

REGARDS

LOGIQUE & CALCUL

Combiner des pertes pour gagner

L'idée que, en associant plusieurs jeux défavorables, on puisse en obtenir un favorable est choquante. Les exemples de telles situations, dont le premier est dû à l'Espagnol Juan Parrondo, sont pourtant nombreux et variés.

Jean-Paul DELAHAYE

Si un jeu de hasard n'est pas trop compliqué, vous calculez ce qu'il rapporte ou fait perdre en moyenne à chaque partie. Le jeu de roulette des casinos français est « perdant » pour les joueurs : statistiquement, plus vous y jouez, plus vous perdez de l'argent. Dans sa version la plus simple, pour chaque euro joué sur un nombre, vous perdez en moyenne $1/37^e$ d'euro.

Autre exemple de jeu perdant : vous lancez une pièce de monnaie non truquée : si c'est PILE, vous gagnez 1 euro, si c'est FACE, vous perdez 2 euros. Comme vous gagnez une fois sur deux et perdez une fois sur deux, vous perdrez en moyenne 0,50 euro par partie. On dit que l'espérance mathématique du jeu vaut $-0,50$ euro par partie. Dans le cas de la roulette, elle est $-1/37^e$ d'euro pour chaque euro joué. Si le jeu est gagnant, et c'est le cas pour les mêmes jeux vus du côté de ceux qui vous les proposent, alors l'espérance est positive : $+1/37^e$ d'euro pour chaque euro joué dans le cas du casino et $+0,50$ euro par partie pour le PILE ou FACE inéquitable donné en exemple.

Rien n'interdit de jouer à deux jeux A et B en même temps ou d'alterner les deux jeux, par exemple en jouant régulièrement A, B, A, B, etc. Lorsque les jeux sont indépendants (c'est-à-dire n'influent pas l'un sur l'autre), si l'espérance de A est e , et celle de B est f , alors le jeu simultané de A et de B a une espérance $e + f$. Le jeu alterné a une espérance $(e + f)/2$. En jouant simultanément ou

alternativement à deux jeux indépendants d'espérance négative, vous créez donc un jeu perdant : la somme de deux nombres négatifs est négative !

Vous penseriez alors que combiner deux jeux perdants donne toujours un jeu perdant. C'est faux ! C'est le paradoxe de Parrondo et le sujet de notre rubrique. Découvert en 1996 par le physicien espagnol Juan Parrondo, ce paradoxe a suscité un intérêt considérable. On a dit, mais aussi contesté, qu'il concernait l'économie, la finance, la génétique des populations, la physique quantique. Surtout, il incite à rêver : en participant astucieusement à plusieurs jeux qui vous sont tous défavorables, il suggère qu'il est possible d'en tirer un jeu favorable. Cela ressemble à de la magie !

Gagner en combinant deux jeux perdants

Plus d'une centaine d'articles scientifiques ont été publiés pour l'étudier, le généraliser ou en proposer des variantes. Chaque année, de nouveaux travaux se réfèrent à ce paradoxe, preuve que l'idée initiale du chercheur espagnol est non seulement intéressante, mais d'une grande fécondité. Pourtant, comprendre pourquoi il est possible de combiner des jeux perdants pour gagner n'est pas facile.

Bien sûr, la combinaison de deux jeux perdants que propose le paradoxe de Parrondo n'est pas un simple jeu simultané ou alterné entre jeux indépendants, car de tels

jeux sont nécessairement perdants. J. Parrondo, dans la forme initiale du paradoxe, propose une combinaison plus subtile, où deux jeux très particuliers notés A et B sont mélangés.

Le jeu A consiste à lancer une pièce de monnaie légèrement truquée : PILE, qui fait gagner le joueur, tombe avec une probabilité $1/2 - e$, où e est un petit nombre positif ; FACE, qui fait perdre, tombe avec la probabilité complémentaire $1/2 + e$. Gagner rapporte un euro, perdre en coûte un. L'espérance d'un tel jeu est $-2e$ euros par partie ; comme elle est négative, le jeu A est perdant.

Le jeu B est un peu plus compliqué. Si le capital du joueur est un multiple de 3, il gagne un euro avec une probabilité $p_1 = 1/10 - e$ et perd un euro avec la probabilité $1 - p_1$; sinon, il gagne un euro avec une probabilité $p_2 = 3/4 - e$, et perd un euro avec la probabilité $1 - p_2$ (voir l'encadré 1).

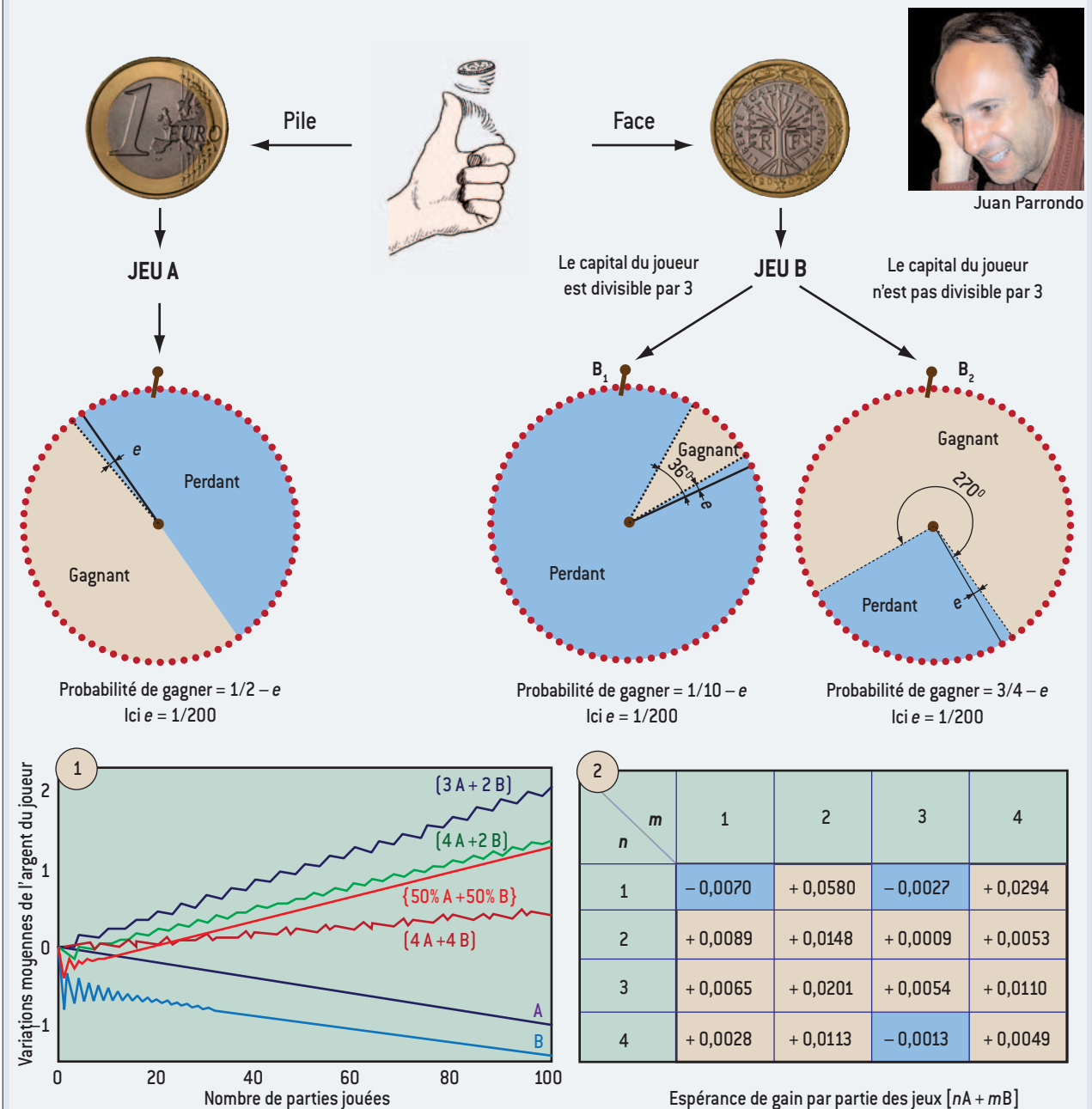
On choisit une valeur de e qui rend le second jeu défavorable. C'est le cas pour la valeur $1/200$. L'espérance du jeu B est alors de $-0,0087$ euro par partie. Il s'agit d'une valeur assez faible, mais, à long terme, jouer au jeu B fait perdre de l'argent (voir le tableau 1 de l'encadré 1).

Il se produit alors un étonnant phénomène : une multitude de combinaisons simples des jeux A et B sont des jeux gagnants. L'expérimentation numérique montre par exemple que les trois combinaisons suivantes sont des jeux gagnants.

– Combinaison aléatoire équilibrée des jeux A et B, notée $\{50\% A + 50\% B\}$: on joue

Regards

1. Le paradoxe de Parrondo



Pour $e = 1/200$, les jeux A et B du paradoxe de Parrondo sont perdants. En jouant A, on perd en moyenne 0,01 euro par partie. En jouant B, on perd en moyenne 0,0087 euro par partie. En revanche, en combinant A et B, on construit divers jeux gagnants. Ainsi, en jouant aléatoirement une fois sur deux A, et une fois

sur deux B, jeu noté $\{50\%A + 50\%B\}$, on gagne en moyenne 0,01 euro par partie.

Les combinaisons périodiques sont elles aussi parfois gagnantes (voir les tableaux des espérances pour les jeux $[nA + mB]$): on joue n fois A, puis m fois B, et on recommence périodiquement. Les calculs pour le tableau 1 ont été faits en évaluant

la moyenne des résultats de 50 000 simulations. Pour le tableau 2, on en a utilisé 1 000 000.

N'y a-t-il pas là un miracle ? Pourrait-on exploiter ce paradoxe pour gagner de l'argent à la roulette, ou pour imaginer des stratégies boursières assurant de gagner de l'argent sur des marchés boursiers en baisse ?

Regards

2. L'explication fine du

Nous allons introduire une variante du paradoxe de Parrondo qui nous donnera la clef du mécanisme à l'œuvre, bien dissimulé.

Dans le cas examiné précédemment, le jeu B est composé de deux sous-jeux B_1 et B_2 . Quand $e = 1/200$, B_1 est défavorable, B_2 est favorable. Selon la valeur modulo 3 du capital du joueur, c'est B_1 ou B_2 qui est pratiqué. Le jeu que nous introduisons, B#, ressemble au jeu B à ceci près qu'au lieu de choisir selon le capital, on choisit aléatoirement entre B_1 et B_2 avec des probabilités $1/3$ et $2/3$ (avec une roue de loterie). L'espérance du jeu B# est la valeur moyenne des espérances de B_1 et B_2 pondérées par $1/3$ et $2/3$, soit :

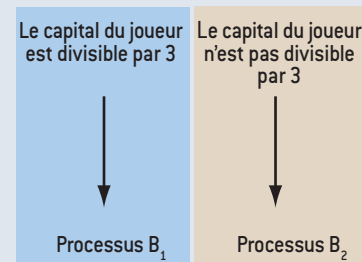
$1/3 (1/10 - e - 9/10 - e) + 2/3 (3/4 - e - 1/4 - e)$, qui devient, après simplification, $1/15 - 2e$.

Les valeurs de e qui rendent négative cette espérance vérifient $1/15 - 2e < 0$, soit $e > 1/30$. Pour la valeur $e = 1/200$ qu'utilise J. Parrondo, le jeu B# a donc une espérance positive : c'est un jeu gagnant. Que pour $e = 1/200$ le jeu B soit un jeu perdant est donc étonnant. Cela provient de ce que les variations du capital du joueur ne sont pas aléatoires et font que B_1 (qui est perdant) est choisi un peu plus souvent que dans $1/3$ des cas. La simulation numérique montre que B_1 est choisi dans 38,3 % des cas, ce qui est légèrement supérieur à $1/3$. L'analyse mathématique par la théorie des chaînes de Markov confirme ce résultat : B_1 est choisi dans exactement $32\,401/84\,463 = 38,361\,175\%$ des cas.

Cependant, ce léger glissement fortuit qui fait de B un jeu perdant n'a pas de raison de persister

Processus B

Le choix entre les processus B_1 et B_2 se fait selon la valeur du capital modulo 3



le jeu A ou le jeu B en choisissant au hasard à chaque fois, à pile ou face par exemple. L'espérance de ce jeu combiné est $+0,0147$, ce qui signifie qu'on gagne en moyenne 1,47 centime d'euro par partie.

– Combinaison périodique « 2 fois A, puis 2 fois B, etc. », notée $[2A + 2B]$. On choisit de jouer deux fois de suite le jeu A, puis deux fois le jeu B, et on recommence indéfiniment selon le même schéma. L'espérance de ce jeu combiné est de $+0,0148$; on gagne en moyenne 1,48 centime par partie.

– Combinaison périodique $[A + 2B]$. L'espérance est encore meilleure : $+0,058$; on gagne en moyenne 5,8 centimes par partie.

Il est étonnant que la combinaison de deux jeux perdants soit un jeu gagnant, d'autant que certaines autres combinaisons de A et B restent perdantes. La combinaison $[A + B]$ (jouer périodiquement A, puis B, puis A, etc.) est un jeu perdant d'espérance $-0,007$ (voir les tableaux 1 et 2 de l'encadré 1). Bien évidemment, si la combinaison de deux jeux perdants peut être un jeu gagnant, la combinaison de deux jeux gagnants est parfois un jeu perdant : on reprend les jeux A et B et on inverse gains et pertes !

Les résultats obtenus par simulation sont confirmés par la théorie des chaînes de Markov, théorie qui permet une étude mathématique complète des jeux composés utilisés dans le paradoxe de Parrondo.

Ces calculs sont assez longs et ne mettent pas en lumière les causes profondes des étonnants résultats de combinaisons. La confirmation du résultat des simulations par l'étude mathématique permet cependant d'affirmer qu'au sens strict, il n'y a pas de paradoxe, mais seulement une situation contraire à notre attente intuitive.

Comment comprendre cela ? Pourquoi notre bon sens est-il piégé ? Une vision claire est-elle possible ? L'explication profonde de ce qui se passe dans le cas du paradoxe de Parrondo provient de ce que le jeu B est composé d'un jeu perdant et d'un jeu gagnant. Le jeu gagnant est battu par le jeu perdant quand on joue B seul, mais s'impose plus fréquemment quand B est mélangé à A (voir l'encadré 2). Pour saisir comment deux jeux perdants peuvent engendrer un jeu gagnant et vous persuader qu'on ne doit pas s'en étonner, examinons un autre exemple, plus net, plus clair et plus spectaculaire que le paradoxe original.

Le rôle de l'interaction

Notons d'abord le point essentiel suivant : c'est l'existence d'un paramètre commun aux deux jeux et intervenant dans les règles, la valeur du capital du joueur, qui est à l'origine du phénomène paradoxal. Pour toutes les compositions produisant le paradoxe,

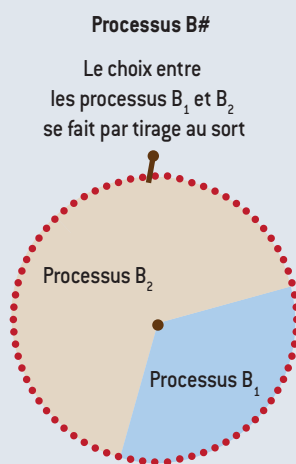
les deux jeux associés sont dépendants, chaque jeu faisant évoluer le paramètre partagé. S'il n'y avait pas ce lien entre A et B qui fait que ce qui se passe avec le jeu A influe sur le jeu B, et réciproquement, alors on pourrait, comme dans le cas des jeux simultanés ou alternés, appliquer des raisonnements montrant que le résultat ne peut être qu'un jeu perdant.

On démontre en effet que les jeux combinés du type $\{x\%A + y\%B\}$ (on joue au hasard A ou B en choisissant A avec une probabilité x et B avec la probabilité $y = 1 - x$) ou $[nA + mB]$ (on joue n fois A, puis m fois B, et on recommence) construits avec des jeux perdants indépendants sont nécessairement perdants : l'espérance de tels jeux composés est donnée par la formule $xe + yf$ pour les jeux $\{x\%A + y\%B\}$, et par la formule $(ne + mf)/(n + m)$ pour les jeux $[nA + mB]$, où e est l'espérance de A et f celle de B.

Sans interaction, deux jeux perdants donnent inéluctablement un jeu perdant : si vous voulez combiner des jeux perdants pour en faire des jeux gagnants, il faudra vous arranger pour que les jeux interagissent. Dans le cas de la roulette et de bien d'autres jeux, n'ayez pas trop d'espoir : pour la roulette, aucune martingale ne retourne en faveur du joueur l'avantage que le casino s'attribue. En conséquence, quelle que soit la combinaison de martingales que vous

Regards

paradoxe de Parrondo



quand on combine le jeu B avec le jeu A. En effet, l'introduction du jeu A modifie le capital du joueur et, le plus souvent, la combinaison de A et de B fait que la proportion de cas où B_1 est choisi (quand on joue B) se rapproche de $1/3$, faisant alors du jeu B (modifié par son association à A) un jeu gagnant. On peut même parier que plus la perturbation créée par le mélange de B avec un autre jeu sera complexe, plus il y aura de chances pour que la proportion de cas où B_1 sera choisi (quand B sera joué) s'approchera de $1/3$.

Dans le cas précis d'un mélange aléatoire équilibré $\{50\% A + 50\% B\}$ entre A et B, la proportion d'utilisation de B_1 quand B est utilisé passe de $0,3836$ à $0,3451$ conformément à la prédiction théorique formulée plus haut que cette valeur s'approcherait

de $1/3$. Lorsqu'on fait un mélange $\{75\% A + 25\% B\}$, le glissement est encore plus net, puisque cette fois la proportion d'utilisation de B_1 passe à $0,3363$.

Notons enfin que B# est plus fortement gagnant que A n'est perdant : pour $e = 1/200$, l'espérance de A est $-2e = -0,01$ et celle de B# est $(1/15 - 2e) = +0,0566$. En composant A et B, ce qui fera le plus souvent ressembler B à B#, il n'est donc pas étonnant qu'on obtienne facilement un jeu gagnant. C'est d'ailleurs le cas pour $\{50\% A + 50\% B\}$ et pour $\{75\% A + 25\% B\}$.

En deux mots : combiner A (faiblement perdant) avec B (lui aussi faiblement perdant) fait se rapprocher B de B# (qui est gagnant plus fortement que A n'est perdant) et produit donc souvent et sans surprise un jeu gagnant.

pratiquerez, même en vous inspirant de la méthode de Parrondo, vous n'obtiendrez jamais une martingale gagnante.

Une variante plus spectaculaire

Une variante du paradoxe de Parrondo, due à Roland Yéléhada, et dénommée « méga-paradoxe de Parrondo », éclairera le paradoxe.

On considère deux jeux utilisant un jeton à deux faces, l'une noire, l'autre blanche ; ce jeton sera le lien entre les deux jeux.

Jeu A' : on tire à pile ou face avec une pièce non truquée. Selon que le jeton montre son côté blanc ou son côté noir, on opère différemment.

Quand le jeton montre son côté blanc :

- si on a PILE, le joueur gagne 3 euros (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 1 euro et retourne le jeton.

Quand le jeton montre son côté noir :

- si on a PILE, le joueur gagne 1 euro (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 2 euros (et ne touche pas au jeton).

Le jeu A' est perdant. En effet, même si le jeton montre au départ son côté blanc et donc que le jeu est momentanément favorable au joueur, il finira par être retourné, ce qui conduira à un jeu défavorable, dont le joueur

ne sortira plus, puisque le jeton ne sera plus retourné et restera noir. L'espérance du jeu A' tendra vers $-0,5$ euro par partie. La simulation numérique confirme ce résultat.

Jeu B' : on tire à pile ou face avec une pièce non truquée.

Quand le jeton montre son côté noir :

- si on a PILE, le joueur gagne 3 euros (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 1 euro, et retourne le jeton.

Quand le jeton montre son côté blanc :

- si on a PILE, le joueur gagne 1 euro (et ne touche pas au jeton) ;
- si on a FACE, le joueur perd 2 euros (et ne touche pas au jeton).

Comme le jeu A', le jeu B' (qui est le même que le jeu A' en échangeant le rôle du noir et du blanc) est perdant et son espérance est $-0,50$ euro par partie (voir l'encadré 3). Pourtant, toutes les combinaisons simples des jeux A' et B' donnent des jeux gagnants.

— Combinaison aléatoire équilibrée des jeux A' et B', notée $\{50\% A' + 50\% B'\}$: on joue le jeu A' ou le jeu B' en choisissant au hasard, à pile ou face par exemple, de manière équilibrée le jeu pratiqué. L'espérance de ce jeu combiné est $+0,246$ (on gagne en moyenne 24,6 centimes d'euro par partie). C'est encore le cas pour d'autres compositions du même type : l'espérance du jeu $\{40\% A' + 60\% B'\}$ est $+0,216$ euro par partie, celle du jeu

$\{30\% A' + 70\% B'\}$ est $+0,130$ euro par partie.

— Combinaison périodique $[A' + B']$. On choisit de jouer une fois le jeu A', puis une fois le jeu B', et on recommence indéfiniment selon le même schéma. L'espérance de ce jeu combiné est de $+0,50$ (on gagne en moyenne 50 centimes par partie). C'est encore le cas pour d'autres compositions du même type : l'espérance du jeu $[2A' + 2B']$ est $+0,399$ euro par partie, celle de $[4A' + 3B']$ est $+0,208$ euro par partie.

— Combinaison alternante que l'on note $(0,3 : A' \leftrightarrow B')$: on alterne les jeux A et B en décidant de changer de jeu avec une probabilité de $0,3$ d'une partie à la suivante. L'espérance de ce jeu combiné est $+0,06$ euro par partie. C'est aussi le cas pour d'autres combinaisons du même type : l'espérance du jeu $(0,4 : A' \leftrightarrow B')$ est $+0,16$ euro par partie, celle du jeu $(0,5 : A' \leftrightarrow B')$ est $+0,25$ euro par partie.

Cette variante du paradoxe de Parrondo est plus spectaculaire : les espérances des jeux combinés sont supérieures, alors que les espérances des jeux de départ sont plus négatives. Partant de deux jeux qui perdent 50 centimes d'euro par partie, on arrive, par exemple avec $[A + B]$, à un jeu qui en gagne 50, le retournement est total.

Le « truc » qui produit le prétendu paradoxe est maintenant susceptible d'une analyse rationnelle assez simple. Le jeu A'

Regards

comme le jeu B' sont perdants car, même si au départ on peut gagner plusieurs fois de suite, les règles font qu'on tombe rapidement dans un état défavorable qui fait inéluctablement perdre de l'argent au joueur.

Une explication simple!

Cet état défavorable est celui correspondant au côté BLANC du jeton pour le jeu A', et au côté NOIR du jeton pour le jeu B'. La combinaison des jeux A' et B' a pour effet de

permettre au joueur qui joue A' de sortir de l'état de blocage BLANC qui lui est défavorable et dans lequel il reste indéfiniment coincé quand seul A' est pratiqué. Le jeu B', qui subit de même un blocage dû au côté NOIR du jeton, en sort grâce au jeu A'. En jouant un seul des jeux, A' ou B', le joueur tombe dans un piège dont il ne sort plus. En jouant alternativement l'un ou l'autre (et plus généralement en mélangeant A' et B'), chaque jeu débloque l'autre.

Comme on le constate en examinant les valeurs numériques des diverses combi-

naisons (voir l'encadré 3), plus les basculements entre A' et B' sont rapides dans un jeu combiné, plus le jeu composé est gagnant. Inversement, si les changements de A' à B' et de B' à A' sont trop lents, la combinaison des deux jeux perdants reste un jeu perdant. C'est ainsi que :

- le jeu $\{5\% A + 95\% B\}$ est perdant, d'espérance $-0,35$ euro par partie.
- le jeu $[8A' + 8B']$ est perdant, avec une espérance de $-0,13$ euro par partie.
- le jeu $[0,2 : A' \leftrightarrow B']$ est perdant, d'espérance $-0,07$ euro par partie.

3. Le mégaparadoxe de Parrondo



Les jeux A' et B' du mégaparadoxe de Parrondo (découvert par Roland Yéléhada en 2011) dépendent d'un jeton mis en commun quand on compose les jeux. Dans chaque jeu, on tire à pile ou face avec une pièce non truquée. Selon que le jeton montre son côté blanc ou son côté noir, on opère différemment.

Jeu A'. Quand le jeton est blanc, si on a a PILE, le joueur gagne 3 euros, si on a a FACE, le joueur perd 1 euro et retourne le jeton. Dans le cas où le jeton montre son côté noir, si on a a PILE, le joueur gagne 1 euro; si on a a FACE, le joueur perd 2 euros.

Jeu B'. Quand le jeton montre son côté noir, si on a a PILE, le joueur gagne 3 euros; si on a a FACE, le joueur perd 1 euro, et retourne le jeton. Dans le cas où le jeton montre son côté blanc, si on a a PILE, le joueur gagne 1 euro, si on a a FACE, le joueur perd 2 euros.

Chaque jeu possède une espérance très négative de $-0,50$ euro par partie, mais toutes les compositions simples associant A et B sont nettement gagnantes. C'est seulement pour les compositions où de longues séquences de la même stratégie sont jouées consécutivement que l'espérance est négative. Le texte de l'article donne la clef de ce comportement.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Espérance de $\{x\% A' + y\% B'\}$	-0,500	-0,229	-0,022	+0,130	+0,216	+0,246	+0,220	+0,128	-0,018	-0,231	-0,500

Schéma de composition 1 : $\{x\% A' + y\% B'\}$. On joue aléatoirement le jeu A' ou le jeu B' avec la probabilité x (exprimée en pourcentage) de choisir A' et $y = 1 - x$ de choisir B'.

n \ m	1	2	3	4	5	6
1	+0,500	+0,356	+0,199	+0,080	-0,007	-0,076
2	+0,356	+0,399	+0,312	+0,214	+0,128	+0,055
3	+0,199	+0,312	+0,277	+0,208	+0,139	+0,075
4	+0,080	+0,214	+0,208	+0,161	+0,106	+0,055
5	-0,007	+0,128	+0,139	+0,106	+0,063	+0,021
6	-0,076	+0,055	+0,075	+0,055	+0,021	-0,016

Schéma de composition 2 : $[mA' + nB']$. On joue périodiquement m fois le jeu A', puis n fois le jeu B'.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Espérance de $[x : A' \leftrightarrow B']$	-0,500	-0,250	-0,070	+0,061	+0,167	+0,250	+0,318	+0,376	+0,424	+0,464	+0,500

Schéma de composition 3 : $[x : A' \leftrightarrow B']$. On joue l'un des jeux A' ou B', en changeant de l'un à l'autre avec la probabilité x.

Regards

La combinaison de deux jeux perdants en interaction produit quelquefois un effet de déblocage mutuel, qui est apparent avec A' et B'. Parfois, cette combinaison produit seulement une perturbation légère du comportement de l'un des jeux; c'est ce qui se passe pour le jeu B de Parrondo quand il interagit avec A. Si cette perturbation est suffisante, on passe d'un jeu perdant à un jeu gagnant. Le cas du paradoxe de Parrondo initial est de la même nature que le cas des jeux A' et B' : l'interaction de A et B, d'une manière un peu cachée, aide le jeu B et fait de la combinaison un jeu gagnant.

On comprend qu'il n'y a là rien de miraculeux, puisque les jeux qui partagent un paramètre (la valeur du capital du joueur, la position d'un jeton, etc.) ne sont pas indépendants et que le déroulement d'un jeu peut s'y trouver profondément perturbé par l'autre. Les interactions des jeux changent parfois les dynamiques des jeux comme si un intervenant extérieur en manipulait les résultats. Que de telles manipulations fassent parfois passer d'un jeu perdant à un jeu gagnant ou l'inverse ne surprend nullement... après réflexion.

Paradoxe de Parrondo : ne pas en abuser !

Chaque fois que l'on rencontre un cas où l'interaction de deux dynamiques ou deux entités négatives en produit une positive, il est devenu courant de dire qu'il s'agit d'une « variante du paradoxe de Parrondo », et cela explique en partie le grand nombre d'articles mentionnant le paradoxe. C'est là un usage un peu excessif de l'expression, car on connaît depuis bien longtemps en physique et en mathématiques des situations où deux propriétés négatives combinées en donnent une positive.

Ce qu'on nomme *Ouzo's effect* en anglais, et qu'en français on nommerait plutôt *effet pastis* est une telle situation. L'eau n'arrête pas la lumière, le pastis pur non plus. Pourtant, une fois mélangés, on obtient un liquide opaque qui arrête la lumière. Doit-on y voir une variante du paradoxe de Parrondo ? Ce serait ridicule ! En mathématiques, la somme de deux nombres

transcendants (c'est-à-dire qui ne sont pas solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers) est parfois un nombre algébrique (solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers). C'est le cas pour les deux nombres π et $1 - \pi$. Doit-on y voir une variante du paradoxe de Parrondo ? Certes pas. Il sera plus sage de réserver l'expression au domaine de la théorie des jeux.

S'il ne faut sans doute pas accorder au paradoxe de Parrondo une importance excessive, notons qu'il joue un rôle très positif et parfaitement conforme aux rôles joués par les meilleurs paradoxes de l'histoire des mathématiques et de la physique. Il met le doigt sur une attente intuitive injustifiée provenant d'une analyse précipitée : ici fondée sur l'idée que les propriétés des combinaisons de jeux indépendants restent valables pour les combinaisons de jeux liés. Il permet de réfléchir aux conditions de composition qui assurent l'additivité des espérances (et donc que la composition de deux jeux perdants le sera encore), il conduit à la mise au point d'exemples simples qui, une fois assimilés, évitent de tomber dans le piège de l'oubli de la condition d'indépendance.

Dans le cas du paradoxe de Parrondo, il faut peut-être regretter que la complexité de l'exemple de départ laisse persister l'espoir chez certains qu'il se produit vraiment un phénomène général dont la clef pourrait contredire ce qu'on sait des situations les plus classiques de théorie des jeux.

La théorie du paradoxe de Parrondo n'est pas comme la théorie de la relativité ou la mécanique quantique qui ont montré que la physique classique est fautive dans certains cas. Elle ne contredit pas les résultats obtenus avant qu'on en ait eu connaissance en nous proposant une nouvelle vision de la théorie des jeux. C'est seulement une mise en garde contre une mauvaise interprétation des résultats sur la composition de jeux et la confusion entre jeux indépendants et jeux liés. Le désir de miracle est insatiable, y compris chez les plus rationnels des scientifiques. Seul un effort intellectuel déterminé et constant permet d'éviter qu'il nous conduise à l'erreur. ■

■ L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

■ BIBLIOGRAPHIE

S. N. Ethier et J. Lee, *Parrondo Games With Spatial Dependence*, 2012.
<http://arxiv.org/pdf/1203.0818.pdf>

D. Abbott, *Asymmetry and disorder : A decade of Parrondo's paradox*, *Fluct. Noise Lett.*, vol. 9, pp. 129-156, 2010.

S. N. Ethier et J. Lee, *Limit theorems for Parrondo's paradox*, *Electron. J. Probab.*, vol. 14, pp. 1827-1862, 2009.

Z. Mihailovic et M. Rajkovic, *Cooperative Parrondo's games on a two-dimensional lattice*, *Physica A*, vol. 365, pp. 244-251, 2006.

R. Iyengar et R. Kohli, *Why Parrondo's paradox is irrelevant for utility theory, stock buying, and the emergence of life*, *Complexity*, vol. 9(1), pp. 23-27, 2004.

G. P. Harmer et D. Abbott, *A review of Parrondo's paradox*, *Fluct. Noise Lett.*, vol. 2, pp. 71-107, 2002.

G. P. Harmer et D. Abbott, *Parrondo's paradox*, *Statist. Sci.*, vol. 14, pp. 206-213, 1999.