

Logique et calcul

Jean-Paul Delahaye

Déconcertantes conjectures

Certaines énigmes concernant les nombres sont si étranges et difficiles que les passionnés n'hésitent pas, pour les résoudre, à faire tourner des programmes pendant des années.

Une question peut être simple et sa réponse d'une extrême difficulté, surtout en arithmétique : le devenir palindromique du nombre 196 en est un fascinant exemple. Il semble que l'origine du problème soit un article de Charles Trigg intitulé *Palindrome in addition* publié dans *Mathematics Magazine* en 1967 (vol. 40, pages 26-28), mais peut-être est-elle plus ancienne ?

Partant d'un nombre N écrit en base 10, on inverse l'ordre de ses chiffres et on ajoute à N ce nombre inversé. En recommençant si nécessaire plusieurs fois l'opération, on trouve généralement un nombre palindromique : un nombre identique qu'on le lise de droite à gauche ou de gauche à droite.

Pour $N = 13$, on obtient $13 + 31 = 44$, qui est un palindrome. Pour $N = 1048$, on obtient $1048 + 8401 = 9449$, qui est aussi un palindrome. Il est évident que si, durant l'addition, aucune retenue n'est rencontrée, alors on obtient un palindrome. Les

retenues gênent l'apparition d'un palindrome, mais elles ne les empêchent pas, comme le montre $29 : 29 + 92 = 121$.

Pour $N = 64$, le calcul ne marche pas du premier coup, car $64 + 46 = 110$, qui n'est pas un palindrome. En revanche, en recommençant à partir du résultat, 110 , on obtient $110 + 011 = 121$, qui est un palindrome. On remarque en passant que deux entiers différents, 29 et 110, conduisent en une étape de calcul au même palindrome 121.

Deux calculs ne sont parfois pas suffisants. Ainsi, pour $N = 87$, quatre étapes sont nécessaires : 1. $87 + 78 = 165$; 2. $165 + 561 = 726$; 3. $726 + 627 = 1353$; 4. $1353 + 3531 = 4884$.

Pour $N = 89$, le cheminement est long, car il faut faire le calcul 24 fois avant de trouver un palindrome (voir la figure 1).

En appliquant la procédure à tous les entiers jusqu'à 100, on arrive toujours à un palindrome, dans la grande majorité des cas après un petit nombre d'opérations. Il vient donc à l'esprit qu'il se pourrait bien qu'avec un peu de patience, tout entier positif N soumis répétitivement à l'opération renversement-addition produise un palindrome.

L'exception de 196

Pour s'assurer de l'affirmation, on considère les nombres un à un, dans l'ordre et, aidé d'un ordinateur, on mène le calcul systématiquement jusqu'à associer un palindrome à tout entier. Tout se passe bien... jusqu'à 196. Pour 196, même après 50 étapes, on n'a pas de palindrome. Au bout de 100 étapes : rien. Toujours aucun palindrome au bout de 1 000 étapes et même au bout d'un million d'étapes !

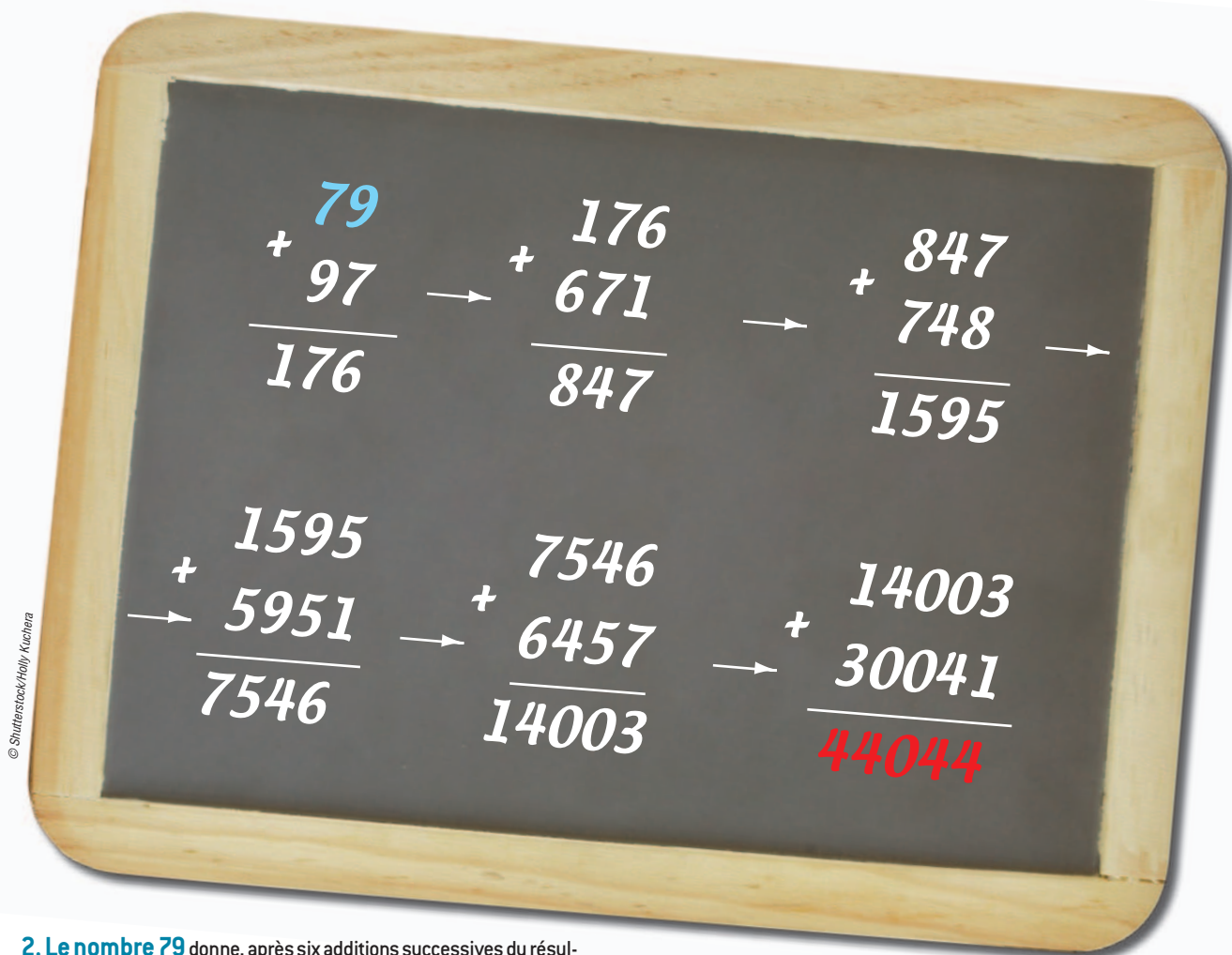
Les nombres obtenus en partant de 196 ont une taille qui s'allonge régulièrement. Wade Van Landingham, un passionné du problème et détenteur du record actuel de calcul pour cette itération a réussi l'exploit inouï de calculer plus de 700 millions d'étapes de renversement-addition à partir du nombre 196. Les entiers atteints possèdent plus de 300 millions de chiffres... mais aucun palindrome n'est apparu.

De tels calculs, on s'en doute, exigent un programme très intelligemment conçu et ajusté avec un soin minutieux, ainsi que beaucoup de patience pour le faire tourner longtemps. Les records actuels correspondent à une quête prolongée qui dure depuis plus de 20 ans. Les calculs ont tourné

1. La suite palindromique de 89

1. $89 + 98 = 187$; 2. $187 + 781 = 968$; 3. $968 + 869 = 1\ 837$; 4. $1837 + 7381 = 9218$; 5. $9218 + 8129 = 17347$; 6. $17347 + 74371 = 91718$; 7. $91718 + 81719 = 173437$; 8. $173437 + 734371 = 907808$; 9. $907808 + 808709 = 1716517$; 10. $1716517 + 7156171 = 8872688$; 11. $8872688 + 8862788 = 17735476$; 12. $17735476 + 67453771 = 85189247$; 13. $85189247 + 74298158 = 159487405$; 14. $159487405 + 504784951 = 664272356$; 15. $664272356 + 653272466 = 1317544822$; 16. $1317544822 + 2284457131 = 3602001953$; 17. $3602001953 + 3591002063 = 7193004016$; 18. $7193004 + 6104003917 = 13297007933$; 19. $13297007933 + 33970079231 = 47267087164$; 20. $47267087164 + 46178076274 = 93445163438$; 21. $93445163438 + 83436154439 = 176881317877$; 22. $176881317877 + 778713188671 = 955594506548$; 23. $955594506548 + 845605495559 = 1801200002107$; 24. $1801200002107 + 7012000021081 = 8813200023188$

(voir <http://www.jasondoucette.com/worldrecords.html>)



2. Le nombre 79 donne, après six additions successives du résultat de l'addition précédente et de son inverse, le palindrome 44044.

en continu pendant des années et, malgré l'incroyable augmentation de puissance de nos ordinateurs (la puissance d'un ordinateur pour une somme d'argent donnée durant ces 20 ans a augmenté d'un facteur 10 000), aucun n'a abouti à un palindrome en partant de 196. La figure 3 indique quelques détails sur les incroyables efforts de calcul réalisés pour savoir si 196 donnait un palindrome.

Sans réponse, conjecturons !

On est tenté de formuler une première conjecture :

Conjecture du palindrome inévitable

Tout nombre entier soumis de manière répétée à l'opération renversement-addition finit par produire un palindrome.

En même temps, l'expérience avec 196 donne quelques raisons de croire qu'il constitue un contre-exemple. On énonce donc une autre conjecture.

Conjecture du devenir infini de 196

Le nombre 196 soumis à l'opération renversement-addition ne produit jamais un palindrome.

Une des deux conjectures au plus est vraie. Les deux peuvent être fausses si 196 donne un palindrome, mais qu'un nombre autre que 196 n'en donne jamais.

Ce problème évoque la fameuse conjecture de Syracuse, nommée aussi problème de Collatz, qui est toujours sans solution. Dans cette conjecture, N est divisé par 2 s'il est pair, et remplacé par $3N + 1$ s'il est impair. Le nombre 5 devient ainsi 16, puis 8, puis 4, puis 2, puis 1. Est-ce que tout N finit

3. Le sort de 196

La longue quête d'un palindrome produit par 196 a ses héros, dont les noms sont gardés en mémoire par les amateurs passionnés de cette énigme. Voir : <http://www.jasondoucette.com/worldrecords.html#196> et <http://www.p196.org/>

John Walker entama la recherche d'un palindrome produit par 196 en août 1987 sur un ordinateur Sun 3/260. Son programme était écrit en langage C et il tournait lorsque la machine était inutilisée. À l'arrêt de la machine, le programme mémorisait le point où il en était arrivé et reprenait lorsque la machine était à nouveau mise en marche. Il fonctionna ainsi pendant trois ans atteignant le 24 mai 1990 le terme fixé par le programmeur avec un message indiquant que 2415836 itérations avaient conduit à un entier d'un million de chiffres, sans qu'aucun palindrome ne soit rencontré. Walker publia sur Internet

les détails sur son point d'arrêt, invitant d'autres programmeurs à poursuivre sa recherche au-delà du million de chiffres.

En 1995, Tim Irvin s'empara du défi et, utilisant un ordinateur puissant, il poussa le record à deux millions de chiffres en trois mois de calcul.

Jason Doucette prit la relève et atteignit 12,5 millions de chiffres en mai 2000.

Puis Wade Van Landingham utilisa le programme de J. Doucette et d'autres programmes ajustés pour aller de plus en plus vite. De 12,5 millions de chiffres, il poussa le calcul jusqu'à atteindre un entier de 300 millions de chiffres en mai 2006... toujours sans avoir jamais rencontré de palindrome. La quête semble aujourd'hui interrompue. Qui reprendra le flambeau ?

par donner 1 ? Cela a été constaté pour tous les entiers N jusqu'à $2^{62} = 4,61168 \times 10^{18}$, record atteint en janvier 2008 par Thomas Oliveira e Silva de l'Université de Aveiro au Portugal. L'affirmation qu'on arrivera toujours à 1 est la conjecture de Syracuse, l'un des thèmes de recherche favoris des mathématiciens amateurs et... de quelques professionnels.

Pour Syracuse, le programmeur obstiné espérera trouver un nombre de départ N qui conduira à un cycle : on revient à N après quelques étapes. Un calcul pourrait donc invalider la conjecture de Syracuse et rendre célèbre son auteur ! Une telle boucle est impossible avec l'itération renversement-addition, car les suites engendrées sont croissantes.

Dans le problème de l'itération renversement-addition, la recherche d'un palindrome par les amateurs qui procèdent à

des calculs prolongés pourra peut-être trancher la conjecture du devenir infini de 196 (si le calcul tombe sur un palindrome), mais les programmeurs n'ont aucun espoir de résoudre la conjecture du palindrome inévitable (contrairement à ce qui se passe pour la conjecture de Syracuse). Obtenir un palindrome en partant de 196 ne règlera pas la question pour l'infini des autres nombres, dont aucun calcul ne dira définitivement qu'ils aboutissent tous à un palindrome.

Le calcul ne sera pas suffisant

Pour résoudre la conjecture du palindrome inévitable, il faudra un raisonnement mathématique. En attendant, les nombres dont on ignore si l'opération renversement-addition conduit à un palindrome sont nommés nombres de Lychrel. L'origine de ce nom est assez obscure, mais sans doute liée au prénom Cheryl dont c'est l'anagramme.

La suite des nombres de Lychrel est la suite A023108 de l'encyclopédie des suites de Neil Sloane (<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>). En voici les 40 premiers éléments : 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, 1495, 1497, 1585, 1587, 1675, 1677, 1765, 1767, 1855, 1857, 1945, 1947, 1997, 2494, 2496, 2584, 2586, 2674, 2676, 2764, 2766, 2854, 2856, 2944, 2946, 2996, 3493.

Cette suite est différente des autres suites de l'encyclopédie de Sloane : elle est incertaine et sujette à modifications. Il se peut en effet que, grâce à un calcul aboutissant à un palindrome, l'un des nombres, par exemple 196, doive en être retiré. Pire, si la conjecture du palindrome inévitable est vraie, alors chaque nombre finira par être enlevé et la suite de Lychrel définitive sera vide !

Même s'ils ne peuvent résoudre la conjecture du palindrome inévitable, les calculs peuvent être utiles en suggérant un raisonnement simple qui donnera la réponse. Pour le comprendre, le cas de la base 2 est parfait, car la conjecture associée à cette base 2 a été résolue par la négative en s'aidant d'un calcul qui a guidé le raisonnement (voir la figure 4).

En partant de $N = 22$, qui s'écrit 10110 en base 2, on tombe sur une suite de nombres dont, avec un peu d'attention, on remarque qu'elle possède une régularité simple : un motif revient dans les chiffres toutes les quatre itérations. Le mathématicien, quand il a repéré cette régularité, la démontre facilement. Puisque dans le cas de la base 2, on sait prouver que $N = 22$ n'aboutit jamais à un palindrome, la conjecture du palindrome inévitable est fautive en binaire. Aujourd'hui seules les bases 2^i (avec $i > 0$), 11, 17, 20 et 26 ont été résolues, à chaque fois négativement, en découvrant un nombre de départ dont on a prouvé par le raisonnement qu'il ne donne jamais de palindrome.

Les cas résolus n'indiquent rien concernant la base 10. Les passionnés ont donc mené une étude détaillée de l'opération renversement-addition pour tenter d'y voir clair et pour peut-être en repérer des propriétés conduisant à résoudre les conjectures du palindrome inévitable et du devenir de 196.

Plusieurs milliers de nombres de Lychrel ont été découverts par l'exploration systématique de milliards de nombres. Le principe de ces recherches est de se fixer une borne M ,

4. Conjecture fautive en base 2 !

Le cas de la base 2 montre qu'il ne faut pas désespérer de résoudre le cas de la base 10 par le raisonnement. Le nombre 22 s'écrit 10110 en base 2. L'addition avec le nombre renversé donne :

$$\begin{array}{r} 10110 \\ + 01101 \\ \hline \end{array}$$

$$100011$$

Quand on recommence le calcul, la suite des résultats est :

$$10110$$

$$100011$$

$$1010100$$

$$1101001$$

$$10110100$$

$$11100001$$

$$101101000$$

$$110010101$$

$$1011101000$$

$$1101000101$$

$$10111010000$$

$$11000101101$$

$$101111010000$$

$$110010001101$$

$$10111101000000$$

$$1100001011101$$

$$101111101000000$$

$$11000100011101$$

$$1011111010000000$$

$$110000010111101$$

$$10111111010000000$$

$$110000100011101$$

$$101111110100000000$$

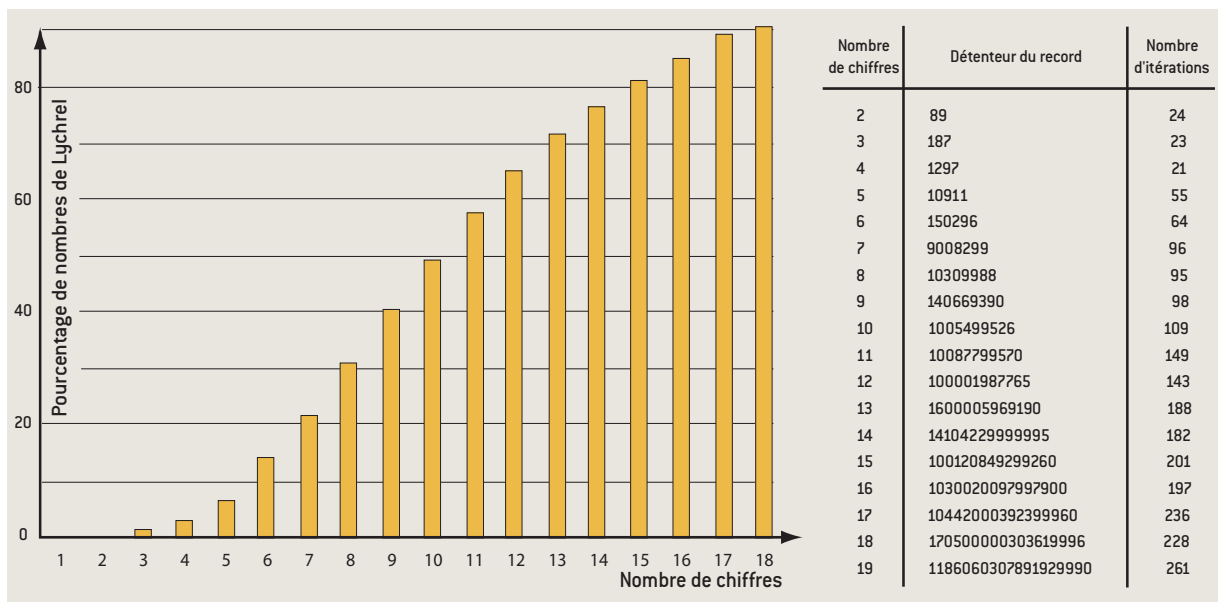
$$1100000010111101$$

$$1011111110100000000$$

...

On remarque que toutes les 4 étapes un même schéma se reproduit. Ce schéma, dont on prouve sans mal qu'il se poursuit jusqu'à l'infini, ne comporte aucun palindrome. Il n'y a donc aucun palindrome dans la suite engendrée en binaire à partir de 22 par l'opération renversement-addition.

Des raisonnements analogues dus à David Seal conduisent de la même façon à trouver des suites infinies sans palindrome pour les bases de la forme 2^i pour tout $i > 0$ et pour les bases 11, 17, 20 et 26. Voir : <http://www.mathpages.com/home/dseal.htm>



5. Pourcentages de nombres de Lychrel en fonction du nombre de chiffres des nombres testés (à gauche) et records du plus grand nombre d'itérations en fonction du nombre de chiffres avant d'arriver à un palindrome, quand on l'atteint (à droite).

en général assez petite, et d'effectuer l'opération renversement-addition M fois, en considérant temporairement que si, après M étapes, on n'a pas atteint un palindrome, c'est qu'on en trouvera jamais et donc que l'entier N dont on est parti est vraisemblablement un nombre de Lychrel.

Recherche et décompte des nombres de Lychrel

Le graphique de la figure 5 indique, pour les entiers N ayant 1 chiffre, 2 chiffres, 3 chiffres, ..., 18 chiffres, le pourcentage d'entre eux n'ayant jamais atteint un palindrome en un nombre raisonnable d'itérations, et qu'on s'autorise (temporairement) à considérer comme des nombres de Lychrel. (voir <http://www.jasondoucette.com/worldrecords.html>)

Ces tableaux permettent-ils de formuler des pronostics sérieux concernant la conjecture du palindrome inévitable ? Le fait d'avoir calculé en partant de 196 pendant plusieurs centaines de millions d'étapes sans jamais rencontrer de palindrome rend-il probable que 196 n'en donnera jamais ? On est tenté de répondre oui ! Pourtant, un calcul fini est toujours dérisoire en regard de l'infini des itérations qu'il reste à faire. Il est délicat d'affirmer que le palindrome ne peut pas apparaître ou même que, dans l'infini des calculs restants, cela est improbable ; cette impossibilité de conclure concernant 196 s'étend bien sûr à tous les nombres qui, pour l'instant, n'ont pas donné de palindromes. En conséquence, même si l'augmentation de la proportion apparente de nombres de Lychrel est régulière et sensible, elle ne permet pas d'affirmer de manière sérieuse que la conjecture du palindrome inévitable est « probablement fausse ».

Une série complémentaire de calculs de renversement-addition a été menée pour déterminer le nombre maximal d'interactions nécessaires pour atteindre un palindrome. Le

nombre 89 cité plus haut est exceptionnel : parmi tous les nombres inférieurs à 10 000 dont on a prouvé qu'ils donnent des palindromes, il est le plus lent à produire son palindrome (24 étapes de calcul).

Le tableau des durées maximum et des nombres records trouvés aujourd'hui, pour tous les entiers à 2 chiffres, puis pour tous les entiers à 3 chiffres, etc. (voir <http://www.jasondoucette.com/pal/89>) est donné sur la droite de la figure 5. Le calcul pour les entiers à 19 chiffres n'a pas été terminé : il attend un programmeur intelligent et patient.

Ce tableau, comme la liste de nombres de Lychrel, est temporaire : rien n'interdit de penser qu'en prolongeant le calcul pour 196 on aboutira à un palindrome qui ferait de 196 un record nouveau surpassant tous les records connus aujourd'hui. On remarque dans le tableau que le délai avant d'atteindre un palindrome n'est jamais très long. Le record actuel, trouvé à la suite de milliers d'heures de calcul, n'est que de 261 étapes. Plus un calcul dure longtemps, plus les nombres manipulés sont grands et donc moins il est probable que le nombre calculé soit un palindrome. Le tableau suggère « expérimentalement » que si l'apparition d'un palindrome ne se produit pas rapidement, elle risque fort de ne pas survenir du tout.

Doit-on maintenant en conclure que la conjecture du palindrome inévitable est probablement fausse ? Je n'en suis pas certain, toujours pour la même raison élémentaire : tenter sa chance une infinité de fois, même si les chances sont petites et diminuent, peut donner une probabilité élevée de réussite, voire une certitude. Je sais que si je lance une pièce pendant longtemps, je tirerai une série de 100 piles.

Laissons aux amateurs passionnés la joie de mettre au service de leur curiosité et de leurs recherches quelque peu déraisonnables les nouvelles machines et moyens distribués de calcul et évoquons maintenant une série toute nouvelle de conjectures étranges découvertes à l'aide d'ordinateurs qui suscitent déjà bien des curiosités, car elles concernent les nombres premiers.

7. Variante d'une conjecture

Une découverte concernant la suite de nombres premiers publiée tout récemment mérite un peu d'attention. L'ancienne conjecture de Proth-Gilbreath – toujours non démontrée – affirme que lorsque l'on réalise le tableau suivant, le premier nombre de chaque ligne (sauf la première) est un 1.

Sur la première ligne du tableau, on écrit la suite des nombres premiers, puis on calcule la ligne N en faisant la différence des termes consécutifs de la ligne $n-1$, sans tenir compte du signe :

2	3	5	7	11	13	17	19	23	...
1	2	2	4	2	4	2	4	...	
1	0	2	2	2	2	2	2	...	
1	2	0	0	0	0	0	0	...	
1	2	0	0	0	0	0	0	...	

La conjecture de Proth-Gilbreath a été largement étudiée et vérifiée en 1993 par Andrew Odlyzko pour les 3.10^{11} premières lignes, ce qui est énorme !

Joseph Pe, reprenant la même idée, place sur la première ligne le carré des nombres premiers.

Il observe alors que le premier terme de chaque ligne est bien plus souvent un nombre premier qu'un nombre composé.

4	9	25	49	121	169	289	361	529	841	961	...
5	16	24	72	48	120	72	168	312	120	...	
11	8	48	24	72	48	96	144	192	...		
3	40	24	48	24	48	48	48	48	...		
37	16	24	24	24	0	0	...				
21	8	0	0	24	0	...					
13	8	0	24	24	...						

Sa conjecture est donc que « le premier terme de chaque ligne du tableau est plus d'une fois sur deux un nombre premier » ; précisément : « En considérant les N premiers débuts de ligne, on trouvera toujours plus de nombres premiers que de nombres composés. » On vérifie par exemple que 897 des 1 000 premières lignes commencent par des nombres premiers. D'autres tests valident la conjecture, mais pour l'instant, pas plus que la conjecture de Gilbreath, elle n'a été démontrée.

Voir <http://www.geocities.com/windmill96/enlightened/psd.html>

3, 19, 29, 3, 5323, 7, 5, 3, 31139561, 3, 41, 3, 5, 3, 62279171, 3, 7, 83, 3, 19, 29, 3, 1103, 3, 5, 3, 13, 7, 124559609, 3, 107, 3, 911, 3, 249120239, 3, 11, 3, 7, 61, 37, 179, 3, 31, 19051, 7, 3793, 23, 3, 5, 3, 6257, 3, 43, 11, 3, 13, 5, 3, 739, 37, 5, 3, 498270791, 3, 19, 11, 3, 41, 3, 5, 3, 996541661, 3, 7, 37, 5, 3, 67, 1993083437, 3, 5, 3, 83, 3, 5, 3, 73, 157, 7, 5, 3, 13, 3986167223, 3, 7, 73, 5, 3, 7, 37, 7, 11, 3, 13, 17, 3, ...

Un calcul prolongé confirme qu'on ne trouve que des nombres premiers dans la suite nettoyée de ses 1. On dispose donc d'un procédé élémentaire et inattendu pour engendrer une suite de nombres premiers dont certains sont assez vite grands. Cette constatation conduit à :

Conjecture de Matt Frank

La suite $f(n) - f(n-1)$ n'est composée que de 1 et de nombres premiers.

En janvier 2008, cinq ans après la découverte et la formulation de la conjecture, Eric Rowland, du Département de mathématiques de l'Université de Rutgers aux États-Unis, vient de la démontrer. La conjecture de Matt Frank est devenue le théorème d'Eric Rowland. E. Rowland a aussi réussi à éclaircir ce qui se passe lorsque l'on ne part pas de $f(1) = 7$. Pendant un certain temps, il se peut qu'on ne rencontre pas uniquement des 1 et des nombres premiers, mais arrive un point (qui dépend de la valeur utilisée à la place de 7) au-delà duquel on ne trouve plus que des 1 et des nombres premiers.

Tous les nombres premiers ?

L'étude des nombres premiers que donne le procédé de M. Frank montre que tout nombre premier (sauf 2) semble apparaître pourvu qu'on attende assez longtemps. Le plus petit nombre premier manquant autre que 2, quand on considère les 1 000 premiers nombres premiers que donne le procédé, est 191. L'affirmation qu'on obtient tous les nombres premiers sauf 2 n'est pas démontrée et il est à craindre qu'elle constitue une conjecture bien plus difficile que la première.

Conjecture d'Eric Rowland

À l'exception de 2, tout nombre premier apparaît dans la suite $f(n) - f(n-1)$.

D'autres suites s'inspirant de la suite de M. Frank ont été proposées et étudiées par Benoit Cloitre en février 2008. Il y a, on le voit, de quoi occuper les amateurs de calculs qui peuvent tenter de mettre en défaut les conjectures et en proposer de nouvelles s'inspirant du filon mit au jour par M. Frank. Les mathématiciens doivent de leur côté rechercher la démonstration des nouvelles conjectures qui viennent s'ajouter à celles déjà en attente !

Le travail conjoint de l'ordinateur et du cerveau humain dans l'exploration des mystères de l'arithmétique prend de nouvelles formes. S'il répond un peu mieux à certaines questions anciennes, c'est surtout à une multitude d'observations nouvelles non démontrées – les conjectures – qu'il donne naissance.

J.-P. DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

Sur la formule de Minac consulter : <http://www2.lifl.fr/~wegrzyno/FormulPrem/FormulesPremiers5.html>

Wikipedia, Lychrel numbers : http://en.wikipedia.org/wiki/Lychrel_number.

Mathpage, Digit Reversal Sums Leading to Palindromes, 2-2008 : <http://www.mathpages.com/home/kmath004.htm>

Charles W. TRIGG, Palindromes by Addition, in *Mathematics Magazine*, vol. 40-1, pp. 26-28, 1967.

Martin GARDNER, *Mathematical Circus*, pp. 242-245, 1979.

E. ROWLAND, A Simple Prime-Generating Recurrence, in *Abstracts Amer. Math. Soc.*, 29-1, 2008, p. 50 [Abstract 1035-11-986]. <http://arxiv.org/abs/0710.3217>

Benoit CLOITRE, On sequence related to primes, Communication personnelle, février 2008.

Joseph PE, On the absolute difference table of squares of primes, in *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 33-3-2004-2005, pp.176-179. Voir : <http://www.geocities.com/windmill96/enlightened/psd.html>