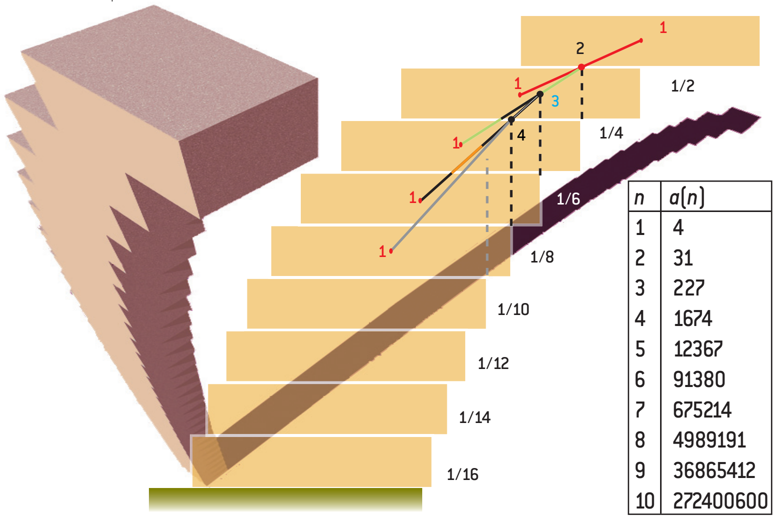
Jean-Paul Delahaye

Surplombs maximaux

La recherche du surplomb maximum qu'autorise un empilement de briques, de dominos ou de sucres est un subtil problème d'équilibre. On vient juste de le résoudre et de trouver une solution inattendue.

Nous nous sommes tous amusés à empiler des sucres, des dominos ou des briques. Un défi est d'obtenir un surplomb aussi grand que possible et l'extraordinaire est qu'il peut être aussi grand que l'on veut avec la méthode suivante : le sucre le plus élevé est décalé de la moitié de sa longueur par rapport à celui juste en dessous, qui lui-même est décalé de 1/4 par rapport au précédent, lui-même décalé de 1/6, etc. Si la pile comporte n briques, le décalage du sommet par rapport à la base est *(voir la figure 1)* : $1/2 + 1/4 + 1/6 + ... + 1/(2n) = 1/2\ (1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n)$.

La somme des n premiers termes de la série nommée « harmonique », 1 + 1/2 + 1/3 + ... , vaut à peu près ln(n) et tend, lentement, mais sûrement, vers l'infini. En prenant assez de briques, le sommet d'une pile « logarithmique » se trouve donc en surplomb d'une longueur aussi grande qu'on le désire par rapport à la base : 1 000 longueurs de brique par exemple.



n	$a(n)$
1	4
2	31
3	227
4	1674
5	12367
6	91380
7	675214
8	4989191
9	36865412
10	272400600

1. Pile de briques en équilibre : le centre de masse des n briques supérieures (de poids n) et de la brique $n + 1$ (de poids 1) est à l'aplomb de l'extrémité de la brique $n + 2$. Le surplomb d'une brique n par rapport à la brique inférieure $n + 1$ est de $1/(2n)$ pour des briques de longueur unité. Le tableau indique le nombre de briques nécessaires $a(n)$ pour que l'on obtienne un surplomb de longueur n par la méthode de l'empilement logarithmique.

Avec quatre briques, le surplomb dépasse 1, car 1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 = 1,041 ; avec 31 briques, il dépasse 2. Pour un surplomb plus grand que 3, il faut 227 briques, et pour un surplomb de plus de 10, il faut réunir et disposer soigneusement 272 400 600 briques... Le nombre a (n) de briques nécessaires pour atteindre le surplomb n est donné par la suite A014537 de l'encyclopédie des suites de Sloane (http://www.research.att.com/~njas/sequences/A014537). Un petit calcul montre que pour augmenter la longueur du surplomb d'une brique, il faut multiplier le nombre de briques par environ e^2 = 7,389...

Qu'une telle pile tienne en équilibre et que l'on puisse ainsi, sans ciment, ni colle, ni vis ou boulon obtenir un surplomb aussi grand que désiré avec des parallélépipèdes homogènes surprend le bon sens. Martin Gardner, qui présenta cet empilement dans *Scientific American* en novembre 1964, le désigne par le « paradoxe du surplomb infini ».

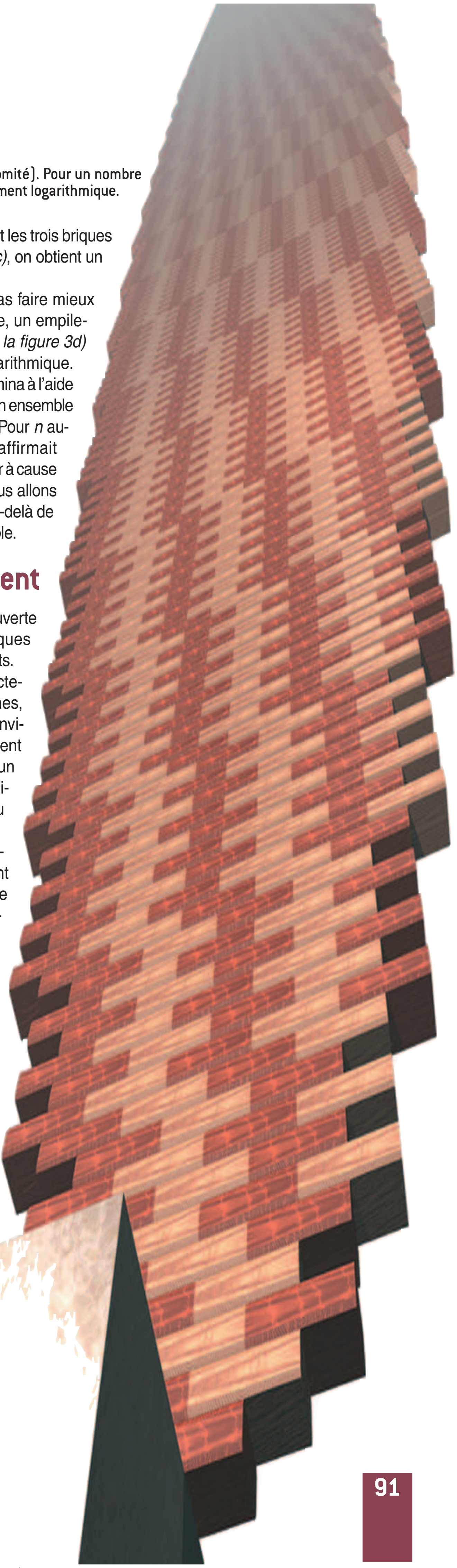
Bien sûr, on suppose que les briques sont indéformables. Si elles ne l'étaient pas, au-delà d'une certaine valeur de n, elles s'écraseraient et la pile tomberait. L'équilibre proposé est instable, le moindre souffle d'air ferait tout basculer, mais c'est sans importance, car à l'aide d'infimes déplacements de chaque brique, on peut rendre stable l'édifice en ne perdant qu'une partie infime du surplomb et donc sans interdire un surplomb aussi grand que désiré.

La question de savoir si cet empilement est le meilleur possible était considérée comme réglée, car un raisonnement élémentaire montre que si chaque brique est parallèle au sol, qu'elles sont parallèles entre elles et qu'il n'y a qu'une seule brique par niveau, alors un empilement de n briques donne au plus un surplomb de : $(1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ... + 1/n)/2$.

Peut mieux faire !

Récemment, plusieurs chercheurs se sont cependant posé la question : que se passe-t-il quand on accepte de placer plusieurs briques sur un même niveau ? Leurs recherches conduisent à des réponses étonnantes et à quelques problèmes nouveaux.

Tout d'abord, on peut faire mieux que la pile logarithmique. Ce fait, remarqué dès 1923 par J. Coffin, avait été semble-



2. Empilement parabolique infini (dessin de Francesco De Comité). Pour un nombre donné de briques, ce schéma donne un surplomb meilleur que l'empilement logarithmique.

t-il oublié. L'exemple des trois briques est le plus simple. En plaçant les trois briques sur deux niveaux pour former un triangle inversé *(voir la figure 3c)*, on obtient un surplomb de 1 qui est meilleur que 1/2 + 1/4 + 1/6 = 11/12.

Par tâtonnements, on s'assure facilement qu'on ne peut pas faire mieux avec trois briques. Pour quatre briques, la situation est similaire, un empilement sur trois niveaux *(voir la figure 3e)* au lieu de quatre *(voir la figure 3d)* permet de dépasser le surplomb de 25/24 de l'empilement logarithmique.

En 2005, John Hall, du *California Institute of Technology,* détermina à l'aide d'un programme les surplombs maximaux qu'on peut obtenir pour un ensemble de n briques, n variant de 2 à 19 *(voir les figures 3c* et *3e à 3r)*. Pour n au-delà de 19, J. Hall proposait d'autres configurations dont il affirmait qu'elles donnaient des surplombs maximaux. Or, il était dans l'erreur à cause d'une hypothèse fausse qu'il adoptait inconsciemment et que nous allons détailler plus loin : ses calculs ne donnaient pas le bon résultat au-delà de 19 et les surplombs obtenus étaient inférieurs à ce qui est possible.

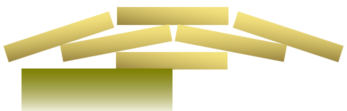
Équilibres sans frottement

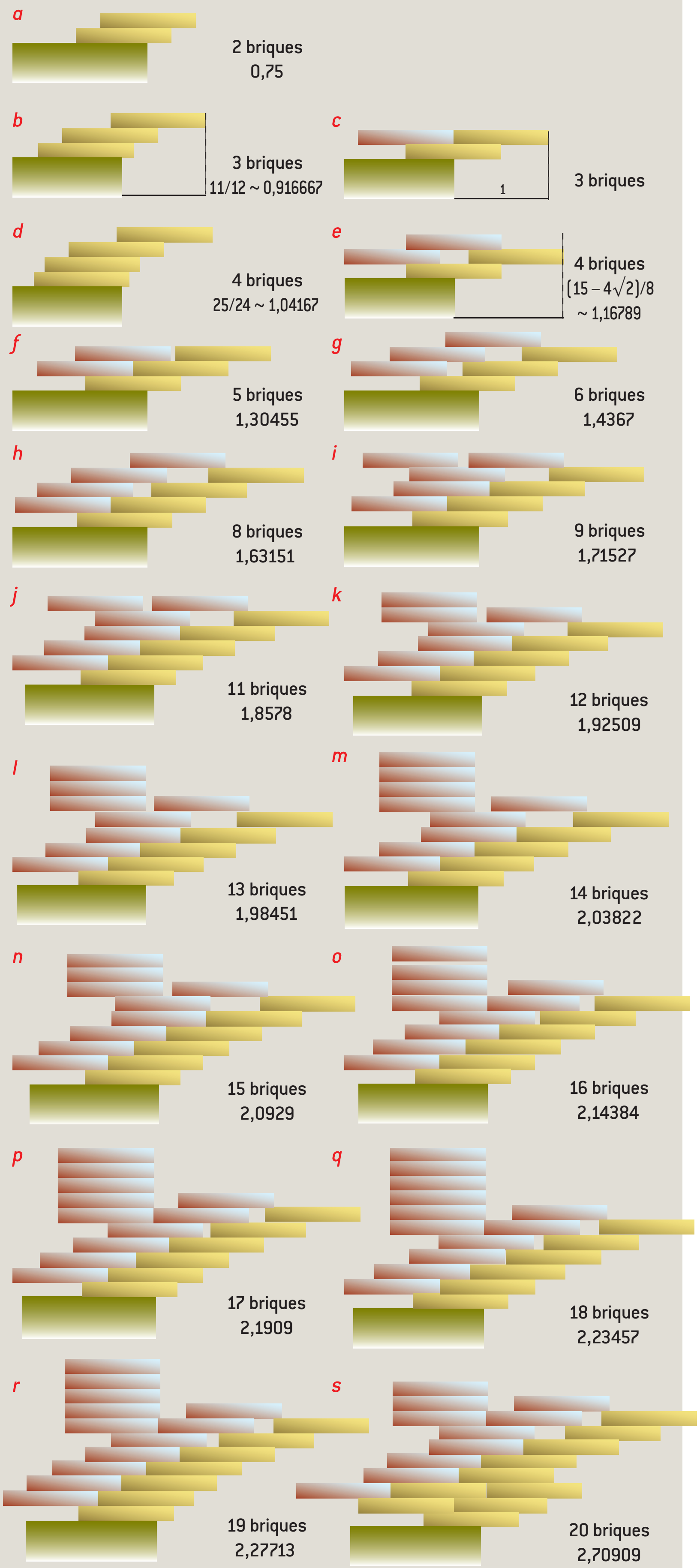
Avant d'examiner la subtile erreur de J. Hall et l'étonnante découverte faite en 2006 sur les empilements optimaux, précisons quelques hypothèses et détails physiques sur ces problèmes d'empilements.

Bien sûr, nous supposons que toutes les briques ont exactement la même forme et la même masse et qu'elles sont homogènes, ce qui place le centre de masse au centre de chacune. On n'envisage que des piles où toutes les briques sont placées parallèlement au sol et dans un même plan vertical (on est donc ramené à un problème à deux dimensions). Les piles considérées sont constituées d'une succession de niveaux, chacun comportant une ou plusieurs briques.

On fait aussi l'hypothèse qu'il n'y a aucune force de frottement entre deux briques posées l'une sur l'autre, ce qui revient à supposer que toutes les forces agissant sur les briques d'une pile sont verticales (vers le bas ou vers le haut). Cette hypothèse est importante, car certaines piles que nous refuserons de considérer comme stables le seraient avec des forces de frottement assez grandes. C'est le cas des triangles inversés, mais aussi des configurations extrêmes suivantes.

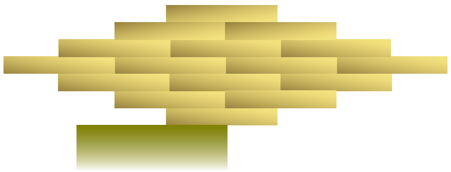
Le problème de l'équilibre d'une pile de briques demande un peu d'attention, car la chute peut provenir du fait que les forces s'exerçant sur une brique ne s'égalisent pas (exemple : une brique dans le vide) ou parce que les forces s'exerçant sur une brique la font pivoter (cas d'un moment non nul, *voir la figure 8*). C'est ainsi que la pile de six briques disposées en triangle inversé [1, 2, 3] n'est pas stable. Cette pile, contrairement au triangle [1, 2] mentionné plus haut, s'écroule.

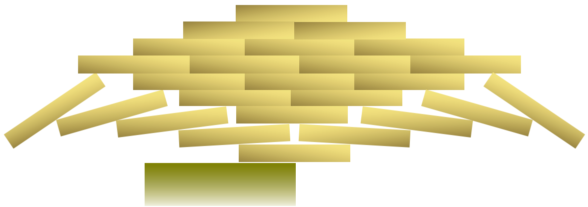




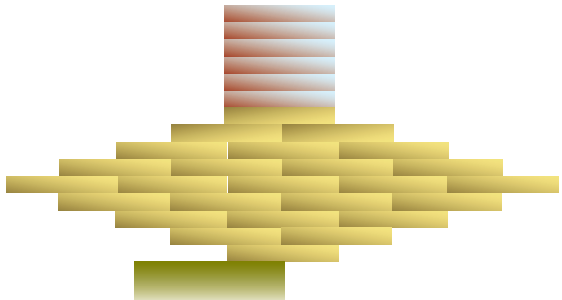
3. Les plus grands surplombs. Ces dispositions donnent les plus grands surplombs quand on dispose de 2 briques, de 3 briques... et enfin de 20 briques. Les surplombs maximaux s'obtiennent en mettant plusieurs briques par niveau. Pour *n* égal à 20, le bord droit de l'empilement revient en arrière. Ainsi, les empilements donnant un surplomb maximum ne sont pas toujours monotones !

Faites l'expérience ! Le « diamant » [1, 2, 3, 2, 1] est stable, tout comme le « diamant » [1, 2, 3, 4, 3, 2, 1]. En revanche, le diamant [1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1] s'écroule.



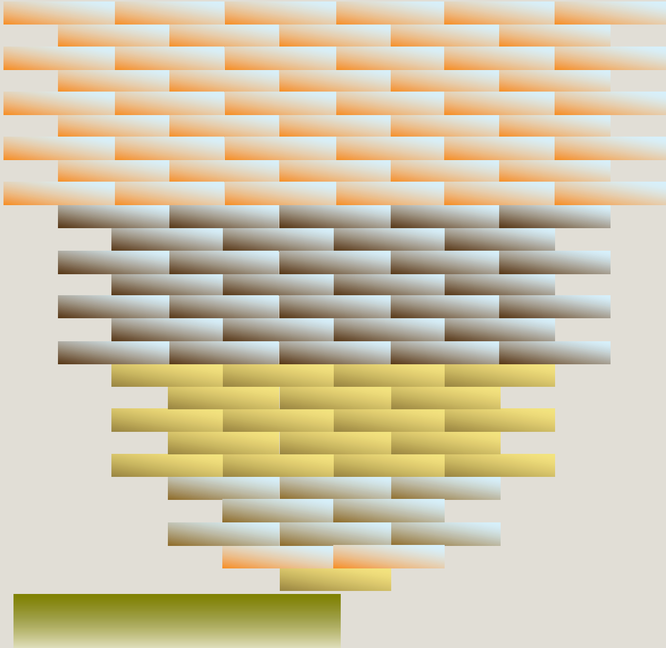


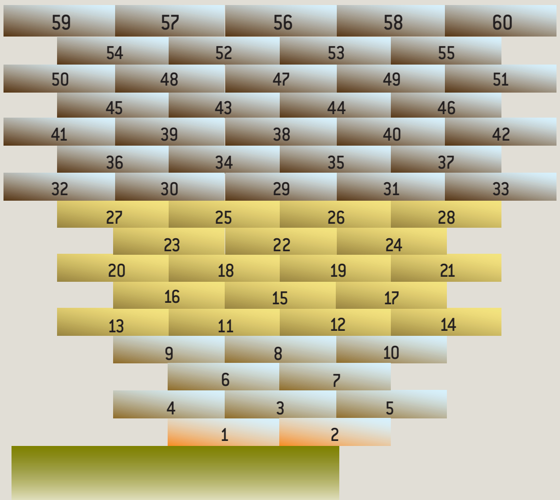
On peut quand même utiliser l'idée du diamant pour construire de beaux surplombs : on constitue un diamant-m [1, 2, ..., $m-1$, m, $m-1$, ..., 2, 1], puis on place au-dessus de la brique supérieure une pile verticale de briques aussi grande que nécessaire pour stabiliser le tout. Le nombre de briques nécessaires pour stabiliser le diamant-m a été calculé : c'est $2^m - m^2 - 1$. Cela permet d'obtenir un surplomb de $m/2$ avec une pile d'exactement $2^m - 1$ briques. Le surplomb obtenu avec le même nombre de briques disposées en pile logarithmique est plus court. En effet il vaut : $1/2\,(1+1/2+...+1/(2^m-1))$, soit environ $0{,}3465\,m$. L'idée simple du diamant surmonté d'une pile verticale donne déjà des surplombs meilleurs (pour un nombre donné de briques) que l'empilement logarithmique.



Dans le cas général, déterminer si une pile de briques est en équilibre est loin d'être simple *(voir l'encadré page 95)*. Pour une configuration fixée, cela conduit à résoudre un système d'équations et d'inéquations avec un assez grand nombre de variables. Pour n briques, il peut y avoir jusqu'à $4n$ variables et $6n$ égalités et inégalités. Les principes utilisés pour écrire ces équations résultent des lois de la statique et l'aide d'outils logiciels pour résoudre ces systèmes est indispensable. Pour trouver les configurations optimales d'un nombre n de briques, il faut essayer systématiquement une immense quantité de configurations : on ne connaît donc aujourd'hui les configurations optimales que pour les valeurs de n jusqu'à 40.

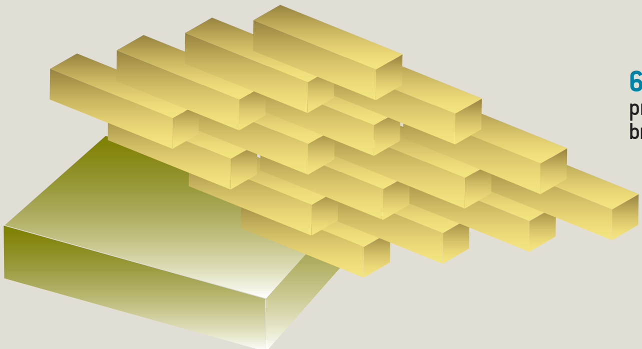
L'erreur de J. Hall corrigée en 2006 par les mathématiciens Mike Paterson et Uri Zwick était la supposition implicite que



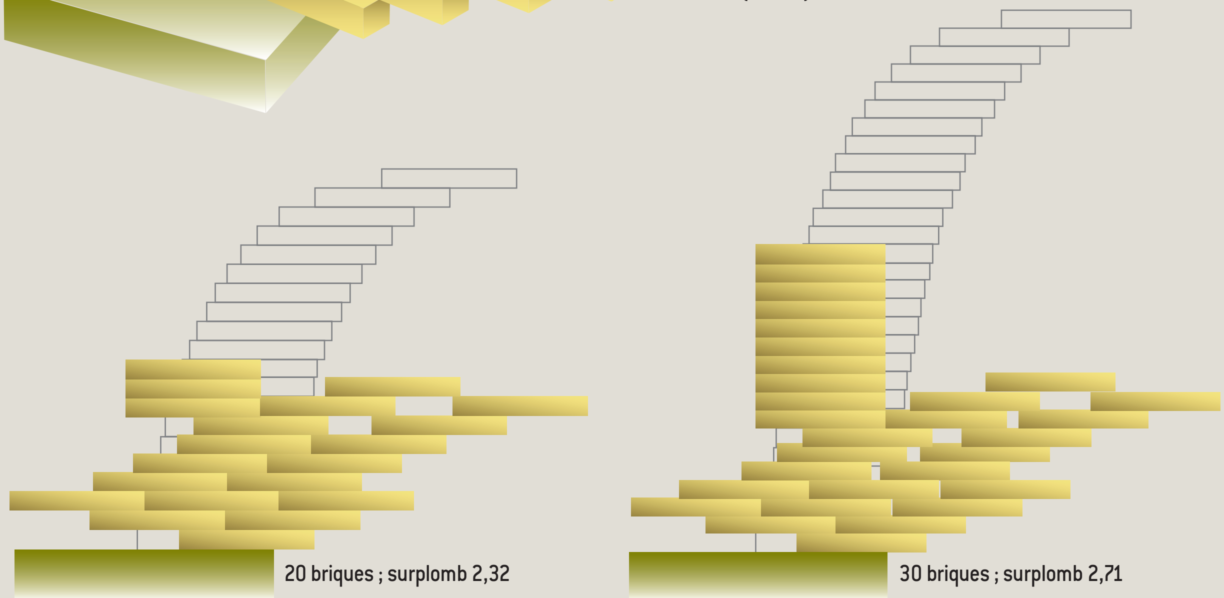


4. L'empilement parabolique de M. Paterson et U. Zwick n'est pas très compliqué et réalise pourtant un surplomb proportionnel à $n^{1/3}$ (n étant le nombre de briques utilisées), ce qui est mieux que l'empilement logarithmique classique qui donne un surplomb proportionnel à $\ln(n)$. Il est composé de couches de briques disposées en quinconce et de plus en plus larges et épaisses. Avec un nombre n de briques, on obtient un surplomb (mesuré en unités de briques) d'au moins $(3n/16)^{1/3} - 1/4$, soit à peu près $0{,}57\, n^{1/3}$.

5. Est-il possible de construire un empilement en posant les briques les unes après les autres, de façon qu'à chaque étape la pile temporaire soit en équilibre ? Pour l'empilement logarithmique classique, la réponse est oui, mais pour l'empilement parabolique de M. Paterson et U. Zwick, c'est non. Une variante de l'empilement parabolique peut cependant être assemblée brique par brique. Les numéros indiquent l'ordre de placement des briques. L'empilement, un peu moins bon que celui de la figure 4, donne néanmoins un surplomb asymptotique en $n^{1/3}$.



6. Empilement en biais : John Conway à qui l'on parlait du problème de l'empilement des briques remarqua qu'avec de vraies briques en trois dimensions (de longueur 1, de largeur L, de hauteur h), on peut toujours exploiter la largeur des briques d'un empilement donné pour améliorer légèrement le surplomb. La méthode consiste à tourner légèrement chaque brique. Le gain obtenu est de : $(1 + L^2)^{1/2} - 1$.

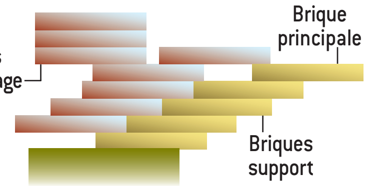


20 briques ; surplomb 2,32

30 briques ; surplomb 2,71

7. Comparaison des empilements : empilements logarithmiques classiques et les empilements optimaux découverts pour 20 briques et 30 briques. Il est bien clair que les nouveaux empilements donnent de plus grands surplombs.

dans un empilement optimal, le bord droit de l'empilement était, d'étage en étage, de plus en plus en surplomb (le bord droit ne revenait jamais en arrière). Cela est vrai pour les empilements optimaux jusqu'à 19, à partir de 20, cela est faux *(voir la figure 3s)*. Le bord droit de l'empilement n'est pas monotone, il revient en arrière au niveau 4 de la pile.



Empilements non monotones

Dans ce type d'empilements, on nomme support les briques (en jaune) qu'on obtient en partant de la brique principale donnant le surplomb maximum, puis en considérant, de proche en proche, toutes les briques qui portent cette brique. Pour un empilement monotone (le bord droit ne part jamais en arrière), il n'y a qu'une seule brique support par niveau. En revanche, dans le cas des empilements non monotones, plusieurs briques support peuvent se situer au même niveau (il arrive aussi qu'un empilement soit non monotone et qu'il n'y ait qu'une seule brique support par niveau). Pour l'empilement optimal à 20 briques, les niveaux 2 et 3 comportent chacun deux briques jaunes. Pour celui à 30 briques, les niveaux 2, 3 et 4 comportent chacun deux briques support.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule brique support par niveau, on dit que l'empilement est vertébré. L'hypothèse – faite sans s'en rendre compte – que les empilements optimaux étaient monotones et donc vertébrés a conduit J. Hall à ses conclusions erronées à partir de 20 briques. Les briques qui ne sont pas des briques support se nomment briques d'équilibrage. Contrairement aux briques support, l'emplacement des briques d'équilibrage dans les empilements optimaux n'est généralement pas parfaitement fixé : on peut déplacer certaines des briques d'équilibrage sans faire s'écrouler la pile.

La découverte qu'il faut absolument prendre en considération, les empilements non monotones et non vertébrés, s'est en fait révélée cruciale pour l'étude du comportement asymptotique des piles de briques. Trois résultats remarquables prouvent l'importance déterminante des empilements non vertébrés. Les deux premiers sont dus à M. Paterson et U. Zwick. Pour le dernier, trois autres mathématiciens se sont joints au travail : Yuval Peres, Mikkel Thorup et Peter Winkler. Voici ces résultats asymptotiques ; tous les empilements que nous considérons sont bien sûr supposés en équilibre.

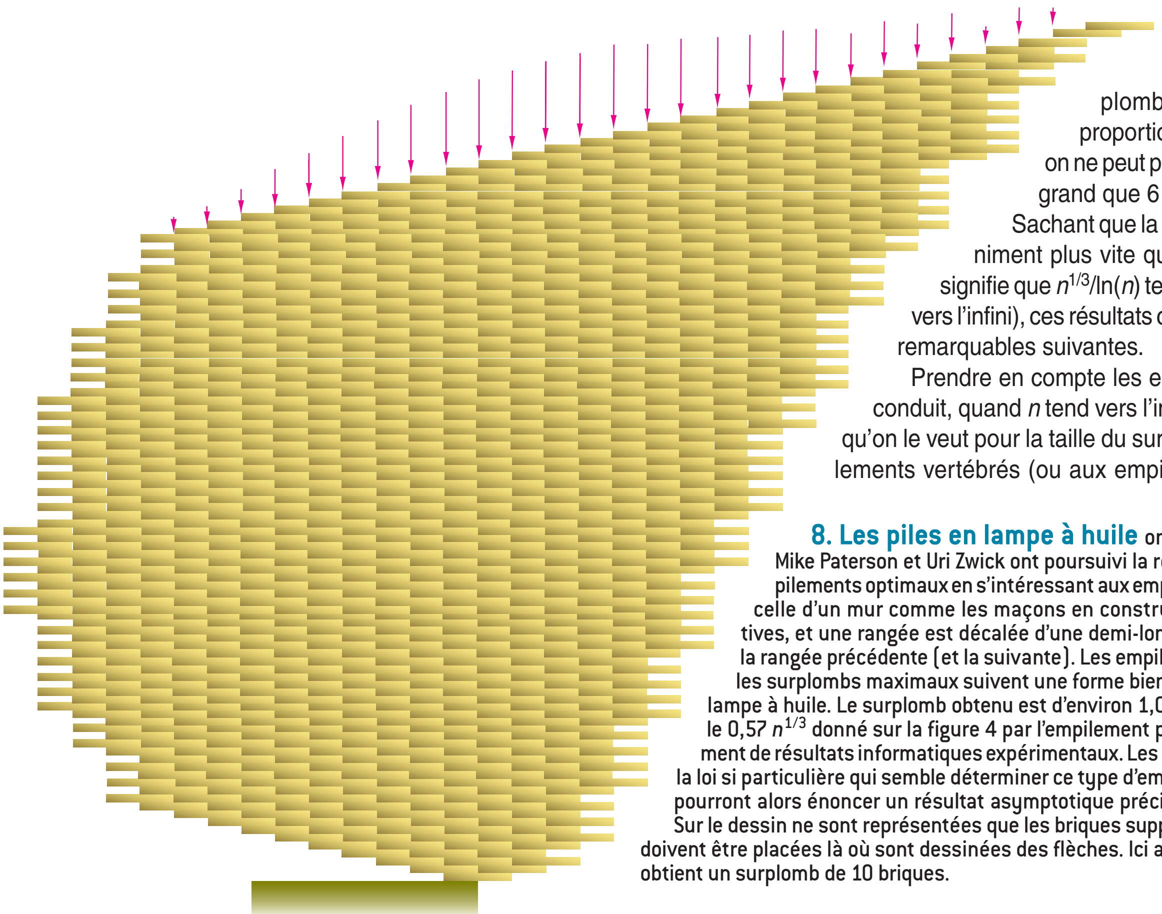
a. Un empilement vertébré de n briques ne peut jamais avoir un surplomb de plus de $\ln(n) + 1$ (dans cette formule, $\log(n)$ représente le logarithme népérien de n, l'unité est la longueur d'une brique). C'est le double environ de ce que donnent les empilements logarithmiques.

b. Il existe un empilement parabolique (non monotone et non vertébré) découvert par M. Paterson et U. Zwick *(voir la figure 4)* de surplomb proportionnel à $n^{1/3}$ (environ $0{,}57\, n^{1/3}$).

c. Quand n tend vers l'infini, le plus grand surplomb qu'on puisse obtenir est proportionnel à $n^{1/3}$. Avec n briques, on ne peut pas obtenir un surplomb plus grand que $6\, n^{1/3}$.

Sachant que la fonction $n^{1/3}$ augmente infiniment plus vite que la fonction $\ln(n)$ (ce qui signifie que $n^{1/3}/\ln(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini), ces résultats conduisent aux conclusions remarquables suivantes.

Prendre en compte les empilements non vertébrés conduit, quand n tend vers l'infini, à un gain aussi grand qu'on le veut pour la taille du surplomb comparé aux empilements vertébrés (ou aux empilements logarithmiques) :



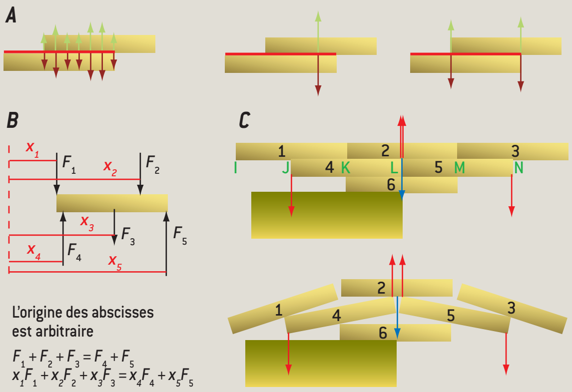
8. Les piles en lampe à huile ont les plus grands surplombs. Mike Paterson et Uri Zwick ont poursuivi la recherche expérimentale d'empilements optimaux en s'intéressant aux empilements dont la structure est celle d'un mur comme les maçons en construisent : les briques sont jointives, et une rangée est décalée d'une demi-longueur de brique par rapport à la rangée précédente (et la suivante). Les empilements de ce type produisant les surplombs maximaux suivent une forme bien précise qu'ils ont nommée la lampe à huile. Le surplomb obtenu est d'environ $1{,}02\, n^{1/3}$, bien meilleur donc que le $0{,}57\, n^{1/3}$ donné sur la figure 4 par l'empilement parabolique. Il s'agit là uniquement de résultats informatiques expérimentaux. Les chercheurs tentent d'identifier la loi si particulière qui semble déterminer ce type d'empilements. S'ils la trouvent, ils pourront alors énoncer un résultat asymptotique précis et peut-être... le démontrer. Sur le dessin ne sont représentées que les briques support : les briques d'équilibrage doivent être placées là où sont dessinées des flèches. Ici avec environ 1 100 briques, on obtient un surplomb de 10 briques.

L'équilibre des forces

Le calcul des configurations donnant les plus grands surplombs est fondé sur les lois de la mécanique statique. On envisage systématiquement toutes les dispositions raisonnables pouvant conduire à un surplomb intéressant et correspondant à une pile en équilibre, et on repère celles qui donnent le plus grand surplomb.

Pour tester une configuration donnée, on suppose qu'il n'y a aucune friction entre briques et que, par conséquent, toutes les forces s'exerçant sur les briques sont verticales : vers le bas ou le haut. Les forces à prendre en compte sont le poids de chaque brique (qui donne une force de 1 unité au centre de gravité de chaque brique, force dirigée vers le bas) et les forces d'action et de réaction entre briques en contact.

Le problème se ramène à deux dimensions et la zone de contact entre deux briques d'un empilement est un segment. On peut remplacer toutes les forces qui s'exercent sur les briques par des forces s'exerçant aux extrémités du segment de contact (A). À chaque extrémité, la force exercée par la brique du dessus est dirigée vers le bas et égale à celle, dirigée vers le haut, qu'exerce la brique du dessous. L'équilibre général de la pile de briques exige, d'une part, que pour chaque brique, les forces vers le haut annulent les forces vers le bas, et, d'autre part, que les moments créés par ces forces s'annulent (B).



Voyons pourquoi l'empilement 1, 2, 3 en diamant est instable (C). La brique 5 est soumise au poids 1 de la brique 3 en N, donc à un couple qui exerce, comme dans une balance dont la brique 5 serait le fléau, une force 1 en L. De même pour la brique 4. Donc la brique 2 est soumise à une force vers le haut de 2 en L alors que la force vers le bas en L n'est égale qu'à son poids. Le système est instable. Il se stabilise si l'on ajoute une brique sur la brique 2. C'est la solution des piles qui stabilise les diamants.

En notant x_i l'abscisse de la force F_i, cela donne pour chaque brique des équations dont les inconnues sont les modules des forces F_i. L'existence d'une solution (au moins) au système d'équations et d'inéquations obtenu en considérant l'ensemble des briques d'un empilement donné indique que la pile est en équilibre.

Trouver le surplomb maximum pour un nombre donné de briques est difficile. On fait appel à des méthodes informatiques de résolution. Pour chaque configuration de n briques il faut déterminer les positions $x_1, ..., x_n$ des briques telles que la pile soit en équilibre et telles que le surplomb de la pile associé à ces positions soit le plus grand possible. Il existe des algorithmes spécialisés pour traiter ce type de problèmes. Ils calculent la solution de manière approchée, mais nous assurent que les meilleurs empilements ne sont pas ignorés.

pour certaines valeurs du nombre n de briques, un empilement non vertébré de n briques possédera un surplomb 1000 fois plus grand que le surplomb maximum d'une pile vertébrée de n briques.

Les empilements vertébrés sont gravement limités et ne valent pas beaucoup mieux que les empilements logarithmiques : quelle que soit l'astuce avec laquelle on place les briques d'équilibrage, le surplomb ne sera jamais plus de deux fois supérieur à celui d'une pile logarithmique.

Les empilements paraboliques

Le récent résultat (*c*) dont la démonstration occupe une dizaine de pages semble indiquer qu'on a résolu définitivement le problème des surplombs maximaux en considérant les piles paraboliques. Ce n'est vrai qu'à une constante près : certes, on ne peut pas faire mieux que 6 $n^{1/3}$ pour le surplomb d'une pile de n briques, mais le coefficient 0,57 de l'empilement parabolique est dix fois plus petit que 6 : il laisse une grande marge de progrès.

Par une méthode expérimentale (utilisant des ordinateurs et non pas des briques !), les chercheurs pensent avoir découvert des empilements donnant un surplomb de 1,02 $n^{1/3}$ *(voir la figure 8)*. Du côté des démonstrations, certaines pistes permettront peut-être de démontrer que 3 $n^{1/3}$ est un surplomb impossible pour n assez grand. Affiner le résultat asymptotique et trouver la constante *C* définitive (située entre 0,57 et 6) pour laquelle on saura proposer un empilement en $C\,n^{1/3}$ et montrer qu'on ne peut pas faire mieux apparaît comme un défi d'une grande difficulté.

Notons qu'une conséquence de ces résultats est la possibilité de construire des ponts avec n briques qui franchissent une rivière de largeur proportionnelle à $n^{1/3}$, cela juste en posant des briques les unes sur les autres sans avoir à utiliser de moyen de cohésion autre que la pesanteur. M. Paterson précise même que, quel que soit le poids de l'animal ou du véhicule qu'on veut faire passer sur le pont, une telle solution existe.

Qui aurait pensé qu'en empilant des briques ou des sucres, tout un ensemble de problèmes difficiles s'ouvrait aux physiciens, puis aux mathématiciens? Dans ce domaine, là encore, le rôle de l'expérimentation informatique se révèle essentiel.

Auteur & Bibliographie

J.-P. DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

M. PATERSON, Y. PERES, M. THORUP, P. WINKLER et U. ZWICK, *Maximum overhang*, 2007, arXiv :0707.0093.

M. PATERSON et U. ZWICK, *Overhang*, à paraître dans *American Mathematical Monthly*.

M. PATERSON et U. ZWICK, *Overhang*, in *Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 231-240, 2006.

J. F. HALL, *Fun with stacking blocks*, in *American Journal of Physics* 73, 12, pp. 1107-1116, 2005.

M. GARDNER, *Mathematical games : some paradoxes and puzzles involving infinite series and the concept of limit*, in *Scientific American*, pp. 126-133, nov. 1964. (Article qui a rendu populaire la pile logarithmique.)

J. G. COFFIN, *Problem 3009*, in *American Math. Monthly* vol. 30 (2), pp. 76-78, 1923 (première mention d'une configuration donnant un surplomb plus grand que celui de la pile logarithmique).