pls_397_p000_000_logique et calcul.xp_mm_06_10 11/10/10 17:58 Page 146

REGARDS

LOGIQUE & CALCUL

L'ensemble de tous les ensembles

L'ensemble de tous les ensembles est généralement considéré comme un concept contradictoire. Il s'agit là d'une erreur, parmi les plus répandues au sujet des ensembles, que les logiciens dénoncent.

Jean-Paul DELAHAYE

En histoire des sciences, on a souvent du mal à comprendre comment les solutions aujourd'hui adoptées ont été si difficiles à trouver et à mettre au point, tant les consensus élaborés par nos illustres prédécesseurs nous semblent parfois faciles. C'est le cas pour la théorie des ensembles, dont on n'imagine plus se passer et dont la naissance fut pourtant un douloureux moment de l'histoire des mathématiques. Au début du XX^{e} siècle, on pensa à y renoncer à cause des paradoxes qu'on y avait décelés. Lorsqu'une solution fut trouvée, celle qu'on nomme aujourd'hui ZFC, l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix, la communauté mathématique fut rassurée ; depuis bientôt un siècle, la théorie ZFC, qui sert de support à pratiquement tout ce qui se fait en mathématiques, est universellement perçue comme simple et naturelle.

Pour éviter les paradoxes, ZFC impose quelques contraintes qui sont devenues des vérités mathématiques absolues : il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles, un ensemble ne peut pas être élément de lui-même, il n'y a pas d'ensemble de tous les ordinaux, ni d'ensemble de tous les cardinaux, etc. Or ces affirmations catégoriques sont inutiles et trompeuses ! En effet, des théories alternatives des ensembles nous autorisent à traiter, sans rencontrer de paradoxe, de l'ensemble de tous les ensembles, d'ensembles qui sont éléments d'eux-mêmes, etc. Méfions-nous des vérités définitives que l'habitude et la paresse nous font adopter et qui ne sont que des conventions liées au choix d'une solution particulière favorisée par l'histoire.

Les paradoxes ensemblistes

Alors que la théorie des ensembles entrevue par le mathématicien Bernard Bolzano au début du XIX^{e} siècle et développée par Georg Cantor à partir de 1873 commençait à s'imposer comme la théorie de base des mathématiques, le logicien et philosophe anglais Bertrand Russell publia en 1903 ce que l'on dénomme aujourd'hui l'antinomie de Russell *(voir la figure 2)* et qui est une contradiction en plein cœur de la théo-

1. L'ensemble de tous les ensembles

Le fondateur de la théorie des ensembles, Georg Cantor *(ci-contre)* démontra (ce qui était vrai à l'époque, les axiomes fondateurs étant mal précisés) que l'on ne peut envisager l'ensemble de tous les ensembles. Il prouva en effet que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, fini ou infini, est toujours « plus gros » que cet ensemble. Ainsi, l'ensemble de tous les ensembles n'est pas l'ensemble le plus gros.

Cela ne signifie pas seulement que l'ensemble des parties « paraît » avoir plus d'éléments. Ainsi, l'ensemble infini des nombres entiers paraît plus gros que l'ensemble infini des nombres pairs, alors qu'il existe une bijection entre les entiers et les entiers pairs, obtenue en doublant chaque entier. On dit que ces deux ensembles ont la même taille (même cardinal).

On démontre facilement que l'ensemble des parties d'un ensemble fini à K éléments a 2^K parties. Ce résultat a été généralisé par Cantor à des ensembles infinis : l'ensemble des parties d'un ensemble (fini ou non) a une cardinalité strictement supérieure à celle de l'ensemble de départ. Il n'y a donc pas de plus grand cardinal qui serait celui de l'ensemble de tous les ensembles.

Tout ensemble qui peut-être mis en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est dit dénombrable. Le théorème de Cantor montre en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable et l'on ne peut « numéroter » de façon exhaustive les sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

© Pour la Science - n° 397 - Novembre 2010

pls_397_p000_000_logique et calcul.xp_mm_06_10 11/10/10 17:58 Page 147

rie de Cantor. Le raisonnement est le même que celui fait à propos du barbier qui ne rase que tous les habitants de sa ville qui ne se rasent pas eux-mêmes. S'il se rase lui-même, alors c'est qu'il ne se rase pas ; s'il ne se rase pas lui-même, alors il possède la propriété qui fait qu'il doit se raser, et donc il se rase lui-même.

Le choc produit par l'antinomie de Russell fut très grave. Il ébranla par exemple l'Allemand Richard Dedekind qui cessa un moment de publier ses travaux sur la théorie des nombres. Le philosophe allemand Gottlob Frege prit connaissance de l'antinomie de Russell en mettant la dernière main à son ouvrage sur les fondements de l'arithmétique. Il y ajouta une note exprimant son désarroi : « Un scientifique peut difficilement être confronté à une situation plus désagréable que celle de voir les bases de son travail disparaître au moment précis où il s'achève. J'ai été mis dans cette situation par une lettre de Bertrand Russell alors que le livre était pratiquement sous presse. »

Plusieurs mathématiciens considérèrent qu'il fallait abandonner la théorie des ensembles. En fait, la raison de l'inquiétude ne venait pas seulement du paradoxe de Russell, mais d'une série d'autres. Le premier paradoxe découvert en théorie des ensembles est en réalité celui de Cesare Burali-Forti paru en 1897. Il envisage l'ensemble de tous les ordinaux (un ordinal est un ensemble ordonné tel que toute partie possède un plus petit élément). Cet ensemble, s'il existe, définit un nouvel ordinal dont on montre qu'il est strictement plus grand que tous les ordinaux utilisés pour le définir, ce qui est absurde. L'ensemble de tous les cardinaux (nombres qui servent à mesurer la taille, finie ou infinie, des ensembles) est sujet à la même difficulté.

Ces paradoxes techniques gênent le mathématicien, mais le paradoxe le plus grave est sans doute le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles *(voir la figure 1)* que Cantor connaissait sans doute dès 1899. Il se déduit d'un théorème général démontré par Cantor qui indique que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E est toujours plus gros que l'ensemble E lui-même. Il existe ainsi un ensemble de « puissance » supérieure à celle de tout ensemble E donné : c'est l'ensemble des sous-ensembles de E. Appliqué à l'ensemble de tous les ensembles, le théorème de Cantor conduit à l'idée que celui-ci, puisqu'il contient toutes ses parties, est strictement plus gros que lui-même, ce qui est aussi absurde que $1 > 1$.

Retomber sur ses pieds, c'est-à-dire éliminer les paradoxes, nécessite de les analyser et de modifier la façon dont nous raisonnons, de façon à ce qu'ils ne puissent plus survenir.

La résolution des paradoxes ensemblistes donna lieu à de nombreux travaux, dont ceux de Russell lui-même, qui constituent ce qu'on nomme la théorie des types et sur laquelle nous reviendrons.

La solution qui est adoptée aujourd'hui par les mathématiciens, ZFC, provient d'une axiomatisation de la théorie des ensembles proposée par Ernst Zermelo en 1908 et complétée dans les années 1920 par Abraham Fraenkel et John von Neumann. L'idée de cette solution est que seuls certains regroupements d'objets doivent être acceptés comme ensembles, mais pas tous. Il ne suffit pas de disposer d'une propriété, par exemple « l'ensemble *x* n'est pas élément de lui-même » pour avoir le droit de parler de l'ensemble des objets vérifiant la propriété, il faut être plus restrictif.

La théorie classique des ensembles : ZFC

La théorie ZFC soutient donc que certains regroupements définis par une propriété sont trop gros, et que seuls les regroupements soigneusement et progressivement construits comme nous l'expliquons plus loin sont des ensembles. La méthode se dénomme théorie de la limitation de taille.

Examinons les axiomes de ZFC pour voir comment s'effectue l'élimination des paradoxes. Le premier axiome indique, conformément au bon sens, que deux ensembles sont identiques si et seulement s'ils ont les mêmes éléments : un ensemble est

2. Les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes

L'antinomie de Bertrand Russell *(photographie à droite)* fut un tel choc qu'elle conduisit certains logiciens et mathématiciens, tel Dedekind, à abandonner temporairement la théorie des ensembles.

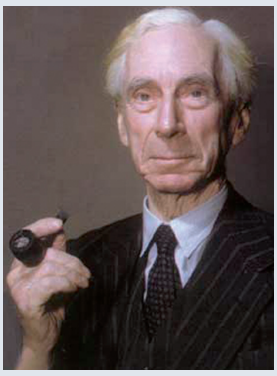
Russell distingue deux types d'ensembles, les ensembles qui sont un élément d'eux-mêmes (comme l'ensemble des idées, qui est une idée) et les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes (comme l'ensemble des éléphants, qui n'est pas un éléphant).

Le paradoxe consiste à raisonner de la manière suivante. Considérons l'ensemble E des ensembles qui ne sont pas élément d'eux-mêmes. Deux cas sont à envisager : E est élément de lui-même ou ne l'est pas.

– Si E n'est pas élément de lui-même, alors il possède la propriété caractéristique des éléments de E et il est donc dans E. Mais alors, E est élément de lui-même. C'est une contradiction !

– Si E est élément de lui-même, alors il n'a pas la propriété caractéristique des éléments de E (ne pas être élément d'eux-mêmes), ce qui implique que E ne peut pas être élément de lui-même. C'est, à nouveau, une contradiction.

Le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes conduit pareillement à une contradiction. S'il se mentionne lui-même, il n'est pas dans ce catalogue, mais s'il n'est pas dans le catalogue, alors c'est un catalogue qui ne se mentionne pas lui-même et il devrait y être.



© Pour la Science - n° 397 - Novembre 2010

pls_397_p000_000_logique et calcul.xp_mm_06_10 11/10/10 17:58 Page 148

3. Les axiomes de fondation et d'antifondation

L'axiome de fondation de ZFC indique que partant d'un ensemble (une boîte), si l'on prend l'un de ses éléments (une boîte-ensemble dans la boîte) et qu'on prend un élément dedans, et qu'on prend encore un élément dedans, etc., alors nécessairement on est obligé de s'arrêter : il n'existe pas de chaînes infinies descendantes x_0, x_1, x_2, x_3, x_4,... avec $x_1 \in x_0$, $x_2 \in x_1$, $x_3 \in x_2$, $x_4 \in x_3$,...

Cet axiome correspond à l'idée que lorsqu'on passe des êtres vivants aux cellules, des cellules aux molécules, des molécules aux atomes, des atomes aux quarks etc., on finit nécessairement par arriver à un ultime niveau qui n'est plus décomposable. L'axiome interdit aussi qu'un ensemble puisse se retrouver à l'intérieur de lui-même : $x \in x$ et interdit donc l'ensemble de tous les ensembles qui aurait cette propriété.

Le monde de la théorie classique des ensembles ZFC de Zermelo-Fraenkel correspond donc à une vue hiérarchisée du monde qui est facile à appréhender. C'est ce côté hiérarchisé et rassurant que la théorie des hyperensembles propose d'abandonner.

L'axiome d'antifondation qui définit la théorie des hyperensembles exprime que tout système d'équations, fini ou infini, de la forme : $x = \{1, \{7, 8\}, y, z\}$; $y = \{2, x, z\}$; $z = \{5\}$ (à gauche des variables représentant des ensembles, à droite des expressions utilisant les mêmes variables-ensembles) possède une solution unique : un hyperensemble.

L'équation $x = \{x\}$ définit l'hyperensemble le plus simple. Il est noté Ω et contient un élément : lui-même. C'est une sorte de bouteille de Klein. L'hyperensemble infiniment profond $\{1, \{2, \{3, \{...\}\}\}\}$ est le x_1 de la solution du système d'équations : $x_1 = \{1, x_2\}$, $x_2 = \{2, x_3\}$, $x_3 = \{3, x_4\}$, etc.

Cette possibilité de construire des ensembles infiniment profonds est un outil puissant de modélisation des structures autoréférentes souvent rencontrées en informatique où des objets dépendent mutuellement et cycliquement les uns des autres (jeux de pointeurs, flux de données, machines reliées en réseaux, etc.). Jon Barwise et John Etchemendy, dans leur livre intitulé *The Liar* (« Le menteur »), traitent les phrases autoréférentes et, par exemple, la phrase « je mens » est associée à l'hyperensemble $m = \{\text{faux}, \{m\}\}$ (une valeur de vérité, suivie d'un contexte simple composée dans ce cas de la phrase elle-même).

caractérisé par ses éléments, les connaître c'est le connaître. Les axiomes qui suivent donnent des moyens de construire de nouveaux ensembles à partir d'ensembles déjà connus. Ces axiomes sont les règles « légales » de définition et de manipulation de ces êtres mathématiques que sont les ensembles.

L'axiome de la réunion indique que si E est un ensemble, le regroupement des éléments d'ensembles appartenant à E, c'est-à-dire des x appartenant à des y appartenant à E, constitue encore un ensemble. De $E = \{\{a, b\}, \{\pi, 1/e\}, \{1, 2, 3\}\}$, on déduit l'existence de l'ensemble $\{a, b, \pi, 1/e, 1, 2, 3\}$. Ainsi, l'ensemble des nombres de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...) et l'ensemble des nombres triangulaires (1, 3, 6, 10, 15,...) forment un nouvel ensemble. Vous pouvez « parler » de l'ensemble des éléments présents dans l'un au moins des deux ensembles.

L'axiome de l'ensemble des parties affirme que le regroupement des sous-ensembles d'un ensemble E constitue lui aussi un ensemble. De $E = \{0, 1, 2\}$, on déduit l'existence de $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$. Notons « pour le plaisir » que si l'ensemble E a k éléments, il y a C_k^1 éléments individuels, C_k^2 paires d'éléments, etc., et la formule du binôme donne $(1 + 1)^k = 1 + C_k^1 + C_k^2 + ... + 1 = 2^k$. L'ensemble des parties de E a ainsi 2^k éléments.

L'axiome de séparation ou **axiome de compréhension restreint** indique que si $P(x)$ est une propriété (telle $x > 3$) et que E est un ensemble, alors les x qui sont dans E et qui vérifient cette propriété restrictive $P(x)$ constituent aussi un ensemble. Il est essentiel de noter que cet axiome permet de définir un ensemble à partir d'une propriété, ce qui est bien sûr souhaitable, mais qu'il impose la restriction de ne prendre que des x présents dans un ensemble déjà connu E.

• Cette définition permet d'envisager l'ensemble des nombres premiers. Pour cela, on part de l'ensemble des entiers (construit préalablement) et de la propriété $P(x)$: « x n'a pas de diviseurs autres que 1 et lui-même. »

• La propriété $x = x$, seule, ne définit pas un ensemble. Si c'était le cas, la formule définirait l'ensemble de tous les ensembles, ce qui contredirait le théorème de Cantor de ZFC.

• « Posséder deux éléments exactement » ne définit pas un ensemble dans ZFC. C'est la clef de la résolution des paradoxes : elle empêche la définition d'ensembles trop gros. On ne peut pas parler de l'ensemble de tous les ensembles ni de l'ensemble des x qui possèdent la propriété de ne pas être éléments d'eux-mêmes. Les paradoxes de Russell et Cantor sont donc évités, de même d'ailleurs que le paradoxe de l'ensemble des ordinaux et celui de l'ensemble des cardinaux.

L'axiome de remplacement indique que si, étant donnée une fonction R telle que pour tout élément x d'un ensemble E, la fonction R détermine un élément y, alors les éléments y constituent un nouvel ensemble, F. En clair, l'image d'un ensemble E par une fonction R est un ensemble. Contrairement à l'axiome de séparation, l'axiome de remplacement peut engendrer (d'une manière contrôlée) des ensembles F qui ne sont pas inclus dans E.

L'axiome de l'infini indique qu'il existe au moins un ensemble infini E. Il existe plusieurs façons de définir un ensemble infini. L'une d'elles, due à Dedekind, consiste à dire que E est infini si E possède un sous-ensemble F différent de E, et que l'on peut mettre en bijection avec E. Selon cette définition, l'ensemble des entiers est infini, car l'ensemble des entiers peut être mis en bijec-

© Pour la Science - n° 397 - Novembre 2010

pls_397_p000_000_logique et calcul.xp_mm_06_10 11/10/10 17:58 Page 149

tion avec l'ensemble des entiers pairs en doublant chaque entier (fonction $n \to 2n$).

L'axiome de fondation (AF), proposé par von Neumann en 1925, est explicité sur la figure 3 : il n'existe pas de chaînes infinies de boîtes-ensembles les unes dans les autres et pas de boîtes-ensembles qui se contiennent elles-mêmes !

L'axiome du choix (le « C » de ZFC) indique que si E est un ensemble d'ensembles non vides, alors il existe un ensemble F qui a un élément commun exactement avec chaque ensemble de E. De{{0, 1, 2},{π, 1/e},{A, B}}, on déduit l'existence d'un ensemble F comme {2, 1/e, B}. L'axiome du choix crée certaines difficultés *(voir l'article d'octobre 2009 de cette rubrique)* et c'est pour cela qu'on le fait apparaître dans le nom ZFC de la théorie.

Il est remarquable que ces simples axiomes, tous assez naturels, permettent l'expression de pratiquement toutes les idées et démonstrations mathématiques et que depuis plus d'un siècle qu'on explore les conséquences de ZFC, jamais aucune contradiction n'y a été découverte. Cependant, la méthode adoptée par ZFC opère une distinction entre ensembles et regroupements (définis seulement par une propriété). Cette distinction interdit de considérer que certains regroupements simples et naturels sont d'authentiques ensembles… ce qui est étrange. En un mot, la solution exprimée dans ZFC apparaît comme une rustine : elle répare la théorie initiale de Cantor, mais elle lui enlève sa beauté et sa généralité. Elle en limite la puissance en interdisant en particulier de mentionner un ensemble universel contenant la totalité des ensembles ou de définir le nombre *n* comme le regroupement de tous les ensembles possédant *n* éléments, selon l'élégante idée de Cantor et de Frege.

Les révisions possibles

Une extension de ZFC donne un statut théorique aux regroupements problématiques (ensemble de tous les ensembles, ensembles des ordinaux, etc). Elle consiste à introduire, à côté de la notion d'ensemble, la notion de classes en définissant certaines opérations entre classes, dont en particulier la définition d'une classe à partir d'une propriété. La classe de tous les x qui vérifient $x = x$ correspond à l'ensemble de tous les ensembles. Cette théorie de von Neumann, Bernays et Gödel, notée NBG, est une première méthode pour disposer du droit de mentionner les gros ensembles problématiques interdits dans ZFC. Cependant, cette façon d'étendre ZFC n'est pas jugée satisfaisante, car elle se fonde sur une distinction artificielle et injustifiée entre deux catégories de regroupements, les ensembles et les classes, un peu comme dans une société qui considérerait deux types de citoyens : ceux qui jouissent pleinement de tous les droits (les ensembles), et ceux qui n'en ont qu'une partie sans qu'on sache trop bien pourquoi.

Une méthode plus élégante pour augmenter le pouvoir de ZFC consiste à revoir l'axiome de fondation qui est le dernier historiquement ajouté à ZFC et que d'ailleurs Cantor n'avait pas envisagé du tout.

En interdisant directement l'ensemble de tous les ensembles, l'axiome de fondation est rassurant. Cependant, on s'était déjà débarrassé des paradoxes avant de l'introduire. L'utilisation de l'axiome de fondation ressemble un peu à la méthode consistant à pendre un noyé pour être certain qu'il est bien mort ! Notons aussi que même si AF à lui seul évite le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles, il est inopérant contre d'autres paradoxes et ne constitue donc pas une alternative complète à la doctrine de la limitation de la taille que met en œuvre ZFC.

Le Britannique Peter Aczel, et indépendamment les Italiens Marco Forti et Furio Honsell, ont proposé dans les années 1980 de renoncer à AF et de le remplacer. Acceptons l'idée qu'il y a des ensembles qui appartiennent à eux-mêmes, comme on accepte l'idée qu'il y a des nombres dont le carré est –1, et imposons par un axiome particulier qu'il y en existe de toutes les sortes imaginables.

L'axiome d'antifondation, noté AFA *(voir la figure 3)*, indique non seulement qu'il y a toutes sortes d'ensembles appartenant à eux-mêmes, mais que précisés par une loi adéquate, ils sont uniques. Cette double affirmation d'existence et d'unicité confère à l'axiome AFA toute sa force et en fait l'intérêt. L'axiome AFA crée une révolution comparable à l'introduction des nombres complexes. En plus de tous les « ensembles habituels » qui bien sûr restent des ensembles dans cette théorie, il y a maintenant une multitude d'autres ensembles « antifondés » qu'on dénomme *hyperensembles*.

Les hyperensembles

En particulier, dans la théorie des hyperensembles ZFC – AF + AFA (tous les axiomes de ZFC, moins l'axiome de fondation, plus l'axiome AFA), il y a un hyperensemble unique noté Ω qui vérifie $x = \{x\}$. L'hyperensemble Ω est un être étrange possédant un seul élément, lui-même. D'après AFA, il est le seul à posséder cette propriété. Il représente une sorte de monde autiste, refermé en boucle sur lui-même !

Il y a aussi un hyperensemble unique qui vérifie $x = \{x, \emptyset\}$. C'est un objet étrange qui possède deux éléments : l'ensemble vide et lui-même. Il y aussi l'hyperensemble infiniment profond $\{0, \{1, \{2, \{3, \{...\}\}\}\}$ *(voir la figure 3)*.

Ajouter un nouvel axiome comme AFA fait prendre des risques : si ZFC ne conduit jamais à une contradiction, en est-il de même de ZFC – AF + AFA ? La réponse est oui : on ne prend aucun risque avec AFA. En effet, P. Aczel a prouvé un résultat de « consistance relative » analogue à un autre obtenu par von Neumann pour AF : si la théorie usuelle des ensembles, ZFC, ne conduit jamais à une contradiction, alors il en est de même de ZFC – AF + AFA. Les hyperensembles n'introduisent aucun danger particulier de contradiction.

L'intérêt d'une théorie se prouve en l'appliquant. C'est aujourd'hui chose faite pour la théorie des hyperensembles. Les domaines dans lesquels elle a été utilisée sont principalement liés à l'informatique et à l'analyse des paradoxes. Plusieurs livres *(voir la bibliographie)* en donnent le détail. Notons que P. Aczel avait été amené à introduire les hyperensembles alors qu'il étudiait le problème informatique de la représentation formelle des flux de données et la synchronisation entre systèmes communicants fonctionnant

pls_397_p000_000_logique et calcul.xp_mm_06_10 11/10/10 18:56 Page 150

4. Les progrès en théorie des ensembles

	ENSEMBLE DE TOUS LES ENSEMBLES	ANTINOMIE DE RUSSELL
THÉORIE CLASSIQUE DES ENSEMBLES ZFC AVEC L'ENSEMBLE DE FONDATION	Le paradoxe est éliminé par l'axiome de compréhension. On ne prend des éléments d'ensembles que dans des ensembles connus. Inconvénient : ce regroupement naturel est éliminé.	Le paradoxe est éliminé par l'axiome de fondation (pas d'emboîtement à l'infini) et il n'y a pas d'ensembles qui se contiennent eux-mêmes. Inconvénient : les ensembles autoréférents seraient utiles.
THÉORIE CLASSIQUE DES ENSEMBLES ZFC AVEC L'ENSEMBLE D'ANTIFONDATION	Le paradoxe est éliminé par l'axiome de compréhension. On ne prend des éléments d'ensembles que dans des ensembles connus. Inconvénient : il n'y a toujours pas de gros regroupements.	L'axiome d'antifondation autorise les emboîtements à l'infini : les ensembles qui se contiennent eux-mêmes existent et sont caractérisés par des équations.
THÉORIE DES TYPES DE RUSSELL	Les deux paradoxes sont éliminés. On considère les ensembles niveau par niveau, le niveau $n+1$ étant celui des ensembles dont les éléments sont de niveau n. Il existe un ensemble de tous les ensembles par niveau, mais pas d'ensemble vraiment universel, car les niveaux ne se mélangent pas. Inconvénient : il y a une infinité de niveaux et la pratique est difficile.	
THÉORIE NFU (*NEW FOUNDATION* ET URÉLÉMENTS)	Les deux paradoxes sont éliminés. À chaque fois qu'apparaît le symbole d'appartenance $\in$ dans une formule définissant un ensemble, le niveau de la variable à droite doit être $n+1$ si celui de la variable de gauche est n. Dérivée de la théorie de Russell, cette théorie est d'utilisation plus simple, car les niveaux portent sur les variables et non sur les ensembles.	

de manière ininterrompue comme le sont les ordinateurs connectés en réseaux. Un autre domaine d'application des hyperensembles est celui des bases de données et de la formalisation du langage naturel.

L'ensemble de tous les ensembles ?

La théorie des hyperensembles propose certes une extension de la notion d'ensemble. Mais elle ne donne pas encore la possibilité de parler de l'ensemble de tous les ensembles, car le théorème de Cantor y est toujours valide. C'est sur le problème de traiter de tels « gros regroupements » que des avancées remarquables ont été faites, dont plusieurs ces dernières années.

Au départ, il y a la tentative au début du XX^{e} siècle par Russell d'éviter les paradoxes par sa fameuse « théorie des types » qui a été abandonnée du fait de sa complication. Dans ce système, on considère les ensembles niveau par niveau, le niveau $n+1$ étant celui des ensembles dont les éléments sont de niveau n. Chaque ensemble appartient à un niveau donné et il y a une infinité de catégories d'objets différents, ce qui crée de sérieuses contraintes de manipulation. Le système ZFC, qui n'envisage qu'un seul type d'objets, a donc été préféré.

Les paradoxes sont évités par Russell, car les seules formules autorisées dans sa théorie pour définir par compréhension de nouveaux ensembles doivent respecter le système de niveaux. Une formule comme « x appartient à x » n'a pas de sens dans la théorie, car dans une formule correcte de la théorie des types, la relation d'appartenance ne peut relier que deux niveaux différents.

Reprise par le logicien et philosophe américain Willard Quine en 1937, la théorie des types de Russell est devenue un nouveau système d'axiomes bien plus simple dénommé *New Foundation* (NF). Malheureusement, Ernst Specker démontra en 1953 que NF contredit l'axiome du choix, ce qui rend NF malcommode pour les mathématiciens attachés à l'axiome du choix et qui, même s'ils s'en méfient, veulent pouvoir l'utiliser librement. Cela conduisit alors Ronald Jensen à proposer une nouvelle version de la théorie de Quine, nommée cette fois NFU (car on y introduit des objets dénommés « uréléments ») compatible avec l'axiome du choix. Depuis, cette théorie dont on peut dire qu'elle possède autant de bonnes propriétés que ZFC, tout en permettant de parler et de manipuler l'ensemble de tous les ensembles et d'autres « gros ensembles », est défendue comme un substitut possible à ZFC.

Un livre de Randall Holmes présente NFU d'une manière élémentaire et prouve ainsi que tout ce qui est fait avec ZFC peut l'être aussi commodément avec NFU. Si NFU n'est aujourd'hui pas utilisée, et même est souvent totalement ignorée, c'est sans doute principalement parce qu'elle est apparue tardivement. Voyons comment NFU évite les paradoxes.

Alors que ZFC (avec l'axiome AF ou dans sa version AFA) attaque les paradoxes en limitant la définition des ensembles à partir des formules par la contrainte de l'axiome de séparation, NF et NFU évitent les paradoxes sans cet artifice en exigeant en revanche que les formules qu'on utilise pour définir les ensembles soient « stratifiées ».

« Stratifié » signifie qu'il faut qu'on puisse attribuer des niveaux à chaque variable des formules utilisées pour définir les ensembles, d'une manière telle qu'à chaque fois qu'apparaît le symbole d'appartenance, $\in$, le niveau de la variable à droite soit $n+1$ si celui de la variable de gauche est n. Contrairement à la théorie des types qui obligeait à attribuer des niveaux aux ensembles eux-mêmes (multipliant ainsi des différentes sortes d'objets), ici l'attribution d'un niveau doit seulement se faire sur les variables des formules qu'on veut utiliser pour définir des ensembles. On est passé d'une contrainte globale d'attribution des niveaux à chaque

© Pour la Science - n° 397 - Novembre 2010

pls_397_p000_000_logique et calcul.xp_mm_06_10 11/10/10 17:58 Page 151

élément de l'Univers, à une contrainte temporaire et syntaxique s'appliquant juste aux formules utilisées pour définir des ensembles et qu'on peut oublier une fois l'ensemble défini. En pratique, la vérification que les formules qu'on utilise sont stratifiées est assez facile et moins contraignante que l'axiome de séparation de ZFC.

Donnons des exemples. La formule $x = x$ ne pose pas de problème. Comme elle n'utilise pas le symbole d'appartenance, elle est considérée stratifiée et, en conséquence, il existe un ensemble U des ensembles vérifiant $x = x$. Cet ensemble U est bien sûr l'ensemble de tous les ensembles qui a donc une existence pleine au sein de la théorie de Quine ou de la théorie de Jensen.

La formule $x \in x$ n'est bien sûr pas stratifiée, de même que la formule $x \notin x$ qui conduirait au paradoxe de Russell. Ces deux formules ne définissent pas d'ensembles et on évite donc le paradoxe de Russell. Si E est un ensemble, la formule $x \notin E$ est stratifiée, ce qui signifie que dans NF ou NFU, le complémentaire d'un ensemble (vis-à-vis de tout) existe, alors que dans ZFC le complémentaire d'un ensemble n'existe que relativement à un autre ensemble.

Le paradoxe de Cantor créé par le théorème de Cantor est évité, car dans NF et NFU le théorème de Cantor n'est plus vrai (sa démonstration s'appuie sur une formule non stratifiée). C'est peut-être dommage, mais c'est le coût qu'il faut accepter de payer pour que l'on puisse parler de l'ensemble de tous les ensembles.

Dans NF et NFU, on peut introduire et manipuler sans problème l'ensemble des tous les ordinaux, et l'ensemble de tous les cardinaux. Ces théories sont donc bien une autre façon de slalomer entre les paradoxes sans jamais s'y cogner. Elles montrent que l'ensemble de tous les ensembles et bien d'autres gros ensembles interdits dans les théories des ensembles de type ZFC (avec AF ou avec AFA) peuvent recevoir un statut simple, au sein d'une théorie mathématique homogène, et que c'est donc une erreur de croire que l'ensemble de tous les ensembles et les autres gros ensembles de ZFC sont des concepts paradoxaux.

Citons R. Holmes, défenseur de NFU y compris pour l'initiation et l'enseignement : « La raison pour laquelle nous croyons que NFU est un bon moyen pour l'apprentissage de la théorie des ensembles est qu'elle autorise presque toutes les constructions naturelles de la théorie naïve des ensembles, qui est celle de Frege et cela sans limitations artificielles. [...] Les nombres cardinaux finis ou infinis peuvent être définis en suivant les idées de Cantor et Frege. De même, pour les ordinaux. [...] Les grosses classes intéressantes sont vraiment des ensembles : c'est le cas de l'ensemble de tous les groupes, de l'ensemble de tous les espaces topologiques [...].»

L'ordre d'arrivée sur le terrain

Venues trop tard sans doute pour s'imposer maintenant devant ZFC, les théories alternatives des ensembles, que ce soient NBG, ZFC – AF + AFA ou NFU, présentent toutes des avantages sur ZFC dont elles étendent le pouvoir de représentation. Ces théories, et d'autres encore que nous n'avons pas mentionnées ici, mettent à la disposition des mathématiciens des univers plus riches et plus étendus (à chaque fois en un sens précis). Elles constituent peut-être de meilleures bases pour fonder les mathématiques et penser l'Univers, y compris celui de la physique. La relative indifférence dont elles sont victimes illustre les aléas de l'histoire des sciences où, comme dans les compétitions militaires et commerciales, l'ordre d'arrivée sur le terrain joue un rôle déterminant, condamnant parfois les meilleurs à jouer les seconds rôles, voire à la mort.

Il serait cependant souhaitable que le plus grand nombre possible de mathématiciens, de scientifiques et de philosophes ait conscience de cette sorte d'injustice et ne pense pas faussement que l'autoréférence ensembliste (x appartient à x) est contradictoire, ni que parler de l'ensemble de tous les ensembles et des autres « grosses classes » (ce qu'on a toujours eu envie de faire) conduit inévitablement au désastre de l'inconsistance. Ce n'est pas vrai. ■

L'AUTEUR

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

R. Holmes, **Elementary set theory with a universal set**, 1998/2010 : http://math.boisestate.edu/ffholmes/holmes/head.ps

L. Moss, **Non-wellfounded set theory**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2008 : http://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/

R. Holmes, **Alternative axiomatic set theories**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2006 : http://plato.stanford.edu/entries/settheory-alternative/

J. Barwise et L. Moss, **Vicious circles**, *CSLI Lecture Notes n° 60*, CSLI Publications, 1996.

Th. Forster, **Set Theory with a Universal Set**, Oxford logic guides, n° 31 (2e édition), Cambridge University Press, 1995.

P. Aczel, **Lectures on nonwellfounded sets**, *CLSI Lecture Notes n°9*, 1987.

J. Barwise et J. Etchemendy, **The Liar. An Essay on Truth and Circularity**, Oxford University Press, 1987.

R. Jensen, **On the consistency of a slight (?) modification of Quine's 'New Foundations'**, *Synthese*, vol. 19, pp. 250-263, 1969.

W. Quine, **New foundations for mathematical logic**, *American Mathematical Monthly*, vol. 44, pp. 70-80, 1937.