Les nombres-univers

JEAN-PAUL DELAHAYE

Votre photographie est dans la suite des puissances de 2.

La *Bibliothèque de Babel* est peut-être la plus merveilleuse nouvelle de littérature fantastique jamais écrite : Jorge Luis Borges y émet l'hypothèse que le monde est une immense bibliothèque dont les salles de lecture contiennent tous les livres possibles de 420 pages. Chaque page comporte 40 lignes de 80 caractères pris dans un alphabet de 25 symboles : 22 lettres, le blanc, le point et la virgule (on serait plus à l'aise en acceptant, comme en informatique, 128 ou 256 caractères différents, mais c'est sans grande importance).

Les habitants de ce monde-bibliothèque sont conscients que le nombre total des ouvrages différents d'une telle bibliothèque est fini. Il y a $25^{420 \times 40 \times 80} = 25^{1344000} = 2{,}35 \times 10^{1878831}$ ouvrages distincts. Les habitants doivent donc se résoudre à admettre soit que la bibliothèque est elle-même finie (aucun livre n'étant présent deux fois), soit qu'elle est infinie, mais alors elle comporte plusieurs fois les mêmes ouvrages, peut-être répétés périodiquement (c'est la théorie soutenue par le narrateur).

Tentons d'imaginer ce que signifie cette idée d'une bibliothèque incluant tous les ouvrages possibles de 420 pages. Elle contiendrait le livre composé uniquement de la lettre A imprimée 1 344 000 fois, celui composé de la suite EFGHIJ indéfiniment recopiée (un autre n'en différerait qu'à la page 100 où le J disparaîtrait). Elle contiendrait aussi le texte du prochain prix Goncourt, le texte du prochain prix Goncourt dont la dernière page a été remplacée par une page blanche, une autre version encore avec chaque 'i' remplacé par 'y', une autre version avec votre nom comme nom d'auteur, une autre avec votre nom comme nom du personnage principal, les traductions italienne, bulgare, en vieux français, en latin primitif, etc. Cette bibliothèque contiendrait aussi un livre dont les pages paires porteraient le texte de l'Évangile, et les pages impaires de la *Justine* de Sade ; un livre qui serait *Fictions* de Borges (le recueil qui contient la nouvelle que nous examinons) écrit à l'envers, un autre qui serait *Fictions* comme je pourrais essayer de le reconstituer de mémoire si je m'y essayais ; un autre qui serait *Fictions* dont les mots auraient été classés par ordre alphabétique ; un autre qui serait *Fictions* sans la lettre 'e' résultant de l'exercice d'un Georges Pérec ressuscité. Il y aurait aussi, bien sûr, un livre qui énumérerait les décimales de π écrites en toutes lettres tout au long des 420 pages, mais malheureusement il y aurait aussi le même avec une erreur en page 200, et le même avec une erreur toutes les pages, et le même avec une erreur par ligne. Il y aurait aussi un livre qui raconterait votre vie, mais un autre la prolongerait de dix ans, et un autre la raccourcirait de 15 ans. J'arrête là, car la liste des possibilités est infinie... Non... Elle est finie, mais le fini très grand ne ressemble-t-il pas à l'infini ?

On pourrait réécrire la nouvelle de Borges en imaginant une filmothèque où seraient entreposés tous les films possibles enregistrés sur des disques optiques numériques (chaque disque ne comporte qu'un nombre déterminé d'informations, et le nombre de disques différents est fini). Cette filmothèque universelle contiendrait quelque part le journal télévisé de demain soir, le film des derniers instants d'Hitler, l'enregistrement sur le vif des cours que donnait Aristote il y a 2 000 ans, un résumé en une heure des 50 prochaines années de la vie sur Terre, mais aussi une multitude de films fallacieux, mal montés, incohérents, indéchiffrables, parasités ou presque entièrement noirs.

Le nombre de combinaisons de M symboles pris dans un alphabet fini de N symboles (en acceptant les répétitions) est fini : c'est N^M, car il y a N possibilités pour le premier symbole, autant pour le second, et ainsi de suite jusqu'au dernier symbole, ce qui fait en tout $N \times N \times ... \times N$ (M fois) combinaisons. La richesse d'un tel ensemble laisse froid le mathématicien, alors que le physicien, lui, se rend compte que certains nombres trop grands, comme celui des livres de la Bibliothèque de Babel, sont irréels. Le volume de l'Univers visible est d'environ 15 milliards d'années-lumière au cube, soit :

$(15 \text{ x } 300\,000 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \times 100\,000)^3 \text{ cm}^3 = 2{,}85\ 10^{57} \text{ cm}^3$.

On est loin des $2{,}35 \text{ x } 10^{1878831}$ ouvrages du monde-bibliothèque de Borges, et donc, même si nous réussissions à remplir de livres tout l'espace à raison d'un livre par centimètre cube, l'Univers visible entier ne contiendrait qu'une infinitésimale partie de la Bibliothèque de Babel ou de la filmothèque universelle. Les nombres trop grands n'ont pas de sens physique, et peut-être pas de sens du tout.

LES SUITES-UNIVERS

Le mathématicien est plus intéressé par l'infini que par les nombres grands, mais finis (on peut penser que cette facilité sera un jour remise en question). Le mathématicien n'éprouve, par exemple, aucune difficulté à imaginer la suite des nombres entiers écrits en base dix : 0 1 2 3 ... 10 11 12 ... 99 100 101 ... Il peut la manipuler en pensée sans mal. Réalise-t-il cependant que, dans cette suite de symboles, il y a tout l'univers des livres ou films possibles que nous envisagions au-dessus, et bien plus?

Convenons de regrouper deux par deux les chiffres et d'associer à chaque couple de chiffres un symbole pris dans un ensemble de 100 caractères (ce qui est suffisant pour obtenir une assez belle typographie et mieux que les 25 caractères de Borges). Alors, quelque part dans la suite, il y aura la séquence des chiffres correspondant au texte du prochain prix Goncourt, autre part celle du roman de votre vie, etc. Les images et le son d'un disque optique sont codés par une suite finie de chiffres, et donc, dans la suite des nombres entiers mis bout à bout, il y a quelque part le codage du film du sacre de Napoléon du 2 décembre 1804, celui du film de votre première journée d'école, etc.

Nous appellerons suite-univers toute suite de chiffres qui possède la propriété que toute séquence finie de chiffres y est présente au moins une fois. C'est le cas de la suite de chiffres 12345678910111213... (la suite des chiffres des entiers écrits en base dix les uns derrière les autres), car, par exemple, on trouve la séquence 5365 quand on arrive au nombre 5 365 (en fait, on la trouve déjà avant quand on passe de 653 à 654). Par définition, les suites-univers contiennent donc tout livre possible, tout film possible, toute vie humaine possible, toute musique possible... tout l'Univers.

Bien que cela soit moins évident que pour l'énumération des entiers, la suite des puissances de 2 écrites en base 10 les unes après les autres (2 4 8 16 32 64 128, etc.) est aussi une suite-univers. Un théorème énonce que, pour toute séquence de chiffres $c_1\ c_2\ ...\ c_n$, il existe une certaine puissance de 2 dont l'écriture décimale commence par $c_1\ c_2\ ...\ c_n$. On connaît même un programme de cinq lignes (dû à Stephan Heilmayr et écrit dans le langage *Mathematica*) qui vous donne l'exposant de 2 voulu quand vous lui donnez la séquence.

Laissons-nous encore aller à imaginer ce que cela implique : il existe un entier n tel que le début des chiffres de 2^n en base 10 code le texte de la description sur 420 pages de votre visage en train de tirer la langue ; il y a aussi le texte des cinq milliards de bases *AGCT* correspondant à votre génome ; il y a aussi les données informatiques permettant de faire revivre la vie de Vercingétorix du début à la fin dans un appareil de réalité virtuelle : vous mettez le casque sur la tête, vous vous attachez sur l'armature du simulateur, et vous voilà projeté en arrière dans le temps. Et c'est vrai aussi de toutes les autres vies humaines passées ou futures qui se trouvent là, dispersées au fil des décimales des puissances de 2.

Les nombres-univers

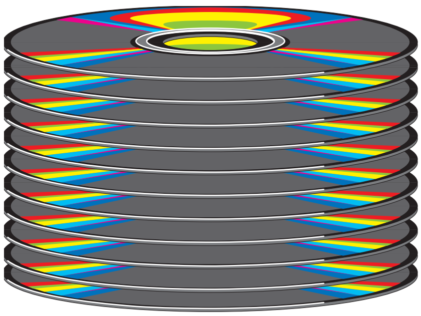
Convenons d'appeler nombre-univers un nombre dont la suite des décimales est une suite-univers. Existe-t-il beaucoup de nombres-univers ?

On sait qu'un nombre réel rapport de deux entiers (comme 2/3, 150/235, etc.) a une suite de décimales qui n'est pas une suite-univers, car périodique : quand on fait la division, on retombe, à un moment ou un autre, sur un reste obtenu précédemment, et donc tout recommence.

Pour les nombres non rapport de deux entiers – on dit irrationnels –, comme $\sqrt{2}$, π, e, personne ne sait si ce sont des nombres-univers. On ne sait d'ailleurs même pas si π, à partir d'un certain rang, s'écrit sans utiliser de '0' (ou sans '1', ou sans '2', etc.) : on juge que c'est improbable (que peut vouloir dire «improbable» dans un tel cas ?), mais rien n'est démontré. On pense en général que π est un nombre-univers, et j'ai d'ailleurs trouvé sur *Internet* à l'adresse suivante :

http://gryphon.ccs.brandeis/~grath/attractions/gpi/

1. Borges avait imaginé la bibliothèque de Babel contenant tous les livres de 420 pages : un de ces livres contient l'histoire de votre vie. On peut souhaiter qu'une partie (infime) de cette bibliothèque soit réunie dans celle de l'abbaye d'Admont, en Autriche.



2. Un disque optique comporte environ 5 000 000 000 de bits d'information. Il n'y a donc qu'un nombre fini de disques optiques différents possibles ($2^{5\,000\,000\,000}$). On peut alors imaginer, comme Borges le propose avec sa bibliothèque de Babel, une filmothèque universelle réunissant tous les disques optiques possibles. Tout film passé ou futur se trouve dans la filmothèque.

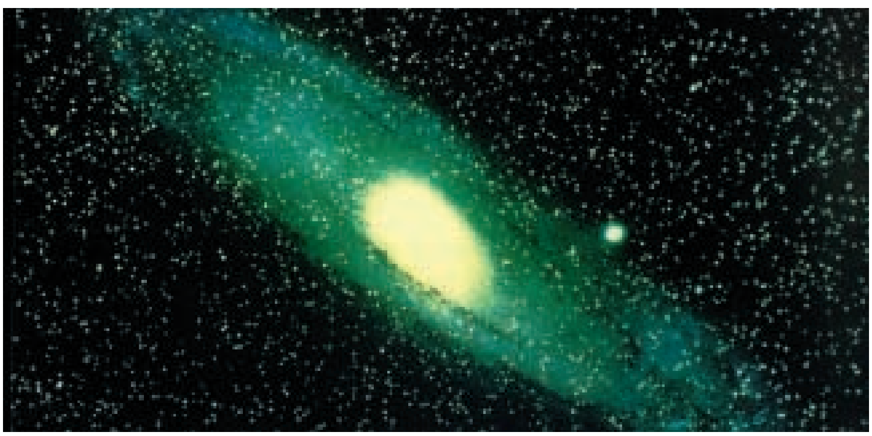
SUITE-UNIVERS DES PUISSANCES DE 2

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048 4096 8192 16384 32768 65536 131072 262144 524288 .....

NOMBRE-UNIVERS DE LA SUITE DES ENTIERS

0,1234567891011121314151617181920212223242526272829303132333435363738394041424344454647 48 .....

3. Les suites-univers. Une suite-univers est, par définition, une suite qui contient toute séquence finie. La suite des puissances de 2 en base 10 est une suite-univers : toute séquence s'y trouve, tout comme dans la suite des décimales du nombre-univers. Quelque part il y a votre date de naissance, ailleurs il y a la version numérique du film de vos épreuves orales de baccalauréat, etc.



4. L'infinité des mondes et l'infinité de vos jumeaux. Si *(1)* l'Univers est infini, *(2)* il y a une infinité de galaxies et *(3)* il existe un principe qui fait que chaque combinaison de particules élémentaires se présente avec une probabilité non nulle dans une galaxie, alors toute combinaison de particules élémentaires est réalisée une infinité de fois dans l'Univers. Et donc il y a une infinité de personnes parfaitement semblables à vous en train de lire ce numéro de *Pour La Science*. Ce problème «de la duplication» gêne certains cosmologistes.

5. Les nombres-univers sont très nombreux

Non seulement il existe des nombres-univers, mais, en réalité, ils sont très nombreux. En voici la preuve en deux étapes.

(a) Il y a une infinité non dénombrable de suites de Pile ou Face (version binaire du principe de diagonalisation de Cantor). Supposons qu'on puisse associer, sans répétition et sans en oublier, un nombre entier à chaque suite de Pile ou Face, par exemple :

0 → P P F F P P...
1 → F F P F P P...
2 → F P P P F P...
...

La suite obtenue en prenant la diagonale et en échangeant P et F n'est pas dans cette liste (car elle diffère par son premier élément de la première suite, par son deuxième élément de la deuxième liste, etc.). Il est donc impossible de numéroter les suites infinies de P et de F par des entiers : l'infini des suites de Pile ou Face est donc strictement plus grand que l'infini des entiers. On dit : il y a une infinité non dénombrable de suites de Pile ou Face.

(b) Il y a une infinité non dénombrable de nombres-univers. On part du nombre-univers 0,1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11... On prend une suite infinie de PF quelconque. On permute '1' et '2' si le premier élément est P ; sinon, on ne permute pas. On permute '3' et '4' si le second élément est P, etc. Par ce procédé, deux suites de Pile ou Face différentes donneront deux nombres-univers différents. Il y a donc une infinité non dénombrable (plus grande que celle des entiers) de nombres-univers différents.

un programme qui recherche pour vous si votre date de naissance ou toute séquence qui vous intéresse est dans les décimales de π. J'ai ainsi appris qu'une suite de sept 7, soit 7777777, se trouvait dans π à partir de la décimale 3 346 229.

L'ignorance dans laquelle nous sommes pour $\sqrt{2}$, π, e est en partie compensée par l'élaboration de nombres irrationnels et même transcendants (non solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) qui sont des nombres-univers, ou au contraire ne le sont pas. Le nombre 0,1010010000001... ($n!$ fois le '0' entre deux '1') est transcendant, mais n'est pas un nombre-univers. Le nombre 0,1020030000004... ($n!$ fois le '0' entre l'écriture décimale de n et de $n+1$) est un nombre-univers transcendant.

Notons que les nombres incompressibles, c'est-à-dire que l'on ne peut coder sous une forme plus concise, sont tous des nombres-univers. Si un nombre, 47 par exemple, manque dans un nombre A, alors ce nombre A peut être codé plus économiquement en évitant le signe 47, en remplaçant 48 par 47, 49 par 48, etc. La suite ne comporte plus 99, et l'on peut écrire le nombre A en base 99, ce qui donne une séquence de chiffres un peu plus courte. Un nombre qui n'est pas un nombre-univers est donc compressible, ce qui, dit autrement, signifie : tout nombre incompressible est un nombre-univers. On démontre qu'il y a une infinité de nombres incompressibles, donc de nombres-univers.

Un moyen simple et direct de construire une infinité non dénombrable (plus grande que l'infinité des entiers) de nombres-univers est indiqué sur la figure 5.

L'infini et les possibles

J'ai lu, il y a quelques mois, la remarque suivante qui semble être en rapport avec ce que nous examinons ici : «S'il existe un nombre infini de galaxies, toutes les combinaisons possibles présidant à la naissance et à l'existence d'un être vivant doivent se produire un nombre infini de fois : il existe non seulement une infinité de mondes, mais aussi une infinité d'individus ayant la même structure que n'importe quel individu de notre Terre : vous ou moi.»

Vous avez remarqué, j'imagine, que ce raisonnement est faux. L'infini autorise certains délires, et nous nous y sommes laissés aller avec nos énumérations de tout à l'heure, mais il n'autorise pas à dire n'importe quoi. C'est à G. Cantor que nous devons la démonstration qu'il existe une science rigoureuse de l'infini, dont les mathématiciens découvrent les lois, et qui permet d'affirmer à propos de l'infini certaines choses et en interdit d'autres. L'auteur des lignes citées pense, semble-t-il, que dès qu'un ensemble est infini alors tout est dedans, et même que tout y est inclus une infinité de fois. C'est clairement inexact : l'ensemble des nombres s'écrivant avec les chiffres pairs 0, 2, 4, 6, 8 par exemple est infini et pourtant il ne contient pas tous les nombres, puisque 3 n'y est pas, ni 123, ni 25267!

Même si tout infini est grand (par nature!), tout infini n'est pas tout!!!

Malheureusement pour notre goût de l'éternité et notre souhait qu'il y ait d'autres formes de vie dans l'Univers : même s'il existe un nombre infini de galaxies, il se peut que la vie ne soit apparue qu'une fois, et qu'il n'y ait nulle part ailleurs un individu possédant la même structure que vous ou moi.

Il existe cependant un résultat de la théorie des probabilités qui explique peut-être l'erreur mentionnée. Si l'on tire au sort indéfiniment des chiffres, chaque chiffre ayant une probabilité non nulle d'être obtenu (par exemple 1/10) alors la suite infinie construite ainsi est, avec une probabilité 1, une suite-univers et donc toute suite finie de nombres se présentera si l'on sait attendre assez longtemps.

On affirme parfois qu'un singe tapant au hasard sur une machine à écrire finit à un moment ou un autre par écrire *Le songe d'une nuit d'été* de Shakespeare ou l'encyclopédie *Larousse* en 20 volumes. Si on prend la précaution de préciser que les choix du singe suivent une loi de probabilité qui n'omet aucune touche de la machine, c'est tout à fait exact d'après le résultat cité *(voir un raisonnement direct sur la figure 6)*.

On peut aussi tirer du résultat probabiliste mentionné que si l'Univers est infini, qu'il comporte une infinité de galaxies et que les particules élémentaires à l'intérieur de chaque galaxie occupent une configuration (parmi un nombre de configurations possibles qu'on suppose fini) en respectant une loi de probabilité qui n'attribue une probabilité nulle à aucune configuration (ce qui n'est pas invraisemblable si l'Univers mélange bien tout), alors il est vrai maintenant que «toutes les combinaisons possibles présidant à la naissance et à l'existence d'un être vivant doivent se produire un nombre infini de fois : il existe non seulement une infinité de mondes, mais aussi une infinité d'individus ayant la même structure que n'importe quel individu de notre Terre : vous ou moi».

Perspectives troublantes! Certains cosmologistes comme John Barrow et Franck Tipler n'hésitent pas à les évoquer et à s'interroger sur ce qu'ils dénomment le «problème de la duplication», dont ils remarquent malicieusement que, s'il se pose vraiment, alors ils ne sont certainement pas les seuls à s'y intéresser.

L'idée que, dans certains types d'univers, tout est présent plusieurs fois entraîne qu'en un certain sens chacun de nous est éternel : lorsque vous mourrez ici sur Terre, un autre vous-même, ailleurs, vit les choses légèrement différemment et reste vivant. C'est le thème d'un livre étrange de Frank Tipler, *The Physics of Immortality,* paru l'année dernière aux éditions *Doubleday* et dont les spéculations sauvages ont provoqué des commentaires outragés de nombreux de ses collègues.

PROBLÈMES SUR LES NOMBRES-UNIVERS

Les nombres-univers sont des objets fascinants, puisqu'ils contiennent, par définition, toutes les combinaisons possibles de chiffres et donc, sous forme numérique, tous les livres, tous les films, toutes les vies, etc. On peut cependant assez aisément démontrer des propriétés simples de ces nombres. En voici quelques-unes sous forme de petits problèmes.

Problème 1. Est-il vrai que, dans un nombre-univers, chaque séquence est présente non seulement une fois (comme la définition le demande), mais une infinité de fois?

Réponse. Oui. Considérons une séquence *c*. Chacune des séquences *c* 0 (*c* suivie de '0'), *c*10 (*c* suivie de '1' et de '0'), *c*110, *c*1110, etc., est présente au moins une fois, et donc la séquence *c* est présente une infinité de fois.

Problème 2. Est-il vrai qu'en modifiant un nombre fini de chiffres d'un nombre-univers, il le reste?

Réponse. Oui. Soit *c* une séquence finie de chiffres, elle est présente une infinité de fois (problème précédent), donc en modifiant un nombre fini de chiffres du nombre-univers *s*, on ne touche qu'un nombre fini d'exemplaires de la séquence *c*, qui est donc présente (une infinité de fois) dans le nombre modifié.

Problème 3. La somme de deux nombres-univers est-elle toujours un nombre-univers?

Réponse. Non. Soit *c* un nombre-univers, soit le nombre *c'* obtenu en «complémentant *c*», c'est-à-dire en prenant pour décimale numéro *i* le complémentaire à 9 de la décimale numéro *i* (le complémentaire de 0 est 9, le complémentaire de 1 est 8, etc.). Le nombre *c* + *c'* possède la suite de décimales 0,99999999... et n'est donc pas un nombre-univers. Je ne connais pas la réponse à la même question pour le produit : un lecteur saura-t-il y répondre?

Problème 4. Le mélange par interpénétration de deux nombres-univers (un bout du premier, un bout du second, un bout du premier, etc.) en est-il toujours un?

Réponse. Non. Si on mélange deux fois le même nombre-univers par bouts de longueur 1 (un chiffre du premier, un chiffre du second, etc.), on n'a plus que des chiffres doublés 115544..., ce qui ne peut pas être un nombre-univers, puisque 123, par exemple, ne sera pas présent.

Problème 5. Existe-t-il toujours une façon de faire le mélange par interpénétration de deux nombres-univers de façon à obtenir un nombre-univers?

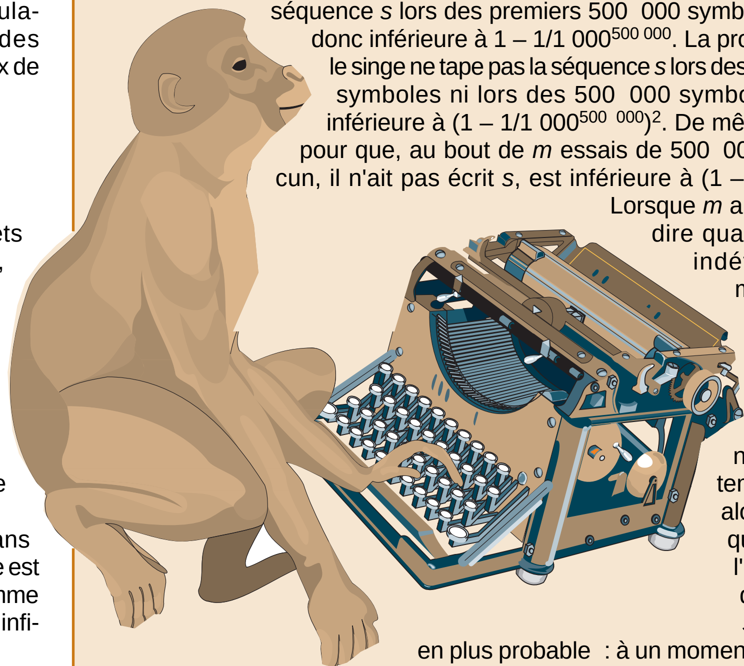
Réponse. Oui. Soit *S* et *S'* deux nombres-univers. On fait la liste de toutes les séquences finies c_1, c_2, ..., c_N, ... On construit un nouveau nombre-univers *S"* de la façon suivante. On prend un bout de *S* assez long pour que c_1 y soit présent (c'est possible, car *S,* par définition, contient une infinité de fois c_1), on prend un bout de *S'* assez long pour que c_2 soit dedans (c'est possible), on prend un bout de ce qui reste de *S* assez long pour que c_3 soit dedans, etc. Par construction, *S"* est un nombre-univers.

Problème 6. Dans un nombre-univers, la probabilité de tomber sur un '1' peut-elle être nulle à l'infini?

Réponse. Oui. Le nombre-univers transcendant évoqué plus haut 0,1020030000004... donne la réponse : la probabilité de tomber sur un '1' (ou un '2', etc.) est nulle à l'infini, car les zéros sont de plus en plus nombreux.

6. Le singe qui tape au hasard

Supposons qu'à chaque fois que le singe tape sur une touche de sa machine, la probabilité pour qu'il tape un '*a*' soit supérieure à 1/1 000. De même pour le '*b*', etc. Donnons-nous une séquence *s* de 500 000 symboles (un texte de Shakespeare, par exemple). Alors la probabilité pour que le singe tape, dès son premier essai, la séquence *s* est supérieure à $1/1\,000^{500\,000}$, ce qui est très faible, mais non nul. La probabilité pour que le singe ne tape pas la séquence *s* lors des premiers 500 000 symboles qu'il écrit est donc inférieure à $1 – 1/1\,000^{500\,000}$. La probabilité pour que le singe ne tape pas la séquence *s* lors des premiers 500 000 symboles ni lors des 500 000 symboles suivants est inférieure à $(1 – 1/1\,000^{500\,000})^2$. De même, la probabilité pour que, au bout de *m* essais de 500 000 symboles chacun, il n'ait pas écrit *s*, est inférieure à $(1 – 1/1\,000^{500\,000})^m$. Lorsque *m* augmente, c'est-à-dire quand le singe tape indéfiniment sur sa machine, la probabilité de ne pas voir apparaître *s* tend vers 0 (on utilise le fait que, si *r* est un nombre positif strictement inférieur à 1, alors r^m tend vers 0 quand *m* tend vers l'infini). Autrement dit, voir apparaître *s* devient de plus en plus probable : à un moment ou à un autre, le singe écrit le texte de Shakespeare.



Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université des sciences et techniques de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

Jorge Luis BORGES, *Fictions*, éditions Gallimard, Paris, 1951.

Franck J. TIPLER, *The Omega Point as Eschaton : Answers to Pannenberg's Questions for Scientifics,* Zygon, vol. 24, n° 2, pp. 217-253, 1989.

David GALE, *Popular Mathematics*, in *Math. Intel.*, vol 14, n° 3, pp. 62-64, 1992 (pour une preuve de ce qui est affirmé sur 2*n*).

John D. BARROW et Franck J. TIPLER, *Is the Universe Big Enough to Contain all Possibilities?*, R.R. 1993.

Jean-Paul DELAHAYE, *Cinq classes d'idées,* chapitre 3 de *Information, complexité et hasard,* éditions Hermès, Paris, 1994.

Franck J. TIPLER, *The Physics of Immortality*, Doubleday, 1994.