LOGIQUE & CALCUL

Le désordre total n'existe pas...

En 1933, Esther Klein soumit un puzzle géométrique à un groupe de mathématiciens. Il en résulta un article de Paul Erdös et George Szekeres, le mariage d'Esther Klein et de George Szekeres et... un théorème de Sárközy.

Jean-Paul DELAHAYE

Si vous dessinez un grand nombre de points sur une feuille sans que trois d'entre eux soient alignés, alors six points délimiteront un hexagone convexe ne contenant aucun autre point (*voir la figure 2*). Ce « théorème de l'hexagone vide inévitable » est plus difficile à démontrer qu'on ne l'imagine à la lecture de son énoncé. C'est seulement en 2007 que, simultanément et indépendamment, Tobias Gerken, de l'Université Technique de Munich, et Carlos Nicolas, de l'Université du Kentucky, en ont proposé une démonstration. Une preuve plus courte a aussitôt été découverte par Pavel Valtr de l'Université Charles à Prague.

Cet hexagone convexe vide est inévitable s'il y a un nombre assez grand de points. Mais combien exactement ? On sait que 29 points ne suffisent pas à garantir l'hexagone vide (résultat dû à Mark Oversmars de l'Université d'Utrecht) et que 463 suffisent (démontré en 2007 par Vitaliy Koshelev de l'Université indépendante de Moscou). Il est difficile d'être plus précis et le défi est ouvert à tous, y compris aux amateurs de programmation qui feront progresser nos connaissances s'ils trouvent des ensembles de plus de 29 points non alignés sans hexagone convexe vide.

Les démonstrations du théorème de l'hexagone vide s'appuient sur les solutions d'un problème géométrique de la même catégorie, nommé par Paul Erdös « *Problème à l'heureuse issue* » de par son histoire. À Budapest en 1933, Erdös et quelques étudiants(es) se réunissaient régulièrement pour parler de mathématiques et d'autres sujets. Esther Klein proposa un jour une énigme :

Montrez que si cinq points sont placés de manière quelconque sur un plan (c'est-à-dire sans que trois d'entre eux soient alignés) alors il y en a quatre qui forment les sommets d'un quadrilatère convexe.

Erdös et George Szekeres écoutèrent la solution d'Esther Klein, mais n'en restèrent pas là et, un an plus tard, généralisèrent et publièrent la propriété suivante : quand on dessine suffisamment de points sur un plan sans en aligner trois, on y trouve les sommets d'un quadrilatère convexe, avec plus de points, on est certain de trouver un pentagone convexe, puis, avec un peu plus de points encore, un hexagone convexe, etc.

La formulation mathématique est :

Pour tout entier n *donné, il existe un entier* N*, tel que tout ensemble de* N *points ou plus placés sur le plan en position quelconque (c'est-à-dire sans que trois points soient alignés) contient un sous-ensemble de* n *points déterminant les sommets d'un polygone convexe (pouvant contenir d'autres points).*

1. GEORGE SZEKERES ET ESTHER KLEIN, mariés en 1937 après la démonstration du « problème à l'heureuse issue ». En médaillon, leur ami et collègue, Paul Erdös, à 17 ans ; quatre ans après, Erdös sera docteur en mathématiques.

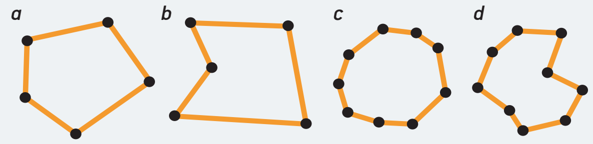
Géométrie et mariage

Le plus petit entier qui garantit la présence des sommets d'un polygone convexe à n côtés est noté $g(n)$. Il est immédiat que $g(3)=3$. Esther Klein avait montré que $g(4)=5$. On sait aussi que $g(5)=9$ (résultat dû à E. Makai) et que $g(6)=17$ (résultat dû à Szekeres et L. Peters). Au-delà, on ne connaît pas les valeurs de $g(n)$. Erdös et Szekeres prouvèrent cependant que : $g(n) \geq 1 + 2^{n-2}$. On sait aujourd'hui que $g(n) \leq C(2n-5, n-3)$, où la notation $C(n, k)$ désigne le coefficient du binôme $n!/(k!(n-k)!)$.

Les premières valeurs de $g(n)$ suggèrent que, pour tout n à partir de 3, $g(n)$ vaut exactement $1+2^{n-2}$, mais c'est là une conjecture qui semble d'une extrême difficulté : personne n'a su la démontrer. Erdös avait l'habitude de proposer des récompenses pour les conjectures qui l'intéressaient : plus une conjecture lui semblait difficile, plus la somme offerte était importante. Erdös avait

2. Les polygones inévitables

1. Polygone convexe. Un ensemble de *n* points du plan détermine un polygone convexe de *n* points si, par définition, en rejoignant bien les points, on obtient une forme sans creux.



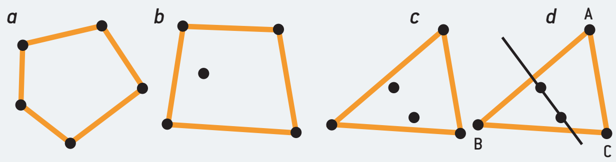
Cinq points déterminent un pentagone convexe *(a)* ou non convexe *(b)*, neuf points déterminent un enagone convexe *(c)* ou non convexe *(d)*.

2. Le problème à l'heureuse issue. Le « problème à l'heureuse issue » est de montrer que si cinq points sont donnés sur le plan en position quelconque (c'est-à-dire sans qu'il y en ait trois d'alignés) alors quatre d'entre eux déterminent un quadrilatère convexe.

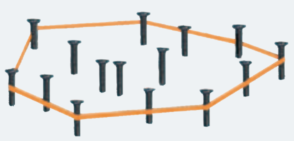
La démonstration procède en distinguant trois cas.

1. Les cinq points déterminent un pentagone convexe *(a)*. Dans ce cas, quatre d'entre eux, quels qu'ils soient, déterminent un quadrilatère convexe.

2. Le plus petit polygone qui contient les cinq points (nommé enveloppe convexe des cinq points) est un quadrilatère *(b)*. Alors, les quatre sommets de ce quadrilatère-enveloppe constituent le quadrilatère convexe recherché.



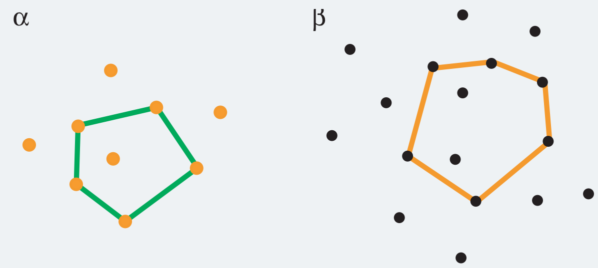
Notons que pour obtenir l'enveloppe convexe de *n* points, un excellent dispositif analogique consiste à planter des clous sur les *n* points et à placer un élastique autour de ces points.



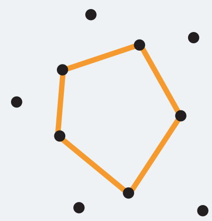
3. Le plus petit polygone qui contient les cinq points est un triangle *(c)*. Alors, la droite déterminée par les deux points qui ne sont pas des sommets de ce triangle ABC coupe deux côtés du triangle, AB et BC qui se rejoignent en un point B *(d)*. Les deux points intérieurs et les deux points A et C sont les sommets du quadrilatère convexe recherché.

3. Le polygone convexe inévitable. En plaçant *N* points (ici *N* est égal à 9) sur le plan en position quelconque (sans que trois d'entre eux soient alignés) alors on est certain de trouver parmi eux cinq points déterminant un pentagone convexe (α).

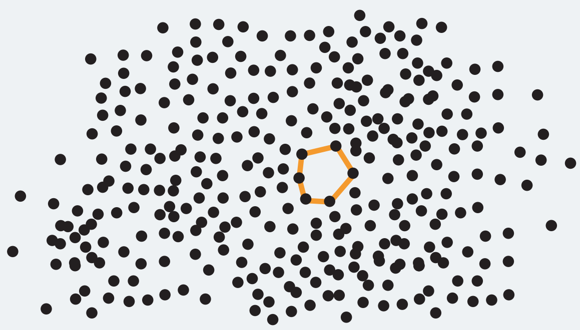
En plaçant 17 points sur le plan en position quelconque (sans que trois d'entre eux soient alignés) alors on est certain de trouver parmi eux six points déterminant un hexagone convexe (β). Plus généralement, le théorème de Erdös-Szekeres de 1935 indique que pour tout entier *n*, il existe un entier *N*, tel que *N* points en position quelconque sur le plan contiennent nécessairement un sous-ensemble de *n* points déterminant les sommets d'un polygone convexe à *n* côtés.



4. Le pentagone vide et l'hexagone vide. Si l'on dispose plus de 10 points en position quelconque sur le plan, alors on est certain de trouver parmi eux cinq points déterminant un pentagone convexe qui ne contiendra aucun autre point.



On vient tout juste de démontrer que si on dispose plus de 463 points en position quelconque sur le plan, alors on est certain de trouver parmi eux six points déterminant un hexagone convexe qui ne contiendra aucun autre point. C'est le théorème de l'hexagone convexe vide.



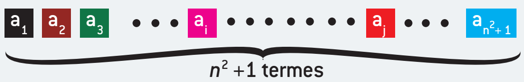
Le nombre 463 peut certainement être réduit, mais pour l'instant personne ne sait comment s'y prendre.

3. Le théorème des sous-suites monotones

Parmi les résultats démontrés par Erdös (buste de Gabriella Bollobás) et Szekeres dans leur article de 1935, un théorème indique qu'un minimum d'ordre existe dans toute suite numérique (c'est un théorème « à la Ramsey ») : *De toute suite de* $n^2 + 1$ *nombres différents, on peut extraire une sous-suite croissante de longueur* $n + 1$ *ou une sous-suite décroissante de longueur* $n + 1$.

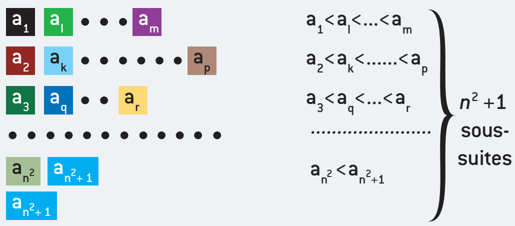
En particulier, dans toute suite de 10 nombres, on trouve obligatoirement une suite de 4 nombres croissants ou décroissants. Cherchez pour (31, 30, 53, 12, 27, 11, 66, 21, 87, 32).

Voici la démonstration du théorème.



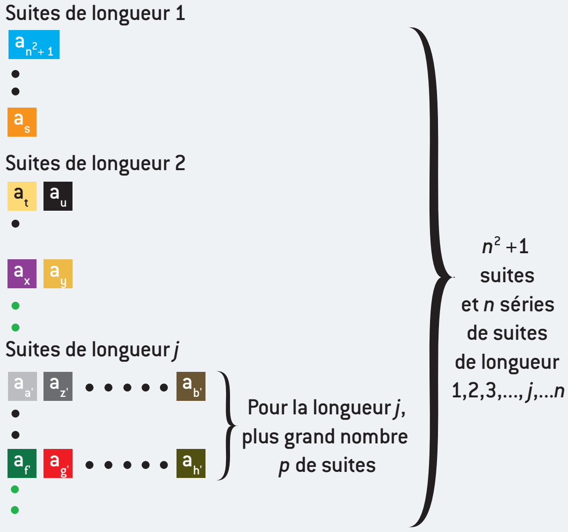
Prenons une suite de nombres différents de longueur $n^2 + 1$.

Pour chaque a_i, considérons la plus longue sous-suite croissante qui commence par a_i.



Si l'une de ces sous-suites a plus de n éléments, notre raisonnement est terminé. Nous supposons donc que chacune de ces sous-suites a une longueur inférieure ou égale à n. Puisqu'il y a $n^2 + 1$ nombres, nous disposons de $n^2 + 1$ sous-suites croissantes différentes (chacune commence par un nombre différent).

Classons toutes ces sous-suites par taille : celles de taille 1, celles de taille 2, etc., jusqu'à celles de taille n. Pour au moins un



promis de payer 500 dollars pour la démonstration de $g(n) = 1 + 2^{n-2}$.

Erdös, mort en 1996, ne paiera donc jamais ces 500 dollars, mais soyez rassuré : Ronald Graham a pris la relève et il promet 1 000 dollars pour cette preuve (ou la preuve que pour certaines valeurs de n la formule n'est pas exacte).

Le minimum d'ordre

Le théorème de Erdös et Szekeres qui affirme l'existence de $g(n)$ et la conjecture associée aux valeurs de $g(n)$ sont intéressants car, à chaque fois, il s'agit d'affirmations signifiant qu'un minimum d'ordre est inévitable. Il est naturel de considérer que n points disposés pour former les sommets d'un polygone convexe constituent un îlot organisé dans un ensemble de points, car un tel ensemble constitue une sorte de groupement circulaire de n points. Le théorème de Erdös et Szekeres affirme que de tels îlots d'ordre sont inévitables dès que le nombre de points est assez grand et que plus le nombre de points envisagés est grand, plus on trouve de grands regroupements circulaires de points.

Erdös donna le nom de « problème à l'heureuse issue » (*Happy ending problem*) à l'énigme pour $n = 4$ car, en 1937, Esther Klein et Szekeres se marièrent et la légende veut que le problème soumis au groupe de 1933 ait été un élément déterminant de leur histoire. Ils vécurent ensemble jusqu'au 28 août 2005, date à laquelle ils décédèrent tous les deux à une demi-heure d'intervalle. Doit-on considérer qu'il s'agit, là encore, d'une « heureuse issue » ?

L'histoire ne sera d'ailleurs pas terminée tant qu'on n'aura pas réussi à obtenir plus de précision concernant $g(n)$, d'autant que des généralisations en dimension supérieure à 2 ont été proposées et que ces généralisations sont accompagnées de conjectures sur les valeurs exactes des fonctions $g(n)$ associées.

Notons aussi que dans l'article de 1935 qui établit que $g(n)$ existe toujours, Erdös et Szekeres utilisent et redémontrent le théorème de Ramsey qui venait à peine d'être découvert. Ce théorème de Ramsey, dont Erdös explorera les variantes et les généralisations tout le reste de sa vie, est l'expression dans le cas des graphes de l'affirmation qu'un peu d'ordre est inévitable. Toujours dans l'article publié en 1935 et après la démonstration de l'existence de $g(n)$, Erdös et Szekeres envisageaient un autre problème géométrique du même type. Est-il vrai que :

Pour tout entier n, *il existe un entier* N, *tel que si* N *points ou plus sont placés en position quelconque sur un plan, alors* n *d'entre eux délimitent un polygone convexe ne contenant pas de point.*

Il est évident que 3 points assurent un triangle vide. La solution du problème entier j entre 1 et n, le nombre de sous-suites de taille j est plus grand que n (sinon le nombre total de sous-suites serait inférieur ou égal à n^2, or il y en a n^2+1). Soit j cette taille et $p > n$ le nombre de sous-suites croissantes de taille j.

$a_{c'}\ a_{a'} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\ a_{f'} \bullet\bullet\bullet\bullet\ a_{i'}$

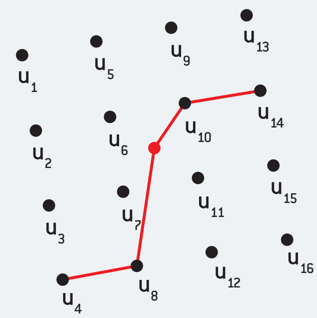
Considérons le premier élément de chacune des sous-suites de taille j. Cela nous donne p entiers différents pris dans la suite initiale. Nous les classons comme dans la suite initiale pour obtenir une sous-suite de la suite initiale de longueur p.

$b_1\ b_2 \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\ b_f \bullet\bullet\bullet\bullet\ b_p$

Notons b_1, b_2, ..., b_p cette sous-suite et montrons qu'elle est décroissante. Comme elle possède p éléments avec $p > n$, cela terminera la démonstration.

Si $b_1 < b_2$ alors la sous-suite croissante, commençant par le nombre b_1 et se poursuivant par les p éléments de la sous-suite croissante qui commence à b_2 et a pour longueur p (elle existe par définition), serait une sous-suite de longueur p +1 commençant à b_1. Or une telle suite ne peut exister puisque par définition la sous-suite croissante la plus longue qui commence à b_1 a pour longueur p. Donc $b_1 > b_2$. De même $b_2 > b_3 > b_4 > ... > b_p$, ce que nous voulions établir.

Une question naturelle se pose : peut-on améliorer le $n^2 + 1$ et le remplacer par un nombre plus petit ? La réponse est non et un simple dessin permet de comprendre pourquoi. En considérant les ordonnées des 17 points, de celui le plus à gauche, u_1, vers celui le



plus à droite, u_{16}, et en incluant entre u_8 et u_9 le point rouge, on obtient une suite de 17 nombres différents. Comme le théorème l'indique, on extrait sans mal une suite monotone croissante de longueur 5 de cette suite de 17 nombres. Une telle suite est représentée graphiquement ci-dessus par un tracé montant passant par 5 points (il y a d'autres tracés montant ou descendant de 5 points).

Si l'on enlève le point central, on constate qu'aucun tracé montant ou descendant de 5 points n'est plus possible, ce qui signifie que les ordonnées des 16 points pris de gauche à droite constituent une suite de nombres différents dont on ne peut extraire *aucune* sous-suite croissante ou décroissante de longueur 5. Ce schéma se généralise évidemment pour tout n : il est donc impossible d'améliorer le $n^2 + 1$ du théorème des sous-suites monotones.

d'Esther Klein s'adapte à 5 points qui assurent un quadrilatère convexe vide. Heiko Harborth a prouvé que 10 points assurent un pentagone convexe vide.

Les structures vides

Là encore, une interprétation en termes d'ordre minimum s'impose. Un quadrilatère convexe vide, un pentagone convexe vide, un hexagone convexe vide, etc., plus encore qu'un quadrilatère convexe, un pentagone convexe, un hexagone convexe, etc., sont des structures organisées. La question posée est alors :

Un nombre assez grand de points assure-t-il la présence de structures organisées ?

Le cas des valeurs de n à partir de 7 constitue une salutaire mise en garde à ne pas énoncer un principe trop général concernant « l'inévitable présence de l'ordre ». Joseph Horton a en effet établi en 1983 que pour tout N, aussi grand soit-il, il existe des ensembles de N points ne contenant aucun heptagone convexe vide et donc aucun octogone convexe vide, etc. Certaines structures sont inévitables, pas toutes !

Restait à résoudre le cas $n = 6$ de l'hexagone convexe vide : assez de points en position quelconque assurent-ils la présence d'un hexagone convexe vide, oui ou non ? Cela vient d'être démontré, comme nous l'indiquions dans les premières lignes de la rubrique.

Les démonstrations s'appuient sur le fait que certains polygones convexes sont inévitables et procèdent par une analyse combinatoire délicate où une multitude de cas soigneusement énumérés et examinés amènent à la conclusion. Toutefois, aucune démonstration courte et directe n'a encore été proposée ! Le théorème de l'hexagone vide est l'une de ces petites merveilles mathématiques auxquelles aucune voie rapide ne semble donner accès. La présence de certaines sous-structures organisées dans les objets mathématiques assez gros (ensembles de points, graphes, suites numériques, ensembles de nombres entiers, etc.) est une propriété remarquable dont nous allons donner d'autres exemples.

Précisons que ces résultats « de type Ramsey » n'affirment pas seulement des certitudes probabilistes, mais des certitudes absolues. On sait que si une suite de tirages à pile ou face effectués avec une pièce non truquée est poursuivie assez longtemps, elle finit nécessairement par produire 10 fois pile consécutivement.

Le « nécessairement » de la phrase précédente est un « nécessairement » probabiliste. Il se peut qu'on n'obtienne jamais 10 fois pile consécutivement. Dans le langage des probabilités, on dit que 10 fois de suite pile est « presque sûr ». Les résultats de type Ramsey ne sont pas des résultats « presque sûrs », ils affirment la présence de structures d'ordre auxquelles on n'échappe pas.

Le résultat le plus célèbre de présence certaine d'un ordre dans un grand objet

4. Un théorème de András Sárközy

Les théorèmes affirmant que la présence d'ordre (au moins en petite quantité) est assurée, et dont le théorème de Ramsey est le prototype, se retrouvent dans de nombreux domaines des mathématiques. Le théorème de András Sárközy illustre l'ordre inévitable en arithmétique.

Voyons d'abord un exemple. Prenons la suite des nombres de 1 à 5 : {1, 2, 3, 4, 5}. Formons des sous-ensembles *A*, en prenant pour chacun trois éléments (on dit qu'on a choisi une densité *e* un peu supérieure à 1/2) de cette suite. Alors il y a dans tout sous-ensemble *A* deux nombres dont la différence est un carré (notez que 1 est un carré, le carré de 1). Vérifions avec les dix sous-ensembles {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5}, {1, 4, 5}, { 2, 3, 4}, { 2, 3, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}.

Un peu plus généralement, si un sous-ensemble *A* de {1, 2, ..., *N*} avec $N > 8$ a une densité supérieure ou égale à 1/2, alors il contient deux nombres dont la différence est un carré.

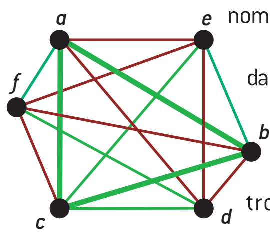
En effet, soit *A* contient deux nombres consécutifs dont la différence (1) est un carré et la propriété est vraie. Soit *A* ne contient pas deux entiers consécutifs ; puisque sa densité est supérieure ou égale à 1/2 et que *N* est strictement supérieur à 8, il contient 3 nombres pairs ou 3 nombres impairs consécutifs, et donc contient deux nombres espacés de 4 qui est un carré.

Plus généralement, le théorème de A. Sárközy stipule que, pour toute densité *e* positive, aussi petite soit-elle, il existe un entier N_0 tel que tous les sous-ensembles A de densité supérieure à *e* pris dans {1, ..., *N*} où $N > N_0$ contiennent deux nombres dont la différence est un carré.

A. Sárközy *(photographie)* est professeur de mathématiques à l'Université Eötvös-Lorand de Budapest. Il a écrit 62 articles avec Erdös, ce qui est le record.

mathématique et qui donne son nom à cette catégorie de théorèmes est celui démontré en 1928 par Frank Ramsey (1903-1930) sur les graphes bicolores. Un graphe bicolore complet de *N* points est un graphe ayant *N* sommets et tel que tout couple de sommets *a*-*b* est joint par un arc coloré en brun ou en vert. Un sous-graphe unicolore de taille *n* est un sous-ensemble de *n* sommets du graphe tel que tous les arcs reliant ses *n* sommets sont de la même couleur (tous bruns, ou tous verts).

Le théorème de Ramsey affirme que, pour tout entier *n*, il existe un entier *N* tel que tout graphe bicolore complet de *N* points ou plus comporte un sous-graphe unicolore de taille *n*. Le plus petit nombre *N* qui assure la présence d'un sous-graphe unicolore de taille *n* est le nombre de Ramsey *R*(*n*).



On sait que *R*(3)=6 : ainsi, dans toute assemblée de six personnes, il y a au moins trois personnes *a, b, c* qui se connaissent entre elles ou trois personnes qui ne se connaissent pas. Ce fait correspond à l'impossibilité géométrique de colorier les arcs d'un graphe reliant deux à deux les sommets d'un hexagone sans former un triangle dont les côtés sont de la même couleur.

Ramsey et les extraterrestres

On a prouvé que *R*(4) = 18. On sait que *R*(5) est compris entre 43 et 49 et que *R*(6) est compris entre 102 et 165. Le calcul des *R*(*n*) est si difficile que Erdös racontait l'histoire suivante :

« Imaginons que des extraterrestres bien plus puissants que nous arrivent sur Terre et nous demandent la valeur de *R*(5) sous la menace d'une destruction totale de la planète. Dans ce cas, nous devrions enrôler tous nos ordinateurs et tous nos mathématiciens pour calculer cette valeur. En revanche, s'ils nous demandaient *R*(6), il faudrait alors tenter de détruire les extraterrestres. »

La fonction qui à *n* associe *R*(*n*) est une fonction très rapidement croissante et certaines variantes du théorème de Ramsey ont permis la définition de fonctions si rapidement croissantes que les méthodes de l'arithmétique élémentaire ne sont plus assez puissantes pour démontrer ces variantes. L'une de ces variantes, formulée en 1977 par Jeff Paris et Leo Harrington, a été le premier théorème d'arithmétique non tiré de la logique mathématique dont on a pu établir qu'il était indécidable dans l'arithmétique de Peano *(voir la rubrique du mois précédent)*.

La version infinie du théorème de Ramsey est le beau et très simple résultat suivant. Si *G* est un graphe dont les sommets sont les entiers, alors on peut trouver un sous-ensemble infini d'entiers tel qu'il y ait un arc entre deux quelconques de ces entiers, ou tel qu'il n'y ait aucun arc entre les nœuds correspondant à ces entiers.

Ramsey, mort très jeune, n'a jamais soupçonné l'importance que prendrait son résultat, à l'origine d'un domaine foisonnant de recherche très loin d'être épuisé aujourd'hui. Ramsey n'avait proposé son théorème que comme résultat intermédiaire pour prouver un théorème de logique mathématique qui n'intéresse plus personne aujourd'hui !

Les suites numériques aussi

Les ensembles de points et les graphes ne sont pas les seules structures mathématiques à connaître des inévitables îlots d'ordre. Le théorème suivant, lui aussi démontré par Erdös et Szekeres, concerne les suites de nombres, et indique qu'on peut toujours extraire des sous-suites monotones, c'est-à-dire croissantes ou décroissantes *(voir la figure 3)*. La version infinie de ce résultat, que l'on déduit du théorème de Ramsey infini cité plus haut, affirme que de toute suite infinie de nombres différents, on peut extraire une sous-suite infinie croissante ou une sous-suite infinie décroissante.

Certains résultats considérés comme appartenant à la théorie de Ramsey ont été démontrés avant que Ramsey formule son théorème! Celui de Van der Waerden (1903-1996) démontré en 1927 est remarquable : il indique que tout coloriage des entiers avec deux couleurs contient une infinité de nombres de la même couleur en progression arithmétique. Sa version finie stipule que pour tout n, il existe un entier $W(n)$ tel que tout coloriage en deux couleurs des entiers de 1 à $W(n)$ contient un sous-ensemble de n entiers de la même couleur en progression arithmétique.

On sait par exemple que $W(3) = 9$. D'une part, le coloriage 1 2 3 4 5 6 7 8 montre que $W(3) > 8$ (jamais trois nombres en progression arithmétique ne sont de la même couleur pour ce coloriage). D'autre part, en essayant tous les coloriages bicolores possibles des entiers de 1 à 9 (il y en a 512), on vérifie que tous ont trois nombres de la même couleur en progression arithmétique.

La fonction $W(n)$, comme précédemment la fonction $g(n)$, est l'objet d'une attention soutenue de la part des mathématiciens. On formule des conjectures à son sujet et des récompenses sont parfois proposées (et remportées !). Ron Graham, le grand spécialiste de la théorie de Ramsey, avait ainsi promis 1 000 dollars à celui qui établirait que :

$$W(n) < \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2}}}}}}}}_{n \text{ fois}}$$

Il a dû s'acquitter de cette somme à Timoty Gowers qui prouva en 2001 que :

$$W(n) < 2^{2^{2^{2^{2^{n+9}}}}}$$

R. Graham, beau joueur, propose maintenant 1 000 dollars à celui qui démontrera :

$$W(n) < 2^{n^2}$$

En arithmétique, la présence inévitable d'ordre peut s'exprimer de nombreuses façons. Le théorème de Sárközy (ou théorème de Sárközy-Furstenberg) a été démontré en 1977 simultanément et indépendamment par le mathématicien hongrois András Sárközy et par le mathématicien israélien Hillel Furstenberg *(voir la figure 4)*. En voici l'énoncé qu'il faut apprendre soigneusement pour le réciter correctement à vos amis ébahis :

Pour tout nombre réel e > 0, *il existe un entier* N_0, *tel que si* $N > N_0$ *et si* A *est un sous-ensemble de* {1, 2, ..., N} *ayant un nombre d'éléments au moins égal à* e.N, *alors* A *contient deux éléments dont la différence est un carré parfait.*

Ces résultats affirmant la présence d'îlots organisés inévitables sont parfois interprétés avec excès : contrediraient-ils la théorie de la complexité de Kolmogorov, selon laquelle l'ordre est exceptionnel ? Qu'en est-il ?

Ordre et complexité

La théorie de la complexité de Kolmogorov mesure l'ordre par le taux de compression. La taille du plus petit programme qui permet d'engendrer une suite finie s de 0 et de 1 est la complexité de Kolmogorov de cette suite, notée $K(s)$. Une affirmation de base de la théorie est qu'une suite prise au hasard, sauf cas exceptionnel, n'est pas compressible ou très peu compressible. Un simple argument de décompte montre précisément qu'une suite sur mille au plus parmi toutes les suites de n bits peut être représentée par un fichier de taille inférieure à $n - 10$ (et plus généralement qu'une suite sur 2^k parmi toutes les suites de longueur n, peut être compressée de plus de k bits).

De tels résultats signifient que l'ordre est rare et qu'on ne le trouve pas systématiquement. Cependant, ils ne contredisent pas les multiples théorèmes de la théorie de Ramsey dont nous avons donné quelques exemples. En effet, les théorèmes de type Ramsey affirment que dans toute structure assez grande, certaines sous-structures organisées sont nécessairement présentes. Cependant, dans chaque cas particulier, le rapport entre la taille de la sous-structure organisée inévitable et la taille de l'objet mathématique où on la trouve tend vers zéro.

Les îlots d'ordre sont obligatoires, mais de plus en plus petits, d'où d'ailleurs les fonctions rapidement croissantes que nous mentionnions, et donc leur présence ne contredit en rien le côté exceptionnel des structures globalement organisées affirmé par la théorie de Kolmogorov.

De l'ordre, oui il y en a nécessairement en petite quantité, c'est ce que dit la théorie de Ramsey, mais cet ordre est rare et localisé : les grandes structures possédant une organisation globale (donc une faible complexité de Kolmogorov) sont rarissimes.

L'AUTEUR

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

A. Soifer, **The Mathematical Coloring Book**, Springer, 2009.

T. Gerken, **Empty convex hexagons in planar point sets**, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 39, pp. 239-272, 2008.

Carlos M. Nicolas, **The empty hexagon theorem**, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 38, n° 2, 2007.

V. A. Koshelev, **On the Erdös-Szekeres problem**, *Doklady Mathematics*, vol. 76, n° 1, 2007.

J.D. Horton, **Sets with no empty convex 7-gon**, *Canad. Math. Bull.*, vol. 26, pp. 482-484, 1983.

M.H. Overmars, **Finding sets of points without empty convex 6-gons**, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 29, pp. 153-158, 2003.

G. Toth et P. Valtr, **The Erdös-Szekeres Theorem, Upper Bounds and Generalizations, Discrete and Computational Geometry** (J. E. Goodman et al., eds.), *Cambridge, Univ. Press*, Cambridge, 2005.

A. Sárközy, **On difference sets of sequences of integers III**, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 31, pp. 355-386, 1978.

P. Erdös et G. Szekeres, **A combinatorial problem in geometry**, *Compositio Mathematica*, vol. 2, pp. 463-470, 1935.