

REGARDS

LOGIQUE & CALCUL

Les 27 petits cubes de Piet Hein

Dès l'âge de quatre ans, on peut exercer son agilité mentale et son imagination avec ce jeu d'assemblage. Et les énigmes les plus avancées intéressent les mathématiciens.

Jean-Paul DELAHAYE

Pour ce numéro de vacances, nous revenons sur un vieux casse-tête, le cube de SOMA. Chacun fabriquera rapidement les sept pièces du jeu en collant 27 dés ou cubes et sera alors prêt à s'attaquer seul, en groupe ou aidé de son ordinateur, à l'immense combinatoire géométrique créée par l'auteur danois Piet Hein. L'histoire de ce jeu semble moins simple que ce que laissait croire la légende rapportée par Martin Gardner en 1958. Du casse-tête, on tire une multitude – plusieurs milliers – de problèmes amusants : de délicats projets pour les amateurs de programmation informatique, des défis de raisonnement, parfois difficiles, et un beau problème d'origami. Largement de quoi vous tenir en éveil à l'heure de la sieste ou lors des longues soirées de vacances sans télévision, ni réseau Internet !

Les sept pièces et le cube

Si vous cherchez à grouper quatre cubes ou moins, face contre face, en vous imposant la règle que la forme obtenue ne doit pas se réduire à un simple parallélépipède, ou, ce qui revient au même, ne pas constituer un solide convexe (un solide est convexe si le segment joignant deux points est toujours à l'intérieur du solide), vous découvrirez rapidement qu'il existe sept configurations différentes possibles, ni plus ni moins.

— Il n'y a aucune forme avec deux cubes, car deux cubes accolés face contre face forment un parallélépipède.

— Il y a une seule forme convenable regroupant trois cubes : le V.

— Six autres configurations comportent quatre cubes.

Traditionnellement, ces sept pièces du SOMA portent des numéros et sont associées chacune à une lettre de l'alphabet. Nous y associerons aussi des couleurs qui permettent de se repérer rapidement quand on représente des assemblages des pièces.



1 V 2 L 3 T 4 Z 5 A 6 B 7 P

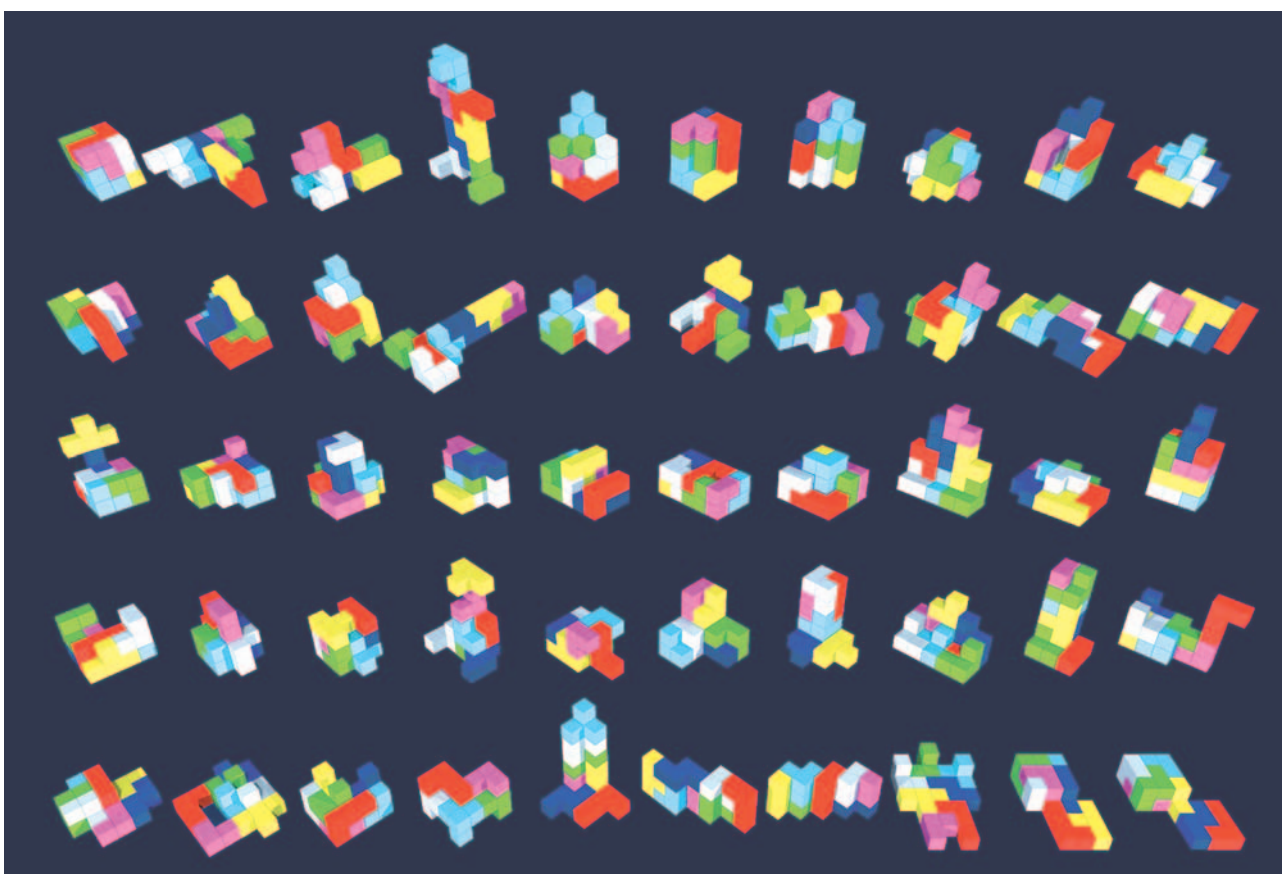
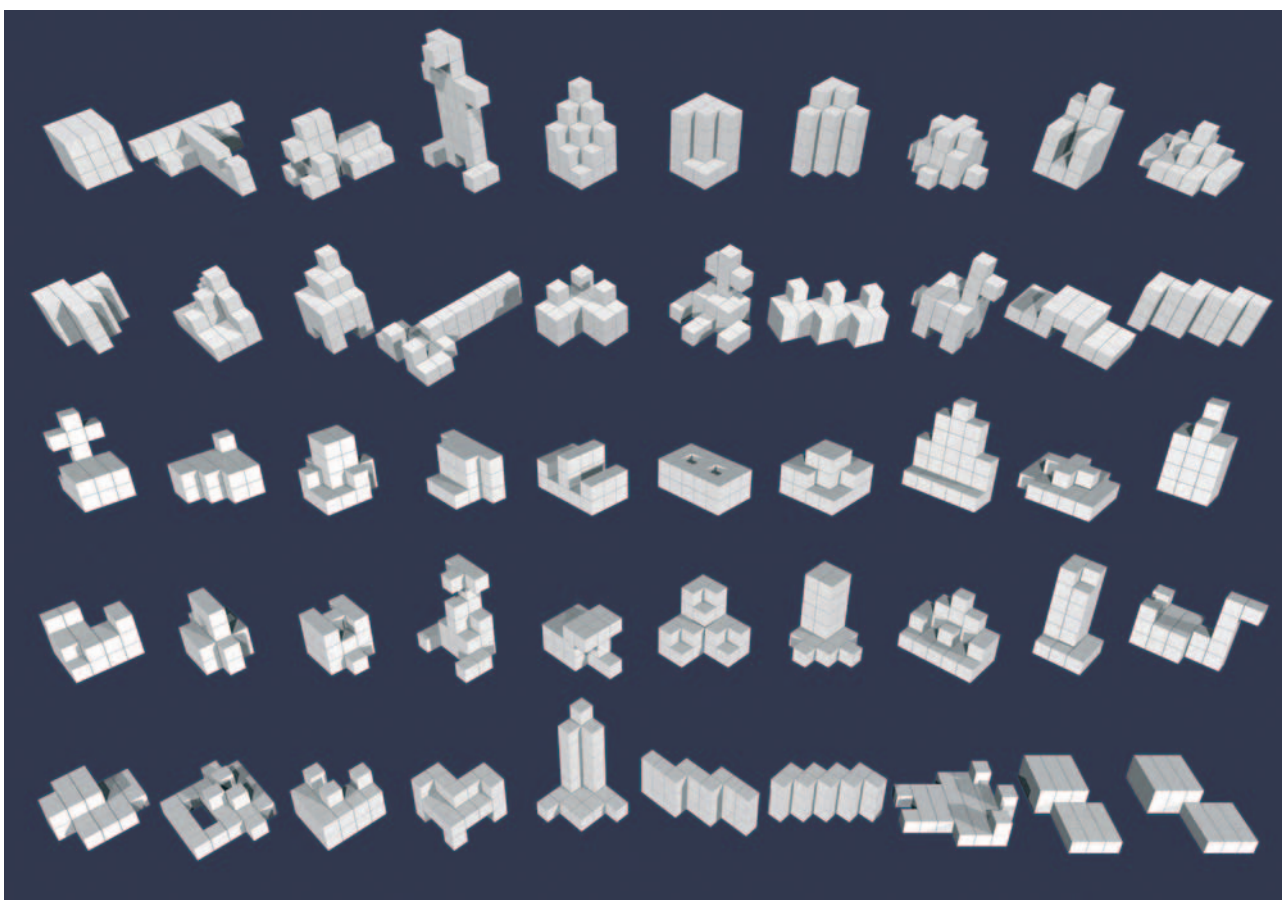
Il faut remarquer que les pièces A et B sont symétriques, mais différentes. Chose étrange, qui m'a gêné un moment en préparant l'article, car je ne l'ai pas noté immédiatement, un jeu fautif en bois a été commercialisé où le fabricant a donné deux fois la pièce B et pas de pièce A. L'ensemble de ces sept pièces totalise 27 petits cubes. Se pose donc la question : peut-on les assembler pour en faire un grand cube de côté triple ? La réponse est oui... de même qu'elle est oui pour la version erronée avec deux fois le B.

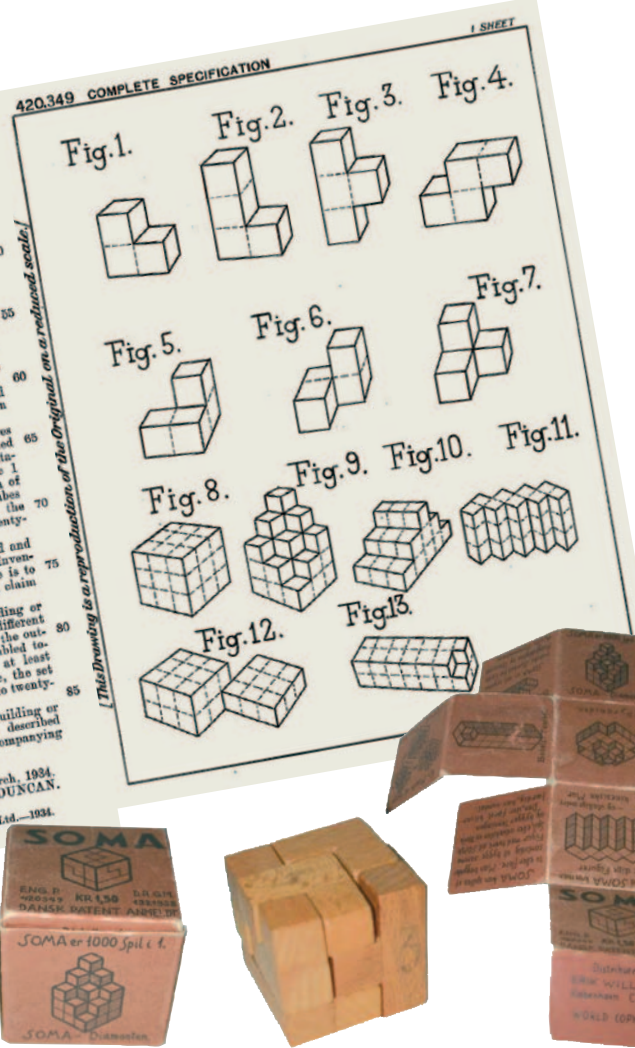
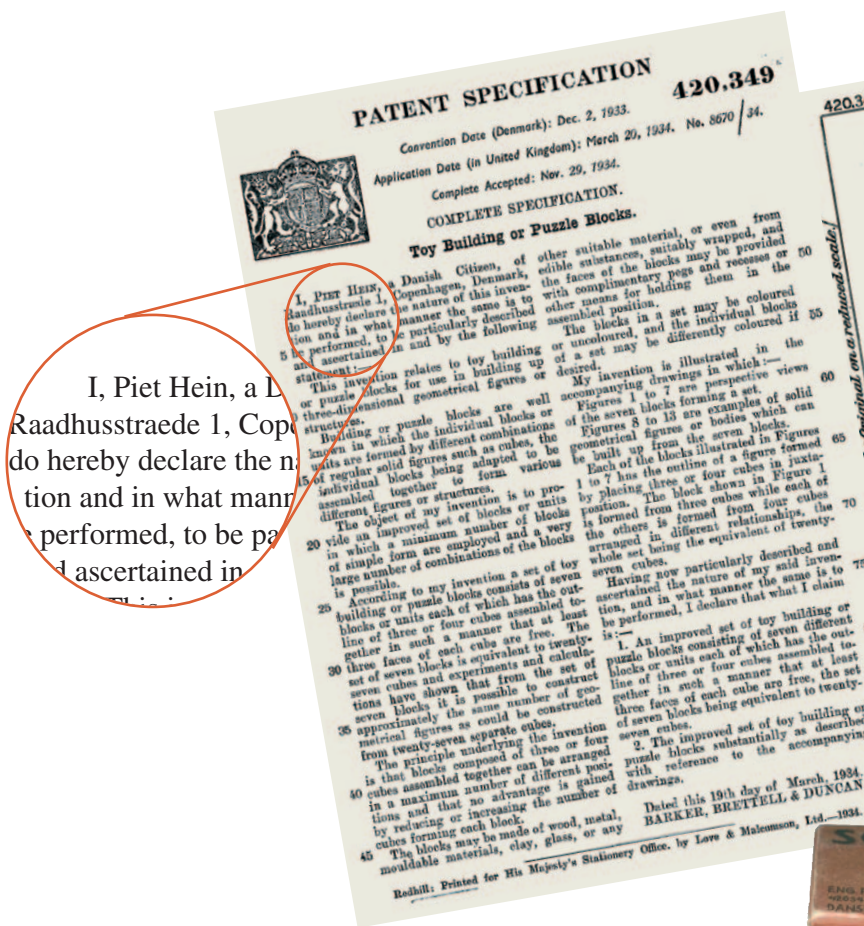
En septembre 1958, dans la revue *Scientific American*, M. Gardner présentait le cube de SOMA en racontant l'histoire de son invention par l'écrivain danois Piet Hein de la façon suivante : « Piet Hein conçut le cube de SOMA pendant une conférence de Werner Hei-

senberg sur la mécanique quantique où le grand physicien évoquait l'image d'un espace découpé en petits cubes. » Cette conférence, et donc l'invention du casse-tête, datait de 1936 qui a longtemps été considérée comme l'année officielle de naissance du casse-tête. L'année 1936 est d'ailleurs presque toujours indiquée sur les sites Internet évoquant le jeu. Je n'ose pas écrire que c'est le cas du site *Wikipédia* en langue française, car cela provoquera une correction rendant fausse mon affirmation.

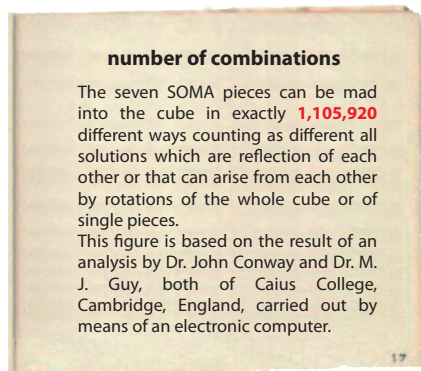
Pourtant, il y a quelques années, Poul Perdersen, un amateur du jeu, a retrouvé un ancien exemplaire du cube de SOMA rangé dans une boîte sur laquelle était indiqué un numéro de brevet anglais. En consultant ce brevet, il a constaté qu'il était daté du 29 novembre 1934. On s'est aussi aperçu qu'il dérivait d'un brevet danois déposé le 2 décembre 1933 par P. Hein. On n'est donc plus très assuré de l'exactitude de l'anecdote fixant l'invention du cube de SOMA lors d'une conférence de W. Heisenberg.

1. CINQUANTE FIGURES qui peuvent vous occuper un petit moment. Le but est de réaliser les figures avec les sept pièces du SOMA. Il faut être attentif, car certaines figures semblent utiliser plus de 27 petits cubes. Cela signifie qu'elles possèdent un ou plusieurs vides internes (invisibles de l'extérieur), ce qui rend bien sûr leur réalisation plus difficile puisqu'il faut alors deviner l'emplacement des espaces vides. D'autres modèles se trouvent sur le site Internet de Th. Bundgaard. Ces figures ont été dessinées par Francesco De Comitè du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille.





2. LE BREVET DANOIS déposé en 1933 et délivré en 1934 au Danois Piet Hein. À droite, le premier jeu de SOMA, les sept pièces arrangées en cube.



✓ SUR LE WEB

le site de Thorleif Bundgaard propose 6 400 figures pour le cube de SOMA, des programmes et toutes sortes d'informations et de liens concernant le cube de SOMA : <http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM>

S. M. Kirsch, The Soma Cube : A TelExperiment, 1997 : http://dev.origami.com/images_pdf/soma.pdf

P. Hein considérait son invention comme un étonnant fruit du hasard et disait : « C'est une belle preuve d'humour de la nature que les sept plus simples combinaisons irrégulières de cubes puissent se recombiner à nouveau en un cube. Une multitude d'unités donnant naissance à une nouvelle unité ! C'est là le plus petit objet philosophique possible, ce qui est très joli. »

Dans son article, M. Gardner indiquait qu'il existe plus de 230 solutions différentes au rangement des sept pièces pour former un cube, mais que le nombre exact de solutions était inconnu. Le problème est aujourd'hui résolu par deux méthodes. Un subtil et minutieux raisonnement géométrique proposé par John Conway et Richard Guy établit que le nombre de solutions est exactement 240. Un schéma nommé SOMAP, qui tient sur deux grandes pages, permet, à coups de permutations de couples ou de triplets de pièces, de relier 239 de ces solutions. La 240^e est indépendante et isolée. Aujourd'hui, à ce délicat et difficile décompte des solutions obtenu « à la main » s'ajoute la méthode du programme d'ordinateur qui confirme le total de 240 solutions.

Les 240 solutions de ce décompte sont toutes vraiment différentes. Il est fréquemment arrivé que des auteurs de programmes, négligeant les rotations et symétries possibles des pièces prises individuellement ou toutes ensemble, indiquent des dénombrements bien supérieurs à 240, allant jusqu'à 1 105 920, ce dernier étant parfois mentionné dans des notices du cube de SOMA ou dans les articles qui lui sont consacrés.

De 240 à 1 105 920

Détaillons comment on passe de 240 à 1 105 920. Par rotation, chaque solution en donne 24 : chacune des six faces du grand cube peut-être placée contre le sol, et une fois placée contre le sol, il y a quatre façons de faire tourner l'assemblage. Il faut doubler ce nombre, car à chaque solution est associée une autre solution obtenue par réflexion dans un miroir. Certaines pièces sont invariantes par symétrie (les pièces 1, 3 et 4) ou par rotation de 180 degrés (les pièces 5 et 6) et l'une d'elles est même invariante par deux rotations d'angle de 120 degrés et 240 degrés (la pièce 7). Le programmeur distrait trouvera donc chaque solution non

Regards

pas une seule fois, ni même 48 fois, mais 4 608 fois [$4\,608 = 24 \times 2 \times 2^5 \times 3$], d'où $240 \times 4\,608 = 1\,105\,920$ solutions.

L'intérêt du jeu n'est pas uniquement le plaisir qu'on trouve à le ranger dans sa boîte ! Les sept pièces du cube de SOMA constituent une sorte de *Tangram* tridimensionnel : elles peuvent se regrouper et former de petites sculptures où l'imagination de l'observateur reconnaîtra un avion, un petit personnage, une tombe, une baignoire, etc.

Une collection de 6 400 sculptures

Le brevet danois mentionnait sept de ces sculptures. Le plus ancien jeu commercialisé, retrouvé par P. Perdersen, en proposait huit. L'article de M. Gardner en donnait 26 dont deux étaient infaisables. Un manuel du jeu rédigé par P. Hein va jusqu'à 36, qui sont les « grands classiques ». Mais la variété des configurations est bien supérieure à tous ces nombres et aujourd'hui Thorleif Bundgaard en a collecté 6 400, qu'on trouve sur son magnifique site Internet consacré au SOMA.

La figure 1 représente 50 de ces figures sur lesquelles vous pourrez vous faire la main. Vous découvrirez que manipuler les pièces du jeu est une activité particulièrement plaisante dont on a du mal à se détacher. Trouver une solution, si elle existe, demande rarement plus de dix minutes. On s'améliore en jouant, repérant les débuts de construction qui ne peuvent aboutir, et l'on se formule à soi-même de petits raisonnements géométriques de plus en plus astucieux qui accélèrent la recherche, comme quand on résout des sudokus.

Le jeu, aujourd'hui très célèbre, a été utilisé dans divers contextes éducatifs ou scientifiques. Récemment, Johnmarshall Reeve, de l'Université du Wisconsin, et Glen Nix, de l'Université de Rochester, ont étudié les expressions faciales de sujets résolvant des problèmes du cube de SOMA, l'intérêt que les sujets exprimaient envers le jeu, et l'intérêt qu'ils ressentaient vraiment, mesuré en les observant à leur insu quand ils étaient laissés seuls en présence des sept pièces.

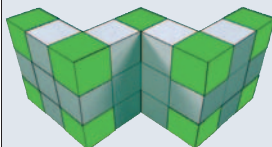
D'autres expériences utilisant un robot manipulant les pièces du SOMA ont été

Les figures impossibles

Si de très nombreuses figures sont réalisables avec les sept pièces du SOMA, ce n'est pas le cas de toutes. Comme les pièces 5, 6 et 7 sont non planes, toute sculpture de 27 cubes qui comporte 27, 26 ou 25 cubes dans un même plan est impossible.

Voici quatre exemples de sculptures impossibles moins évidentes. Pour les deux premières, nous indiquons un raisonnement simple et astucieux. Pour les deux autres, aucune démonstration courte d'impossibilité n'est connue, si vous en trouvez une, faites-la moi parvenir.

(a) Le mur en W

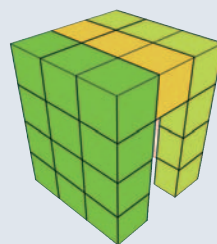


On a envie de réaliser, avec les sept pièces du SOMA, le mur en W. Pourtant c'est impossible. La preuve la plus simple est due à Richard Naylor de Denver dans le Colorado.

Considérons les dix coins du mur (en vert sur la figure). Chacune des pièces 2 et 3 peut occuper au plus deux coins. Chacune des autres pièces placées dans le mur ne peut occuper qu'un seul coin (quelques secondes d'attention pour chacune vous en persuaderont). Au total sans même prendre en compte les contraintes que les pièces s'imposent les unes les autres quand on veut les

placer ensemble dans le mur, on voit donc qu'elles ne peuvent occuper au mieux que 9 des 10 coins. La figure est impossible.

(b) Le pont

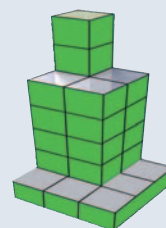


La preuve d'impossibilité, détaillée dans ce qui suit, est de Richard Sullivan.

Nommons côtés du pont les deux rectangles de taille 3×4 de droite et de gauche (en vert). Nommons plafond les 3 autres cubes situés en haut au centre (en jaune). Il y a trois pièces non planes, les pièces 5, 6 et 7. Elles ne peuvent pas se trouver entièrement incluses dans un côté, donc chacune a au moins un de ses cubes occupant une des places du plafond. Puisqu'elles sont trois, chacune a exactement un cube occupant une place du plafond. Chacune des pièces 5, 6 et 7 ne peut rencontrer qu'un seul des deux côtés (car leur plus grande longueur est 2). Il en résulte que deux d'entre elles sont placées de façon à occuper un cube du plafond et trois cubes d'un même côté. Ce côté ne possède plus alors que six places disponibles ($12 - 6$), qu'il est impossible d'occuper avec les pièces

planes restantes puisque leurs tailles respectives sont 3, 4, 4 (une seule est insuffisante pour remplir les 6 cases vides, deux pièces demanderaient au moins 7 cases vides).

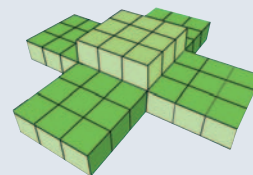
(c) Le gratte-ciel



La figure du gratte-ciel est la figure piège que l'article de Martin Gardner proposait. On connaît une preuve due à Robert Staats de son impossibilité, mais elle n'est pas aussi simple et lumineuse que les deux précédentes. Voyez-en :

<http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/NEWS/N990128.HTM>. Un lecteur découvrira-t-il une preuve simple ?

(d) La fleur carrée



Cette sculpture est aussi une sculpture impossible dont aucun raisonnement très simple ne semble pouvoir le prouver. À nouveau, nous défions les lecteurs ! Si vous séchez, une solution (longue) se trouve en : <http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/NEWS/N001127.HTM>.

Regards

conduites par Igor Verner. Le robot dont les commandes étaient confiées aux étudiants avait pour but d'améliorer les aptitudes spatiales des sujets à qui on demandait de résoudre des problèmes du cube de SOMA en contrôlant le bras articulé du robot. Ces expériences ont été menées en 2004 au Technion à Haïfa, en Israël.

À mains nues ou avec un programme ?

Depuis son invention et particulièrement depuis l'article de 1958 de M. Gardner, l'informatique a connu un progrès inouï qu'on évalue à un facteur supérieur à un million en vitesse de calcul et en capacité de mémorisation. Ce qui alors semblait un défi combinatoire difficile, même pour un ordinateur, est devenu facile, et par exemple toutes les figures proposées pour le cube de SOMA sont résolues en un éclair par un programme, même médiocre. Lorsque plusieurs jeux de SOMA sont mélangés (double SOMA, triple SOMA, etc.) et qu'on cherche à résoudre des problèmes de constructions avec ces jeux multiples, la combinatoire est plus volumineuse, mais,

jusqu'à trois jeux, elle reste facile pour un bon programme. Vous pouvez faire les vôtres ou utiliser ceux qu'on trouve sur Internet (par exemple en partant des pages de Th. Bundgaard).

Le jeu de SOMA aujourd'hui doit donc être considéré comme un jeu que les humains jouent sans machine pour le plaisir de la géométrie et de la résolution d'énigmes et entre eux pour l'amusement d'une confrontation, ou alors comme un jeu dont les problèmes les plus difficiles (dénombrements, impossibilité de certaines sculptures, etc.) exigent qu'on écrive des programmes d'ordinateur. Voici quelques énigmes dont certaines sont encore non résolues.

SOMA oblique

Il existe une variante élémentaire du jeu de SOMA, nommée *Rhoma*, où le fabricant (aujourd'hui disparu) a simplement remplacé les cubes par des parallélépipèdes

dont les angles ne sont pas droits (autrement dit des cubes obliques). Le fabricant, partant d'une des 240 solutions, a déformé chacune des sept pièces dans sa position occupée pour cette solution.

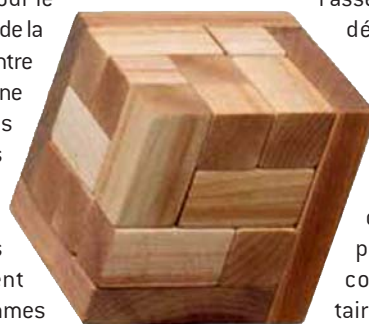
Cela lui a donné les pièces de son casse-tête. En partant de cette solution, l'assemblage des sept pièces déduites ne peut plus se faire que d'une seule façon (celle dont il est parti) : plus aucune des 239 autres solutions n'est valide, car l'angle oblique donné à chaque petit cube a créé des contraintes supplémentaires. La question ouverte qu'un bon programme doit

traiter en quelques secondes est la suivante : est-ce qu'en partant de n'importe laquelle des 240 solutions, la transformation des cubes en parallélépipèdes obliques donne un casse-tête à solution unique, ou alors, certaines solutions sont-elles compatibles ? Notons qu'ici, selon la position qu'on donne initialement à l'une des solutions avant de la déformer, on n'obtiendra pas le même puzzle oblique ; il y a donc plus de 240 cas à étudier.

Merci au lecteur qui nous communiquera la réponse que nous publierons dans la prochaine rubrique.

SOMA damier et SOMA peint

Plutôt que de déformer les cubes d'une solution, on peut les colorier. Le coloriage en damier est le plus simple : les huit coins du cube et les six centres des faces en couleur noire, les 13 autres cubes en blanc. Voici le problème que suggère ce coloriage : chaque solution induit un coloriage de chaque pièce et donc les 240 solutions induisent 240 coloriages du jeu de sept pièces du cube de SOMA ; combien de ces coloriages sont-ils vraiment différents et combien de fois obtient-on chacun ? Le même problème se pose pour chacune des sculptures possibles. Une partie de la solution est donnée sur le site de Th. Bundgaard.



3. CE CANAPÉ est un SOMA parfait de sept pièces.

Regards

Voici un autre défi posé par Nick Dickens. Est-il possible de colorier l'extérieur d'un cube (par exemple en noir), de défaire le cube, puis de remonter les pièces en forme de cube de manière à ce que toutes les faces coloriées en noir se retrouvent à l'intérieur, c'est-à-dire de telle façon qu'on ne voit plus du tout de faces coloriées en noir ? La même question se pose en ne coloriant en noir que quatre faces du cube (toutes sauf deux faces opposées), ou en coloriant en noir deux faces opposées seulement. La solution est connue pour le coloriage complet, mais pas pour les coloriations partiels.

Raisonnements et origamis

Dans son article de 1958, M. Gardner avait indiqué que certaines sculptures composées de 27 cubes sont impossibles à réaliser avec les sept pièces du cube de SOMA. Il avait donné un exemple et détaillé la preuve d'impossibilité. De plus, parmi les 25 modèles qu'il proposait aux lecteurs, il avait sciemment placé une figure impossible.

Confronté à des formes impossibles, un bon programme répond immédiatement « impossible ». Cependant, l'utilisation de la force brute de l'ordinateur n'est pas toujours nécessaire et ne l'est peut-être même jamais. Le raisonnement donne une bien plus grande satisfaction. Ces démonstrations sont d'excellents exercices à proposer à des élèves qui découvriront que chercher indéfiniment une solution qui n'existe pas est frustrant, et qu'un bon argument logique est le meilleur moyen de lever la frustration.

Ces raisonnements d'impossibilité ont aussi l'intérêt de faire comprendre très concrètement ce qu'est un « résultat négatif » comme il y en a tant en mathématiques : irrationalité de la racine de 2, impossibilité de résoudre toutes les équations polynomiales de degré cinq avec des formules utilisant des radicaux, impossibilité de démontrer le cinquième postulat d'Euclide concernant les parallèles, impossibilité de trouver un algorithme qui détermine pour tout programme d'ordinateur s'il s'arrête ou non, théorème de Gödel, etc.

Lorsque la combinatoire des sept pièces aura cessé de vous amuser, vous pourrez vous poser l'intéressant problème d'origami suivant. Quelle est la longueur minimale que doit avoir une bande de papier de largeur unité, pour qu'en la pliant on réussisse à fabriquer une pièce du cube de SOMA ? La bande de papier pourra être glissée dans des fentes créées par le début du pliage, mais aucune des arêtes de la pièce terminée ne doit pouvoir s'ouvrir (cela de façon à assurer une bonne robustesse).

Une solution mise au point par Sebastian Marius Kirsch donne la pièce 1 en partant d'un ruban de longueur 42, la pièce 2 avec un ruban de longueur 55, la pièce 3 avec 58, 4 avec 53, 5 avec 54, 6 avec 54, 7 avec 60. Ces longueurs n'ont pas été démontrées minimales et les valeurs minimales sont inconnues. C'est certainement là une énigme délicate, car ce problème se prête assez mal au raisonnement et l'écriture d'un programme pour le résoudre est sans aucun doute... un beau casse-tête !

Un extraordinaire film présente la réalisation de la solution de Kirsch menée par des mains expertes : <http://www.origami-nut.com/2008/03/06/video-soma-cube/>. Les schémas de pliage sont en : http://dev.origami.com/images_pdf/soma.pdf.

Bien sûr, depuis l'article de M. Gardner, la classe des problèmes de reconstitution de formes à partir d'assemblages de cubes collés, c'est-à-dire la classe des problèmes dont le cube de SOMA est un exemple élémentaire, a été étudiée par les spécialistes de la complexité. Il a été démontré que le problème était NP-complet : en accroissant le nombre N de petits cubes pour les pièces des problèmes, les seuls algorithmes généraux connus, et sans doute les seuls possibles, exigent un temps de calcul qui augmente exponentiellement vite (en fonction de N). Cela signifie concrètement qu'on arrive très vite à des problèmes impossibles à traiter même avec les plus puissants ordinateurs disponibles. Pour un peu plus de détails sur les problèmes NP-complets et un exemple liés aux sculptures en ballons, voir l'article de juin de cette rubrique.

Un bon casse-tête ne meurt jamais et le cube de SOMA est éternel. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

✓ BIBLIOGRAPHIE

H. Alt *et al.*, *Wooden geometric puzzles : design and hardness proofs*, Theory Comput. Syst., n° 44, pp. 160-174, 2009.

I. Verner, *Robot Manipulations : A Synergy of Visualization, Computation and Action for Spatial Instruction*, International Journal of Computers for Mathematical Learning 9, pp. 213-234, 2004.

E. Berlekamp *et al.*, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, vol. n° 2, ch. 24: Academic Press, 1982. Nouvelle édition : A. K. Peter, 2003.

J. Reeve et G. Nix, *Expressing Intrinsic Motivation Through Acts of Exploration and Facial Displays of Interest*, Motivation and Emotion, vol. 21 (3), pp. 237-250, 1997.

M. Gardner, *The Soma Cube*. The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions, ch. 6, New York : Simon and Schuster, 1961.

M. Gardner, *Mathematical Games : A Game in Which Standard Pieces Composed of Cubes are Assembled into Larger Forms*, Scientific American, n° 199, pp. 182-192, septembre 1958.



Retrouvez tous les articles de Jean-Paul Delahaye sur www.pourlascience.fr