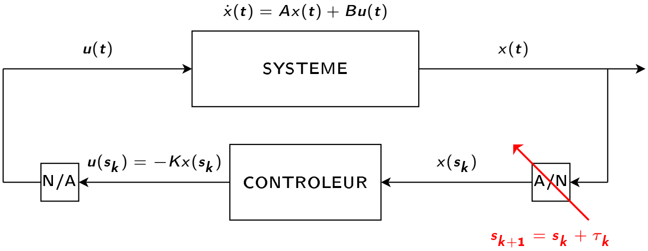
Problème

Question : Comment alléger les charges processeur et/ou réseau tout en assurant la stabilité du système ?

Approches de recherche

2 approches principales :

- Analyse robuste aux variations du pas d'échantillonnage

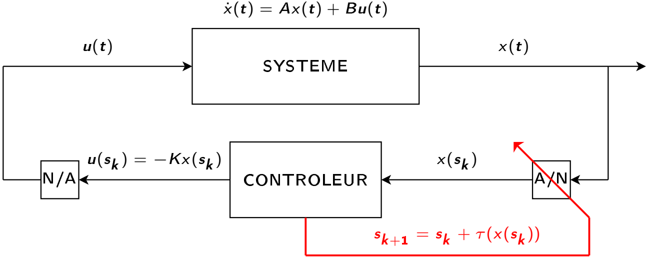


Pas d'échantillonnage $\tau_k \in [0, \tau^*]$

Approches de recherche

2 approches principales :

- Analyse robuste aux variations du pas d'échantillonnage
- Contrôle dynamique de l'échantillonnage

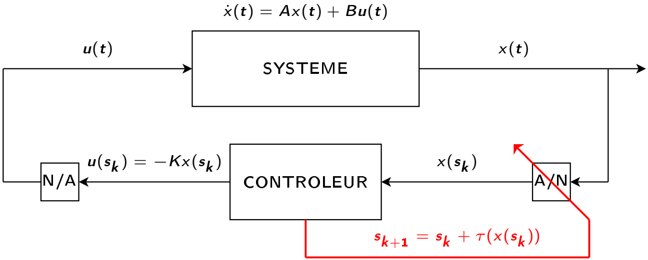


Fonction d'échantillonnage $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

Approches de recherche

2 approches principales :

- Analyse robuste aux variations du pas d'échantillonnage
- Contrôle dynamique de l'échantillonnage



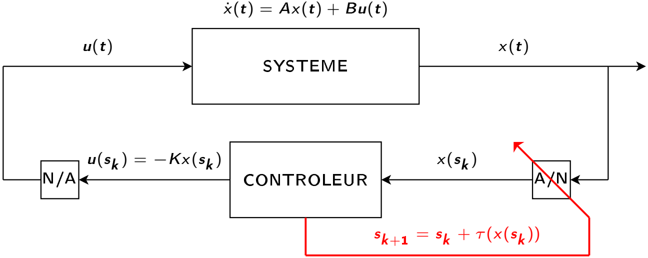
Fonction d'échantillonnage $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

- Event-Triggered Control

Approches de recherche

2 approches principales :

- Analyse robuste aux variations du pas d'échantillonnage
- Contrôle dynamique de l'échantillonnage



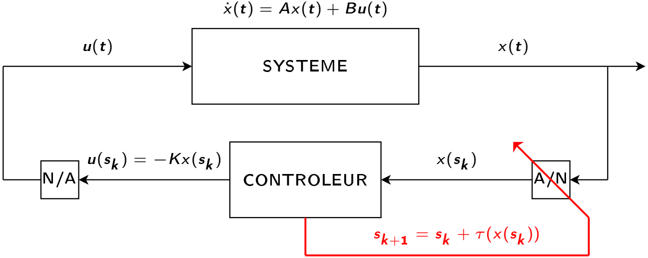
Fonction d'échantillonnage $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

- Event-Triggered Control
- Self-Triggered Control

Approches de recherche

2 approches principales :

- Analyse robuste aux variations du pas d'échantillonnage
- Contrôle dynamique de l'échantillonnage

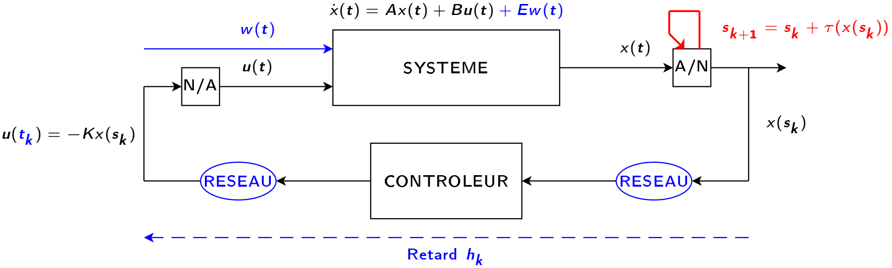


Fonction d'échantillonnage $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

- Event-Triggered Control
- Self-Triggered Control
- State-dependent Sampling (Fiter et al., IFAC'11)

Système étudié

Objectif : State-dependent sampling avec perturbations et retards



Fonction d'échantillonnage $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$
Perturbation inconnue $w(t)$
Retard variable $h_k = t_k - s_k$

Système étudié

On considère le système

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad , \tag{1}$$

avec une commande échantillonnée retardée

$$u(t) = -Kx(s_k),\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \tag{2}$$

Les instants d'échantillonnage s_k et d'actuation t_k sont liés par la relation

$$s_k = t_k - h(t_k), \tag{3}$$

avec un retard $h(t)$ borné et à vitesse de variation bornée.
Les instants d'échantillonnage sont définis par la loi

$$s_{k+1} = s_k + \tau_{\max}(x(s_k)), \tag{4}$$

où $\tau_{\max}$ est une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état $x(s_k)$.

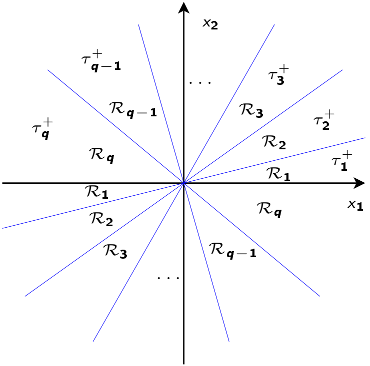
Objectif

Objectif : construire hors-ligne la fonction d'échantillonnage $\tau_{\max} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ telle que :

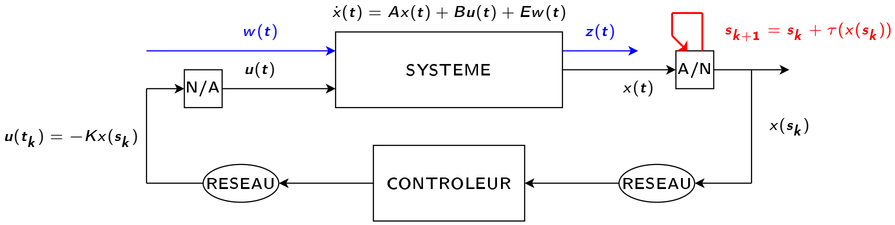
- la borne inférieure $\tau^* = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \tau_{\max}(x)$ est maximale
- le pas d'échantillonnage maximal admissible $\tau_{\max}(x)$ est maximal pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

Division de l'espace d'état (Fiter et al., IFAC'11)

On divise l'espace d'état en un nombre fini de régions coniques $\mathcal{R}_\sigma$.



Critère de stabilité $\mathcal{L}_2$



Lemma

Le système est $\mathcal{L}_2$-stable de w à z s'il existe une fonction $V \succ 0$ suffisamment régulière qui vérifie

$$\dot{V}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \leq 0. \tag{5}$$

Fonctionnelle de Lyapunov Krasovskii

On travaille la fonctionnelle de Lyapunov Krasovskii

$$V(t, x_t, \dot{x}_t, k) = x^T(t)Px(t) + V_1(t, x_t, \dot{x}_t) + V_2(t, x_t, \dot{x}_t, k), \quad (6)$$

avec un terme gérant le retard :

$$V_1(t, x_t, \dot{x}_t) = \int_{t-h(t)}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds + \cdots, \quad (7)$$

et un terme prenant en compte le pas d'échantillonnage :

$$V_2(t, x_t, \dot{x}_t, k) = (t_{k+1} - t) \int_{t_k}^{t} \dot{x}^T(s)U_{\sigma_k}\dot{x}(s)ds + \cdots. \quad (8)$$

Résultat principal

Theorem

La LKF V satisfait les conditions de stabilité $\mathcal{L}_2$ si un nombre fini d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs) $\Xi_{i,\sigma}(\tau_\sigma^+) \preceq 0$ est satisfait pour toute région $\mathcal{R}_\sigma$

Construction de la fonction d'échantillonnage $\tau_{\mathbf{max}}$

Algorithme de construction (hors ligne) de la fonction $\tau_{\mathbf{max}}$

1. Calculer le pas d'échantillonnage indépendant de l'état maximal admissible τ^+ (line search algorithm sur τ^+ + LMIs).
2. Construire la cartographie du plus grand pas d'échantillonnage admissible $\tau_\sigma^+ \geq \tau^+$, pour chaque région $\mathcal{R}_\sigma$ (line search algorithm sur chaque τ_σ^+ + LMIs)

$$\tau_{\mathrm{max}}(x) = \mathrm{argmax}\{\tau_\sigma^+, x \in \mathcal{R}_\sigma\} \tag{9}$$

Exemple 1

On considère le système :

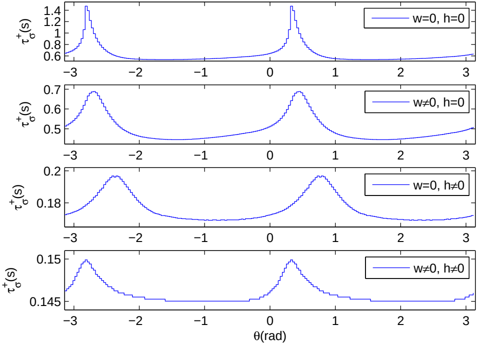
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} Kx(s_k) + w(t), \text{ et}$$
$$K = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}, \; z(t) = x(t), \text{ pour } t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Le gain $\mathcal{L}_2$ est fixé à $\gamma = \sqrt{10}$ (le système est asymptotiquement stable si $\|w(t)\| \leq 32\% \|x(t)\|$).

Le retard vérifie $h(t) \in [10^{-4}, 10^{-1}]$ et $\dot{h}(t) \in [-0.2, 0.6]$.

Exemple 1 - Fonctions d'échantillonnage dépendant de l'état

Cartographie du pas d'échantillonnage maximal admissible τ_σ^+ pour le système avec ou sans perturbations w et/ou retard h.

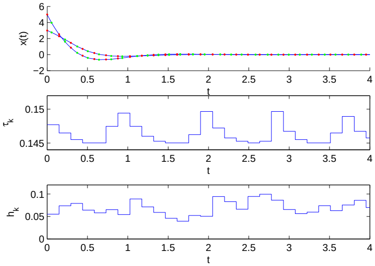


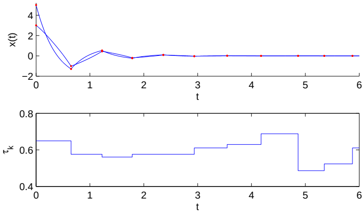
Borne inférieure : $\tau^+ = $ 1) 0.535 ; 2) 0.445 ; 3) 0.169 ; 4) 0.145.

Exemple 1 - Simulations

Simulation

- avec une perturbation vérifiant $\|w(t)\|_2 = \frac{1}{\gamma}\|x(t)\|_2$
- avec retard variable (à gauche), ou sans retard (à droite)





Exemple 2

On considère le système :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} Kx(s_k), \text{ et}$$
$$K = \begin{pmatrix} -1.02 & 5.62 \end{pmatrix}, \ z(t) = x(t), \text{ pour } t \in [s_k, s_{k+1}).$$

Exemple 2

On compare :

- la borne inférieure τ^+ de la fonction d'échantillonnage obtenue : $0.309s$
- les bornes de stabilité robuste obtenues dans la littérature :
  - Fridman, Automatica 2010 : $0.259s$
  - Fujioka, Automatica 2009 : $0.204s$
  - Seuret, CDC 2009 : $0.198s$

Conclusion

Nous avons présenté :

- Une fonction d'échantillonnage $\tau_{\max}(x)$ permettant de réduire le nombre d'échantillonnages pour les systèmes avec retards et perturbations.

Deux avantages majeurs :

- Maximisation du pas d'échantillonnage minimal $\tau^{+} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \tau_{\max}(x)$.
- Construction hors-ligne avec des LMIs obtenues grâce à une cartographie de l'espace d'état.

Travaux futurs et perspectives :

- Extension aux systèmes non linéaires,
- Extension à la commande basée observateur,
- ...