Jean-Michel Thiriet

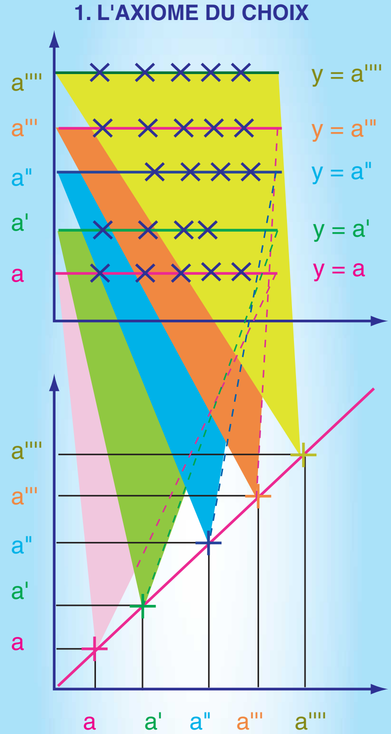
L'union fait la faiblesse

JEAN-PAUL DELAHAYE

Le cœur du paradoxe des paris groupés est-il l'axiome du choix, les probabilités nulles, le continu ou autre chose ? Ces paris infinis risquent de ruiner même les joueurs les plus rationnels.

Les paradoxes probabilistes sont troublants et celui proposé aux lecteurs dans le numéro de septembre dernier l'était tout particulièrement : en acceptant de prendre simultanément plusieurs paris favorables on obtenait un pari défavorable *(voir l'encadré 2 où le paradoxe est défini)*. Cela est parfaitement choquant : comment plusieurs paris, chacun vous faisant gagner de l'argent, peuvent-ils vous en faire perdre quand vous les prenez ensemble ?

1. L'AXIOME DU CHOIX



Selon une conséquence de l'axiome du choix, étant donné une infinité d'ensembles eux-mêmes infinis, ici les droites y = a, y = a', y = a'', etc., on peut constituer un nouvel ensemble, ici la première bissectrice, en prenant un représentant, ici le point *(a,a)* de chacun des ensembles de départ.

Cette petite merveille découverte récemment par Leonid Levin a suscité un volumineux courrier. Plusieurs lettres proposent des simplifications remarquables du paradoxe des paris groupés de Levin. Nous remercions les lecteurs qui nous ont fait part de leurs réflexions et nous nous excusons de ne pas leur répondre individuellement. Nous allons voir que les problèmes soulevés par ce paradoxe sont intéressants et que les enseignements qu'on doit en tirer sont très riches. Nous conclurons pourtant que la meilleure solution est en définitive simple, et j'avoue qu'elle m'a surprise.

Comme bien souvent pour résoudre un paradoxe logique, plusieurs solutions se présentent. À côté des solutions brutales (nous allons en énumérer plusieurs) qui résolvent le problème, mais ne s'adaptent pas à ses variantes – de telles solutions ne sont donc que partiellement satisfaisantes –, certaines solutions touchent le cœur de la contradiction.

Le problème de la traduction concrète

Il est bien certain que si une méthode de tirage au sort décrite dans un problème de pari reste confinée au monde mathématique et ne peut pas donner lieu à une expérience réelle, alors le paradoxe qu'on en tire n'est guère troublant, tout juste indique-t-il que certains faits du monde mathématique n'ont pas de traduction dans le monde réel, ce que nous savons tous (avez-vous déjà rencontré dans notre univers une ligne sans épaisseur, ou un ensemble infini ?).

La méthode proposée dans le paradoxe de Levin pour déterminer qui gagne et qui perd, à y regarder de près, ne peut donner lieu à aucun protocole physique de tirage. En effet Levin propose de choisir au hasard un nombre réel, *x*, puis à partir de ce nombre de déterminer qui gagne. Mais pour cela *x* doit être connu avec une infinie précision (afin de connaître la classe *c* des réels à laquelle rattacher *x*, il faut connaître toutes les décimales de *x*). Même lorsqu'on connaît un million de décimales de *x*, on ne sait toujours absolument rien de ce qui est gagné ou perdu (car le nombre *d* déterminé par *x* peut encore être n'importe quel nombre décimal).

La situation est différente de la suivante, où l'on convient de tirer au hasard un nombre réel entre 0 et 1, puis de décider que :

- si *x* est supérieur ou égal à 1/2, je gagne un euro ;
- si *x* est inférieur à 1/2, je perds un euro.

Dans un tel cas, dès que les premières décimales de *x* sont connues (par exemple 0,328) on sait qui a gagné, pas besoin de connaître *x* avec une infinie précision pour clore le pari. Il y a bien le cas *x* = 0,49999999… mais il possède une probabilité nulle de se produire et donc n'est pas gênant. Une méthode déterminant progressivement les décimales de *x* (par exemple en utilisant un dé à 10 faces) réalise physiquement ce type de pari qui, contrairement à celui de Levin, est effectuable.

On peut donc se débarrasser du paradoxe de Levin en disant : aucune traduction concrète n'est possible, donc il n'y a pas là un authentique paradoxe. De nombreux lecteurs ont proposé cette solution qui permet d'être tranquille… du moins dans un premier temps.

Michel Emery me signale qu'un théorème général dû à J.L. Doob exprime l'idée que seuls les paris possédant la propriété d'être approximables (le terme technique est *mesurables*) sont expérimentalement traduisibles. Un autre exemple de pari inapproximable est celui-ci : en lançant une fléchette sur une ligne je vais tomber sur un nombre irrationnel (non rapport de deux entiers). Les nombres irrationnels sont infiniment majoritaires et, donc, mathématiquement, je serais certain de gagner. Pourtant, à côté de chaque nombre irrationnel, aussi près qu'on le veut, il y a des nombres rationnels et on ne peut jamais savoir, même si l'on mesure de plus en plus précisément la position de la fléchette, qui gagne et qui perd à ce jeu.

L'idée suggérée dans le numéro de septembre que le paradoxe de Levin remettait en cause l'usage des variables continues en probabilités n'est pas à prendre au sérieux (heureusement !). En revanche le paradoxe de Levin montre que l'utilisation incontrôlée de variables continues et de paris non approximables est dangereuse ; la condition d'approximabilité qu'on impose aux fonctions utilisées en théorie des probabilités est, dans le fond, liée au sens concret expérimental de ce qu'on décrit dans le monde abstrait des mathématiques. La première utilité du paradoxe de Levin est de le mettre en évidence.

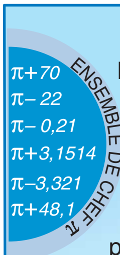
L'AXIOME DU CHOIX

L'impossibilité de traduire en expérience réelle le procédé décrit par Levin est le résultat de l'utilisation de l'axiome du choix et c'est lui ici qui introduit cette non mesurabilité fatale à la réalisation concrète. Détaillons cette idée intéressante, qui nous donne l'occasion de découvrir, sur un exemple, le rôle singulier de l'axiome du choix en mathématiques.

L'axiome du choix de la théorie des ensembles (le cadre général dans lequel toutes les mathématiques contemporaines se développent) indique que lorsque vous disposez d'une famille (finie ou infinie) d'ensembles non vides et disjoints deux à deux, vous pouvez prendre un représentant dans chaque ensemble et regrouper ces représentants en un nouvel ensemble (l'ensemble des représentants). Précisément l'axiome du choix affirme : pour toute famille d'ensembles non vides et disjoints deux à deux, *il existe* un ensemble de représentants. La figure 1 illustre l'axiome du choix dans un cas infini. Dans le plan considérons les ensembles constitués par les droites parallèles à l'axe des x, c'est-à-dire la famille infinie des droites D_a d'équation $y = a$. Un représentant de D_a est un point de D_a : on prend par exemple le point de coordonnées (a, a). L'ensemble C de tous les points (a, a) quand a varie, est un ensemble de représentants de la famille d'ensembles. Dans l'ensemble C, chaque droite est représentée une fois et une seule par le point de coordonnées (a, a). Ici nous avons explicité un ensemble de représentants, mais, même si nous ne l'avions pas explicité, l'axiome du choix nous aurait indiqué dans l'abstrait qu'il existait un tel ensemble de représentants.

L'opération de sélection – de choix – que permet l'axiome du choix semble anodine, et il apparaît étrange qu'un axiome particulier soit nécessaire pour assembler (on devrait dire «ensembler») les représentants d'une famille d'ensembles non vides. C'est pourtant le cas : les autres axiomes de la théorie des ensembles ne permettent pas d'obtenir un ensemble de représentants pour toute famille d'ensembles donnés, et c'est en s'apercevant de cette situation au début du XX^{e} siècle qu'on a proposé l'axiome du choix. (L'axiome du choix fut introduit en 1904 par Ernst Zermelo, il fut appelé un moment «principe de Zermelo», et il souleva dès son apparition une multitude de controverses).

2. LE PARADOXE DE LÉONID LEVIN



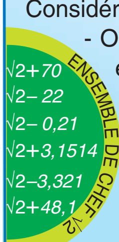
Les nombres décimaux sont ceux qui s'écrivent de manière finie en base 10, par exemple 1/2 = 0,5 ; – 3,3211 ; 0,00012 ; – 219,9 ; 75,54321. Notons D l'ensemble de tous les nombres décimaux (positifs ou négatifs). L'ensemble des nombres réels (cette fois les développements décimaux peuvent être finis ou infinis) peut être séparé en classes décimales : on constitue des paquets de nombres réels en mettant ensemble tout ceux dont la différence est un nombre décimal.

Dans une classe on regroupe : π ; $\pi + 0{,}5$; $\pi - 3{,}3211$; etc. ; Dans une autre classe on met $\sqrt{2}$; $\sqrt{2} + 0{,}5$; $\sqrt{2} - 3{,}3211$; etc.

Il y a une infinité de classes décimales et tout nombre réel appartient à une classe décimale et à une seule. Par commodité on choisit une fois pour toutes un chef (ou représentant de la classe) dans chaque classe décimale. La classe dont le chef est π est la classe de tous les nombres réels de la forme $\pi + d$ où d est un nombre décimal. On note C l'ensemble de tous les chefs de classe.

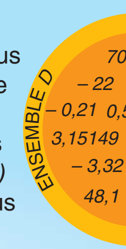
Les deux ensembles C et D ont la propriété suivante : tout nombre réel s'écrit de manière unique $c + d$, avec c dans C et d dans D.

Considérons le pari suivant que nous noterons P (0,7 ; 0,9) :



- On choisit un nombre réel x au hasard entre 0 et 1 et on écrit x sous le forme $c + d$, avec c dans C et d dans D ;
- Si le nombre choisi est de la forme $c + 0{,}7$, vous gagnez 2 F ;
- Si le nombre choisi est de la forme $c + 0{,}9$, vous perdez 1 F ;
- Sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Un tel pari vous est favorable car vous gagnerez aussi souvent que vous perdrez, mais lorsque vous gagnerez, vous gagnerez deux fois plus que lorsque vous perdrez.

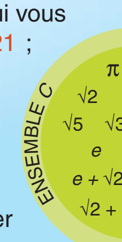


Plus généralement si d et d' sont deux nombres décimaux quelconques, on considère $P(d\ ;\ d')$ défini comme précédemment, un pari qui vous est favorable.

On vous propose maintenant un pari groupé, composé de paris du type précédent. Précisément on vous propose le pari P(0,235 ; 0,35) et tous les paris de la forme $P(d,d')$ comme par exemple le pari P(0,78432 ; 0,8432) où d' est obtenu en supprimant le premier chiffre après la virgule de d. Ce pari groupe des paris favorables, il est donc lui aussi favorable. Pourtant si vous acceptez ce pari groupé, vous allez vous en mordre les doigts car il vous est fortement défavorable.

En effet : supposons que le nombre réel tiré x soit de la forme $\pi + 0{,}321$. Faisons le bilan des paris gagnés et perdus :

- vous avez gagné le pari P(0,321 ; 0,21) ce qui vous rapporte 2 F ;
- vous avez perdu le pari P(0,0321 ; 0,321) ce qui vous coûte 1 F ;
- vous avez perdu le pari P(0,1321 ; 0,321) ce qui vous coûte 1 F de même que tous les paris P(0,2321 ; 0,321),P(0,3321 ; 0,321) ... P(0,9321 ; 0,321).



Au total vous avez perdu 10 paris (donc 10 F) et vous avez gagné 2 F. Le pari groupé vous coûte 8 F et cela est vrai à chaque tirage. (sauf dans le cas où le nombre choisi est 0 où vous perdez 10 F d'un coup). Comment pouvez-vous expliquer qu'un pari groupé de paris favorables soit défavorable?

Comme les géomètres, qui ont longtemps espéré démontrer l'axiome des parallèles à partir des autres axiomes de la géométrie, les logiciens ont souhaité démontrer l'axiome du choix à partir des autres axiomes de la théorie des ensembles. Et tout comme on a fini par prouver qu'il était impossible de déduire l'axiome des parallèles des autres axiomes de la géométrie, Paul Cohen, en 1963, a prouvé que l'axiome du choix ne se déduisait pas des autres axiomes de la théorie des ensembles.

ESSAYEZ DONC DE CONSTRUIRE *C*

Lorsque la famille est finie on peut réaliser le choix simultané par une succession de choix ponctuels : la traduction en termes expérimentaux de l'axiome du choix est donc sans problème dans le cas fini. En revanche, quand la famille est infinie, cette opération correspond à une infinité de choix opérés simultanément (ou successivement sur une durée infinie ce qui n'est pas réellement envisageable). Dans certain cas infinis (comme celui des droites) l'axiome du choix peut être contourné : on réussit à expliciter un ensemble de représentants sans utiliser l'axiome du choix qui dans un tel cas est donc superflu.

Ce n'est pas toujours le cas! Il se trouve que la construction de l'ensemble *C* (des représentants des classes décimales) de Leonid Levin correspond à un tel choix infini simultané qu'on ne peut faire sans utiliser l'axiome du choix (et c'est l'origine de l'incapacité où nous nous trouvons de fournir une traduction concrète du procédé de tirage défini par Levin). Jamais personne n'a proposé une construction d'un ensemble *C* dont il a prouvé qu'il était un ensemble de représentants des classes de Levin. Pour ceux qui sont étonnés, précisons en langage direct ce que serait un ensemble de représentants dans le cas des classes de Levin : ce serait un ensemble *C* de nombres réels tels que :

– si c et c' sont deux éléments distincts de *C* alors $c - c'$ n'est pas décimal (c'est-à-dire possède une écriture décimale infinie) ;

– pour tout nombre réel x, il existe un nombre c de *C* tel que $x - c$ est décimal (autrement dit tout x est la somme d'un certain c de *C* et d'un certain décimal d).

Si vous réussissez à expliciter un tel ensemble *C*, vous aurez fait une découverte importante.

En attendant, l'ensemble *C* est gênant : on peut en montrer l'existence par usage de l'axiome du choix, mais on ne peut pas décrire de manière explicite un ensemble *C* qui possède les propriétés voulues. D'autres gênes résultent de l'axiome du choix, qui est finalement un axiome dont on peut dire à la fois qu'il est évident (le bon sens pousse à l'accepter) et perturbant (si on l'accepte, on découvre des situations étonnantes, comme celle de *C*).

Notons que si on se limite aux moyens décrits par les axiomes de la théorie des ensembles sans l'axiome du choix, il est impossible de trouver un ensemble C : l'impossibilité de rendre concret le pari de Levin est donc non pas une impossibilité par ignorance, mais une impossibilité fondamentale et définitivement insurmontable (et donc le défi proposé aux lecteurs quelques lignes plus haut est impossible).

En résumé l'axiome du choix est un axiome singulier dont il faut se méfier car il introduit des objets mathématiques troublants et, en particulier, ouvre la porte à des situations mathématiquement bien définies, mais expérimentalement irréalisables. Les paradoxes qu'on obtient en l'utilisant sont sans grande importance concrète : l'axiome du choix est l'un de ces outils dont le mathématicien s'est doté et qui font du monde mathématique un monde différent du monde physique : plus amusant, mais quelque peu irréel.

Cependant… pour résoudre le paradoxe des paris groupés, évoquer l'axiome du choix est une facilité trompeuse car, comme plusieurs lecteurs me l'ont signalé, on peut très bien regrouper des paris gagnants et obtenir un pari perdant sans avoir à utiliser l'axiome du choix. Voici un exemple d'un tel paradoxe des paris groupés sans utilisation de l'axiome du choix proposé par Jacques Patarin (c'est un mathématicien spécialiste de

3. LE PARADOXE DE PATARIN

Accepter une infinité de paris gagnants peut conduire à un pari perdant. Voici l'exemple le plus simple d'une telle situation.

Pour chaque nombre réel x entre 0 et 1 on considère le pari $P(x)$ suivant :

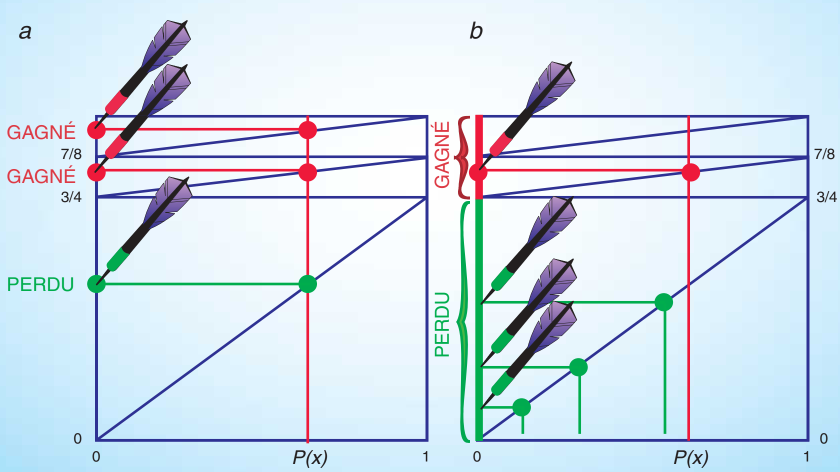
– on choisit un y entre 0 et 1 par un procédé de tirage uniforme, le lancement d'une fléchette par exemple.

– si $y = 3/4\ x$, je perds un Euro ;

– si $y = 3/4 + x/8$ ou si $y = 7/8 + x/8$ je gagne un Euro ;

– dans les autres cas personne ne gagne et personne ne perd.

Chaque pari $P(x)$ m'est favorable car trois points sont déterminés entre 0 et 1, dont deux me font gagner et *un seul* me fait perdre *(figure a)*.



Pourtant, si j'accepte de prendre ensemble tous les paris $P(x)$ (pour $x \geq 0$ et $x < 1$), c'est-à-dire le pari groupé pour toutes les valeurs de x, ce pari est perdant. En effet, analysons ce nouveau pari :

– on détermine un y entre 0 et 1 par un procédé de tirage uniforme (fléchette).

– on analyse quels sont les paris $P(x)$ qui me font gagner et quels sont ceux qui me font perdre. Pour chaque y tiré, un seul pari s'applique car pour toute valeur de y entre 0 et 1, y ne peut être égal qu'à un seul nombre de la forme $3x/4$ ou $3/4 + x/8$ ou $7/8 + x/8$ avec x entre 0 et 1. Et donc :

– si $y < 3/4$ j'ai perdu un pari pour $x = 4/3\ y$ et je n'en ai gagné aucun,

– si $y > 3/4$ j'ai gagné un pari pour $x = 8(y - 3/4)$ ou $x = 8(y - 7/8)$ et n'en ai perdu aucun *(figure b)*.

Je perds donc trois fois sur quatre car la fléchette tombera trois fois sur 4 dans l'intervalle [0,3/4]. Accepter simultanément tous les paris qui m'étaient favorables a pour conséquence un pari défavorable!

cryptographie et donc un expert des rapports délicats qu'entretiennent les mathématiques avec l'univers concret).

Les paris groupés sans axiome du choix

Le pari de Jacques Patarin est expliqué sur la figure 3. On y perd trois fois sur quatre alors que chaque pari individuel est favorable. Accepter simultanément tous les paris favorables produit un pari défavorable! L'axiome du choix n'est pas évoqué dans l'histoire. Rendre l'axiome du choix responsable du paradoxe de Levin constitue donc une solution illusoire : la variante de Jacques Patarin montre qu'un pari groupé de paris favorables peut être défavorable dans un monde sans axiome du choix.

Pari toujours nul

De nombreux lecteurs ont formulé une critique à l'encontre du paradoxe de Levin qu'on peut reprendre pour la version du paradoxe des paris groupés de Patarin. Quand on définit les paris élémentaires $P(x)$ les cas qui rapportent de l'argent et ceux qui en font perdre sont des cas de probabilité nulle. Dans le cas du paradoxe de Patarin le pari $P(1/2)$ par exemple fait perdre pour $y = 3/8$ et gagner pour $y = 13/16$ et $y = 15/16$, mais un nombre y tiré au hasard entre 0 et 1 a une probabilité nulle d'être précisément 3/8, ou 13/16 ou 15/16, et donc même si concrètement on peut réaliser les paris, jamais personne ne gagne ni ne perd.

Le paradoxe de Levin et le paradoxe de Patarin sont en réalité des situations où un pari groupé de paris nuls produit un pari perdant, ce qui est un peu choquant, mais moins que ce qui était annoncé. L'explication véritable de ces paradoxes semble donc résider dans l'usage d'événements de probabilité nulle. C'est l'analyse que plusieurs lecteurs ont proposée.

Cependant...

Samuel Monnier et quelques autres lecteurs ont découvert qu'une telle analyse est à nouveau une facilité illusoire, car si elle permet de se débarrasser des paradoxes des paris groupés vus jusqu'à présent, elle le fait à trop bon compte et ne s'applique pas à d'autres variantes. En définitive ni l'impossibilité de la réalisation concrète des paris, ni l'axiome du choix, ni l'usage de continu, ni l'utilisation d'événements de probabilité nulle ne sont au cœur du paradoxe des paris groupés.

Voyons le paradoxe de Monnier qui est une étonnante version «purifiée» du paradoxe de Levin. Les paris élémentaires sont construits à partir du tirage au sort d'un nombre entier par un procédé qui attribue une probabilité de 1/2 au tirage de 0, de 1/4 au tirage de 1, de 1/8 au tirage de 2, etc.

Un tel tirage de nombres entiers peut être physiquement réalisé en lançant une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'elle produise Pile et en comptant le nombre de Face qu'on aura obtenu avant d'avoir Pile. Si Pile sort au premier lancé, ce qui a une probabilité 1/2 d'arriver, l'entier produit est 0 ; si Pile sort au second coup (sans être sorti au premier, c'est-à-dire FP), ce qui a une probabilité 1/4 de se produire, l'entier obtenu est 1 et ainsi de suite.

À partir de ce tirage (non uniforme) d'entiers, on définit une infinité de paris (que j'exprime en Francs car les Euros sont encore pour la plupart d'entre nous une abstraction et je veux que chacun perçoive concrètement la force du paradoxe).

Le paradoxe de Monnier est fondé, comme un autre paradoxe célèbre, dit de Saint Petersbourg, sur le moment de la première apparition d'un Pile dans une série de lancers. Les règles du jeu explicitées sur la figure 4 font que, alors que je gagne chaque pari indépendamment, je perds, en groupant les paris, un franc systématiquement. Cette version purifiée du paradoxe de Levin n'est-elle pas extraordinaire?

4. Le paradoxe de Monnier

Le paradoxe de Monnier se base sur le tirage au hasard d'un nombre entier qui est le nombre de tirages Face (F) qu'on doit faire avant d'obtenir Pile (P). Si Pile est obtenu du premier coup (probabilité 1/2) l'entier tiré est 0 ; si Pile est obtenu au second coup après un tirage Face (probabilité 1/4) l'entier tiré est 1, si Pile sort au troisième coup, l'entier tiré est 2, etc... Monnier définit ainsi une infinité de paris.

J.-M. Thiriet

- **Pari 0** Si c'est l'entier 0 (P) qui sort, je perds 1 franc ; si c'est l'entier 1 (FP) qui sort, je gagne 3 francs ; sinon personne ne gagne, personne ne perd.
- **Pari 1** Si c'est l'entier 1 (FP) qui sort, je perds 4 francs ; si c'est l'entier 2 (FFP) qui sort, je gagne 9 francs ; sinon personne ne gagne, personne ne perd.
- **Pari 2** Si c'est l'entier 2 (FFP) qui sort, je perds 10 francs ; si c'est l'entier 3 (FFFP) qui sort, je gagne 27 francs ; sinon personne ne gagne, personne ne perd.
- **Pari n** Si c'est l'entier n (FFF...P) qui sort, je perds $3^n + 1$ francs ; si c'est l'entier $n+1$ (FFF...FP) qui sort, je gagne 3^{n+1} francs ; sinon personne ne gagne, personne ne perd.

Chaque pari est gagnant, car même si $n+1$ a deux fois moins de chances d'être obtenu que n, ce qu'on gagne quand $n+1$ sort est plus que deux fois supérieur à ce que l'on perd quand n sort : $3^{n+1} > 2(3^n + 1)$. Chaque pari permet de gagner, en moyenne : $(3^{n+1} - 2(3^n + 1))/2^{n+2}$ francs, soit $(3^n - 2)/2^{n+2}$ francs, valeur qui tend vers l'infini quand n augmente. Puisque tous les paris sont gagnants, on peut penser qu'accepter tous les paris ensemble constituera encore un pari gagnant… mais ce n'est pas du tout ce qui se produit : quel que soit l'entier n tiré on perd un franc.

– Si le 0 (P) sort (ce qui se produit une fois sur deux) j'ai perdu le pari 0 et je n'ai gagné aucun pari : au total j'ai perdu 1 franc ;

– Si le 1 sort (FP) (ce qui se produit une fois sur quatre) j'ai gagné le pari 0 qui me rapporte 3 Francs et perdu le pari 1, ce qui me coûte 4 francs : j'ai donc perdu un franc ;

– Si le 2 sort (ce qui se produit une fois sur huit) j'ai gagné le pari 1 qui me rapporte 9 francs et perdu le pari 2, ce qui me coûte 10 Francs : j'ai donc perdu un franc. Etc...

Des matrices à rendre fou les comptables

Le sens de ce dernier paradoxe de paris groupés est que la solution véritable, et l'explication ultime du paradoxe de Levin, est la fausseté de la prétendue loi des paris groupés («accepter simultanément des paris gagnants constitue un pari gagnant»). Même si elle est vraie et évidente dans le cas fini, cette loi est fausse dans le cas infini.

Mais d'où cela provient-il ? Le calcul de l'espérance (le gain moyen) d'un pari

5. LES MATRICES QUI RENDENT FOUS LES COMPTABLES

A. La matrice infinie de Monnier

Matrice des gains moyens (ou *espérances*) du pari groupé de Monnier : à chaque ligne correspond un pari élémentaire, à chaque colonne correspond un entier tiré. Les sommes gagnées ou perdues sont multipliées par $1/2^{n+1}$ dans la colonne n, puisque n a une probabilité $1/2^{n+1}$ d'être tiré.

0	1	2	3	...	n	$n+1$	Espérance pari n
–1/2	3/4	0	0	···	0	0	1/4>0
0	–4/4	9/8	0	···	0	0	1/8>0
0	0	–10/8	27/16	···	···	···	7/16>0
0	0	0	–28/16	···	···	···	25/32>0
···	···	···	···	···	···	···	···
···	···	···	···	···	$-(3^n+1)/2^{n+1}$	$3^{n+1}/2^{n+2}$	$(3^n-2)/2^{n+2}>0$
Espérance de gain par colonne							
–1/2	–1/4	–1/8	–1/16		$-1/2^{n+1}$	$-1/2^{n+2}$	
Gain lorsque n (pile) sort							
–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	

Le fait que les coefficients de chaque ligne ont une somme strictement positive signifie que chaque pari est gagnant individuellement. Le fait que la somme de chaque colonne est négative signifie que tout tirage conduit à une perte pour le pari groupé.

B. La matrice parfaite du comptable fou

Voici la matrice la plus simple ayant la propriété que la somme de chaque ligne est positive (exactement 1), et la somme de chaque colonne est négative (exactement –1).

0	1	2	3	...	$n-1$	n	Espérance pari n
–1	2	0	0	···	0	0	1
0	– 3	4	0	···	0	0	1
0	0	– 5	6		···	···	1
0	0	0	– 7	8	···	···	1
···	···	···	···	···	···	···	···
···	···	···	···	···	$-(2n-1)$	$2n$	1
						$-2(n+1)$	1
Espérance de gain par colonne							
–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	

Pour en tirer un pari groupé paradoxal on fait apparaître les probabilités 1/2, 1/4,…. $1/2^n$

0	1	2	3	...	$n-1$	n	Espérance pari n
–2/2	8/4	0	0	···	0	0	1
0	–12/4	32/8	0	···	0	0	1
0	0	–40/8	96/16	···	···	···	1
···	···	···	···	···	···	···	1
					$-(2n-1)2^n/2^n$	$-2n\,2^{n+1}/2^{n+1}$	1
···	···	···	···	···	···	$-(2n+1)2^{n+1}/2^{n+1}$	
Espérance de gain par colonne							
–1	–1	–1	–1	···	–1	–1	
Gain quand n sort							
–2	–4	–8	–16	···	-2^n	-2^{n+1}	

Pari 0 : Si 0 est tiré, je perds 2 F, si 1 est tiré, je gagne 8 F.
Pari 1 : Si 1 est tiré je perds 12 F, si 2 est tiré je gagne 32 F.
Pari 2 : Si 2 est tiré je perds 40 F, si 3 est tiré je gagne 96 F…
Pari n : Si n est tiré je perds $(2n+1)2^{n+1}$ F, si $n+1$ est tiré je gagne $(2n+2)\text{x}2^{n+2}$ F.
Chaque pari rapporte un gain moyen de 1 Franc et pourtant chaque colonne crée une perte moyenne de 1 Franc (lorsque n est tiré je perds 2^{n+1} Francs).

C. La matrice parfaite du parieur fou

La matrice suivante, proposée par Roland Yéléhada, conduit au paradoxe de pari groupé le plus fou : pour chaque pari on gagne en moyenne un Franc par tirage et pour le pari groupé, on perd un Franc par tirage.

0	1	2	3	...	n	$n+1$	Espérance pari n
–1/2	6/4	0	0	···	0	0	1
0	–7/4	11/4	0	···	0	0	1
0	0	–23/8	···	···	···	···	1
···	···	···	···	···	···	···	1
					$-n-1+1/2^{n+1}$	$(n+2)-1/2^{n+1}$	1
···	···	···	···	···	···	$-(n+2)+1/2^{n+2}$	1
Espérance de gain par colonne							
–1/2	–1/4	–1/8	–1/16	···	$-1/2^{n+1}$	$-1/2^{n+2}$	1
Gain quand n sort							
–1	–1	–1	–1	···	–1	–1	

Pari 0 : Si 0 est tiré je perds 1 F, si 1 est tiré je gagne 6 F.
Pari 1 : Si 1 est tiré je perds 7 F, si 2 est tiré je gagne 11 F.
Pari 2 : Si 2 est tiré je perds 23 F, si 3 est tiré je gagne 31 F…
Pari n : Si n est tiré je perds $(n+1)2^{n+1}-1$ F, si $n+1$ est tiré je gagne $(n+2)2^{n+2}-2$ F.

D. Ludovic Galant empire encore le paradoxe

Ludovic Galant propose la matrice suivante :

0	1	2	3	4	···	Espérance pari n
3/2	–1/4	–1/8	–1/16	–1/32	···	1
–1/2	7/4	–1/8	–1/16	–1/32	···	1
–1/2	–1/4	15/8	–1/16	–1/32	···	1
–1/2	–1/4	–1/8	31/16	–1/32	···	1
···	···	···	···	···	···	1
Espérance de gain par colonne						
– infini	– infini	– infini	– infini	– infini		

Les paris correspondants sont les suivants :
Pari 0 : Si 0 est tiré je gagne 3 Francs, si une autre valeur est tirée je perds 1 F.
Pari 1 : Si 1 est tiré je gagne 7 F, si une autre valeur est tirée je perds 1 F.
Pari 2 : Si 2 est tiré je gagne 15 F, si une autre valeur est tirée je perds 1 F...
Pari n : Si n est tiré je gagne $(2^{n+2}-1)$ F, si une autre valeur est tirée je perds 1 F.
Gain moyen du pari n :
$(2^{n+2}-1)/2^{n+1} - (1-1/2^{n+1}) = 2 - 1/2^{n+1} - 1 + 1/2^{n+1}) = 1$
Tout pari donne un gain moyen de 1 Franc, mais à chaque fois qu'un entier est tiré je perds une fortune infinie (si n sort je gagne $(2^{n+2}-1)$ F et je perds une infinité de fois 1 F).

simultané infini se fait en faisant la somme des colonnes d'une matrice infinie et en additionnant le résultat de toutes les colonnes *(voir la figure 5)*. L'évaluation de l'intérêt de chaque pari se fait, lui, en calculant la somme des éléments d'une ligne donnée de la même matrice. Or il existe des matrices dont la somme des éléments de chaque ligne est strictement positive, et dont pourtant la somme des éléments de chaque colonne est négative. Ces matrices paradoxales qui rendraient fou les comptables d'un monde où l'infini serait une réalité (en additionnant par lignes ils ne vérifieraient pas ce qu'ils obtiennent en additionnant par colonnes) sont liées aux séries doubles où un changement de l'ordre des sommations change le résultat, ou, ce qui revient au même, aux séries dont la somme dépend de l'ordre dans lequel on additionne les termes (séries convergentes, non absolument convergentes).

Une fois repérée l'origine profonde du paradoxe on peut en construire d'autres. Le plus pur est celui *(voir la figure 5)* où chaque pari individuel donne un gain moyen de 1 Franc, et où pourtant chaque tirage du pari groupé fait perdre exactement 1 Franc. Un autre proposé par un lecteur est tel que chaque pari individuel donne un gain moyen de 1 Franc et où, pourtant, chaque tirage du pari groupé fait perdre une fortune infinie.

PROMESSES INTENABLES

On remarquera quand même que, dans tous ces paris infinis paradoxaux, les sommes engagées dans les paris tendent vers l'infini lorsque le numéro du pari tend vers l'infini. Une personne honnête, qui refuserait d'engager des paris qu'elle n'est pas en mesure de payer quand elle les perd, devrait donc refuser de s'engager dans tous les paris à la fois (elle ne dispose évidemment que d'une fortune finie). Un tel parieur scrupuleux serait ici protégé contre le paradoxe : ne prenant qu'un nombre fini de paris favorables et refusant ceux hors de portée de sa bourse, il s'engagerait dans un pari gagnant (puisque la loi des paris groupés est vraie dans le cas fini). Contrairement au monde politique actuel, le monde des paris groupés favorise l'honnêteté…

Les séries non absolument convergentes sont le cœur du paradoxe des paris groupés et ne sont qu'une des manifestations du risque qu'on prend toujours en mathématiques quand on généralise un résultat – aussi évident soit-il – démontré dans le cas fini au cas de données infinies : il n'y a pas de théorème des paris groupés dans le cas infini, il n'y en aura jamais. Qu'on se le dise.