RENDEZ-VOUS

L'ALGORITHME DES COQUILLAGES

Pour les mollusques, s'enrouler en spirale afin de construire un abri permanent se fait de multiples façons. Toutes sont des variantes d'un procédé général qu'on s'efforce de reproduire.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal)

Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

L'intelligence artificielle prétend imiter l'intelligence humaine; elle avance sûrement, mais lentement. En biologie, des projets pour modéliser informatiquement une cellule en respectant toute sa complexité sont en cours, aussi difficiles qu'ils soient. Heureusement les coquillages, du moins leur partie calcaire, se laissent mieux copier.

Les recherches sur la forme et les dessins à la surface des coquillages permettent aujourd'hui d'écrire des programmes de quelques dizaines de lignes qui, transmis à des imprimantes 3D, les guident pour fabriquer des modèles nombreux et variés. La qualité des objets ainsi produits est telle qu'on a du mal à croire qu'ils ne sont que la projection d'une formule mathématique dont on fait varier quelques paramètres. Francesco De Comité, du laboratoire Cristal, à Lille, est un expert de cette informatique imitatrice du vivant et que l'on doit considérer comme un art mathématique.

UNE HISTOIRE QUI REMONTE AU XIXe SIÈCLE

La régularité de la forme des coquillages a depuis longtemps frappé les esprits, et l'idée que des considérations de pure géométrie pouvaient donner la clé de leur beauté a, dès le début du XIXe siècle, suscité des travaux. C'est ainsi que Henry Moseley, professeur au King's College de Cambridge, en Angleterre, expliquait dans un article de 1838 les premiers éléments de cette mathématisation du vivant:

« Il y a une uniformité mécanique observable dans la structure des coquilles d'une même espèce; elle suggère que la figure génératrice des nouvelles couches augmente en taille en même temps que la chambre en forme de spirale se développe selon une simple loi géométrique. En considérant l'opercule de certaines classes de coquilles, la détermination de cette éventuelle loi semble possible. Continuellement agrandi par l'animal lors de sa croissance, à mesure que la

© Sanit Fuangnakhon/Shutterstock.com

LES COQUILLAGES DE FRANCESCO DE COMITÉ, CONSTRUITS AVEC UNE IMPRIMANTE 3D

1

Lyria planicostata — *Voluta musica* — *Cypraea diluculum*

Nautilus pompilius — *Natica undulata* — *Amoria macandrewi* — *Amoria dampiera*

construction de sa coquille avance, l'opercule élargit progressivement la chambre spirale. »

Le modèle mathématique qui se déduit de ces remarques ne sera plus ensuite guère modifié. Il est décrit dans l'encadré 2 avec des notations modernes.

CROISSANCE EN SPIRALE LOGARITHMIQUE

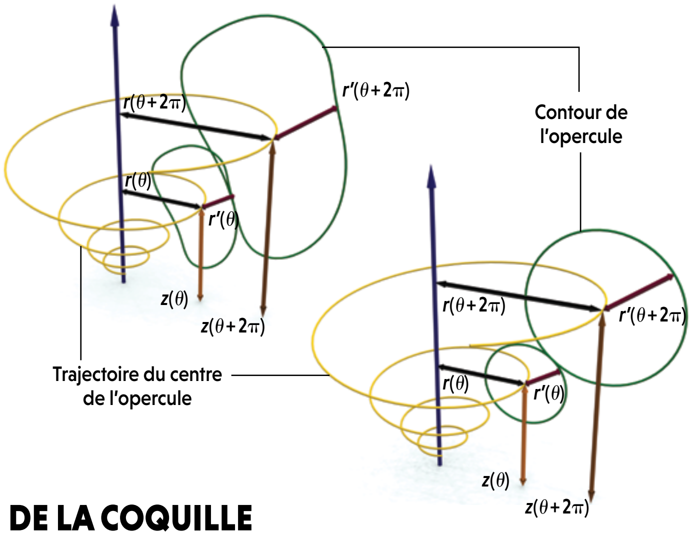
Certains aspects des mécanismes biologiques de croissance, même s'ils sont assez élémentaires, ne sont pas simples à justifier pleinement en pratique. En effet, pourquoi, par exemple, la croissance reste-t-elle proportionnellement constante, et non pas de plus en plus faible ou de plus en plus forte ?

La forme résultante est une spirale logarithmique dans l'espace. C'est la seule spirale qui, lorsqu'on lui applique un agrandissement, reste identique à elle-même. Cette propriété géométrique remarquable est peut-être un avantage évolutif, ou au moins une facilitation dans l'adaptation de l'animal à prendre des tailles différentes. Cependant, cette propriété n'est pas facile à justifier, puisqu'elle n'est pas générale dans le monde animal : un adulte n'est pas un enfant deux fois plus grand ou plus ; il a proportionnellement une tête plus petite.

Ces questions géométrico-mathématiques font maintenant partie de la biologie, et cela grâce principalement à un célèbre ouvrage dont on vient de fêter le centenaire : *On Growth and Form* (le titre français est *Forme et croissance*), de l'Écossais D'Arcy Thompson, œuvre dont la première édition parut en 1917.

>

2



GÉOMÉTRIE DE LA COQUILLE

La surface externe de nombreux coquillages est l'enveloppe de la courbe dessinant l'ouverture (l'opercule). L'opercule se déplace dans l'espace de telle façon que le centre de la courbe-opercule parcourt une hélice de rayon croissant, une spirale, en même temps que sa taille augmente et que le plan de la courbe-opercule tourne en restant perpendiculaire au dessin de l'hélice dans l'espace.

Si r est la distance du centre de l'opercule à l'axe vertical, z la coordonnée selon l'axe vertical de ce centre et θ l'angle de l'opercule le long de la spirale, la position du centre est donnée par : $r(\theta)= r_0 k_1^{\theta/2\pi}$, $z(\theta)= z_0 k_2^{\theta/2\pi}$ Les paramètres r_0 et z_0 indiquent la position initiale de l'opercule à l'instant où la croissance commence, tandis que k_1 et k_2 sont les facteurs de croissance quand la courbe fait un tour complet. À chaque tour, le rayon est multiplié par k_1, la hauteur du centre par k_2. Il faut aussi que le rayon de l'opercule augmente à chaque tour d'un facteur k_3. Dans les cas les plus simples, l'opercule sera un cercle et $k_1 = k_2 = k_3$, noté k.

Pour que les opercules soient tangents quand le centre a fait un tour complet, il faut que le rayon $r'(\theta)$ de l'opercule vérifie : $r'(\theta) = \sqrt{(r_0^2 + z_0^2)}[(k-1)/(k+1)]\, k^{\theta/2\pi}$.

© Francesco De Comité, pour toutes les photographies

> L'ouvrage défend l'idée que la biologie surestime le rôle de l'évolution en négligeant les contraintes physiques et mécaniques, qui sont des facteurs déterminants dans l'organisation et les formes des organismes vivants et de leurs composants.

Richement illustré, ce livre s'intéresse aux ailes des insectes, aux plumes des oiseaux, aux cornes plus ou moins enroulées des mammifères, aux méduses, aux graines végétales. Il traite soigneusement de la physique et de la délicate géométrie des contacts cellulaires et des agrégats cellulaires, de la solidité et de la souplesse des os. Il étudie les structures géométriques de différentes espèces de poissons et établit des liens, introduisant une théorie des transformations aujourd'hui utile aux méthodes informatiques dans le domaine de la reconnaissance des formes. Il considère les alvéoles des ruches d'abeilles et, à cette occasion, le remplissage de l'espace par des polyèdres. Il ne manque pas de s'émerveiller des flocons de neige, des fascinants squelettes des radiolaires (organismes unicellulaires à

3

AUTOMATES CELLULAIRES À UNE DIMENSION

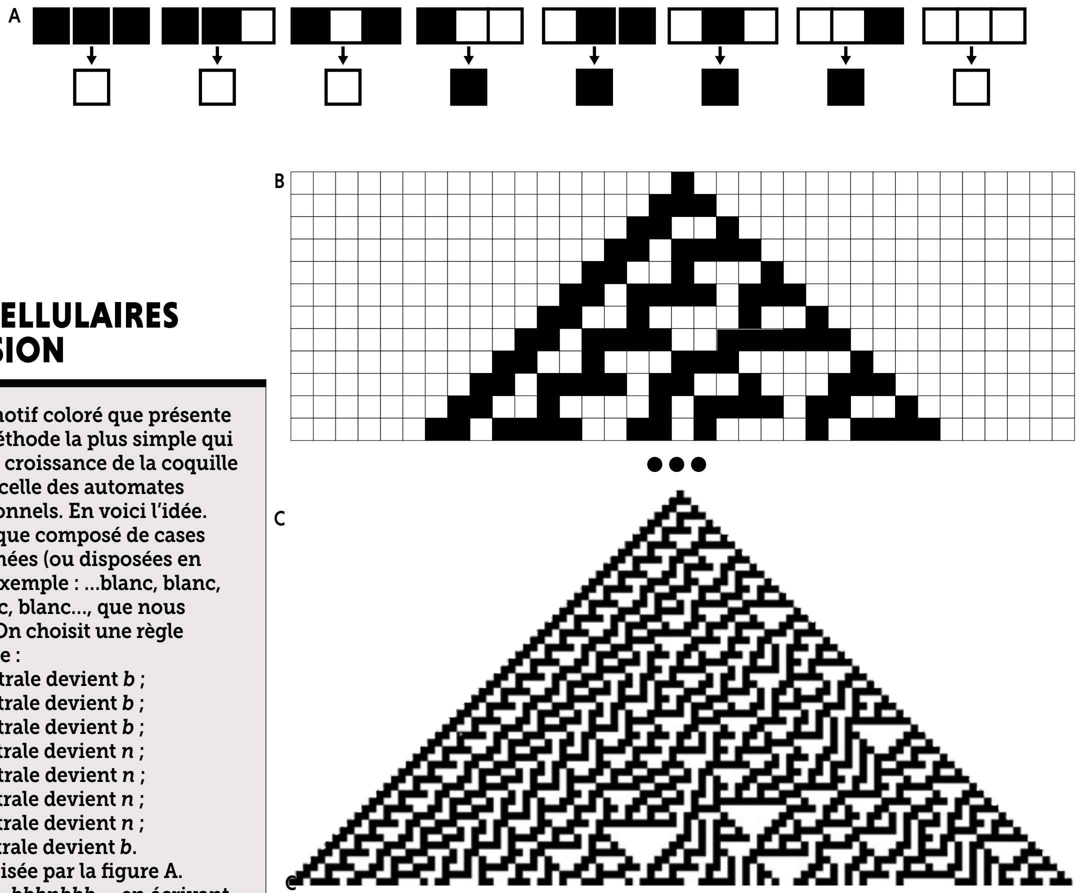
Pour déterminer le motif coloré que présente un coquillage, la méthode la plus simple qui s'appuie sur l'idée de la croissance de la coquille couche par couche est celle des automates cellulaires unidimensionnels. En voici l'idée.

Un dessin quelconque composé de cases blanches et noires alignées (ou disposées en cercle) est donné. Par exemple : ...blanc, blanc, blanc, noir, blanc, blanc, blanc..., que nous noterons ...*bbbnbbb*... On choisit une règle d'évolution. Par exemple :
si on a *nnn*, la case centrale devient *b* ;
si on a *nnb*, la case centrale devient *b* ;
si on a *nbn*, la case centrale devient *b* ;
si on a *nbb*, la case centrale devient *n* ;
si on a *bnn*, la case centrale devient *n* ;
si on a *bnb*, la case centrale devient *n* ;
si on a *bbn*, la case centrale devient *n* ;
si on a *bbb*, la case centrale devient *b*.
Cette règle est schématisée par la figure A.

Partant de la ligne ...*bbbnbbb*..., en écrivant les lignes qui s'en déduisent successivement, on obtient les figures B et C.

La méthode, appliquée ici à une ligne initialement infinie, s'adapte de façon évidente à une courbe fermée, et donc à la croissance d'un coquillage qui ajoute des couches nouvelles à son opercule, pourvu qu'on accepte l'idée d'une discrétisation des couleurs, ici au nombre de deux (noir et blanc).

Le type de résultats obtenu, après impression 3D, est représenté en D.



squelette siliceux, faisant partie du plancton marin) et, bien sûr, des coquillages.

L'ouvrage de D'Arcy Thompson a eu une grande influence en biologie en remettant à sa juste place la physique; et indirectement les mathématiques: les lois physiques créent des formes qu'on ne comprend qu'en résolvant des systèmes d'équations parfois assez complexes, et donc en mettant en œuvre les outils mathématiques de l'analyse.

DES FORMES CONSTRUITES PAR UNE IMPRIMANTE 3D À PARTIR D'UNE FORMULE UNIQUE

Revenons à nos coquillages et considérons le modèle le plus simple qui les décrit. Conduit-il à reproduire de manière satisfaisante les espèces connues? Jusqu'à récemment, les outils informatiques ne permettaient que d'envisager des modèles de coquillages dans la mémoire de l'ordinateur ou projetés sur un plan, celui-ci étant l'écran d'un terminal ou une feuille de papier. Les imprimantes 3D, dont les développements techniques se sont accélérés, offrent la possibilité d'aller plus loin en transformant les équations, trouvées ou supposées, en objets qu'on prend en main, qu'on soupèse, qu'on examine avec soin... et qu'on met contre son oreille pour «entendre la mer»!

Rappelons que les imprimantes 3D fonctionnent à partir d'une définition mathématique de l'objet que l'on veut obtenir, définition qui s'exprime dans un programme informatique. Ces machines produisent parfois des objets impossibles à obtenir par des techniques de moulage ou par des découpages et usinages classiques (par exemple un cube dont l'intérieur serait creusé pour laisser un espace vide qui aurait la forme de votre tête). Mais tout n'est pas possible.

En effet, les diverses parties de la forme sculptée par l'imprimante ou fabriquée couche par couche doivent être liées dans l'espace si l'on veut un objet qui garde sa rigidité. Surtout, l'objet visé ne doit pas comporter de parties trop fines que l'imprimante serait incapable de créer, ou qui fragiliseraient trop le résultat final.

Les formes réalisées par Francesco de Comité (*voir les encadrés*) ont toutes été obtenues à partir d'une unique formule traduite en programme et qui ne comporte que quelques paramètres qu'il a fait varier en exploitant le modèle mathématique présenté dans l'encadré 2. Ces paramètres géométriques sont principalement ceux qui déterminent la spirale tridimensionnelle décrite par le centre de l'opercule lors de la croissance du coquillage, auxquels il faut ajouter les paramètres de la courbe correspondant à la forme de l'opercule ainsi que quelques données pour spécifier les motifs décorant la surface du coquillage. >

4

D'ARCY THOMPSON (1860-1948)

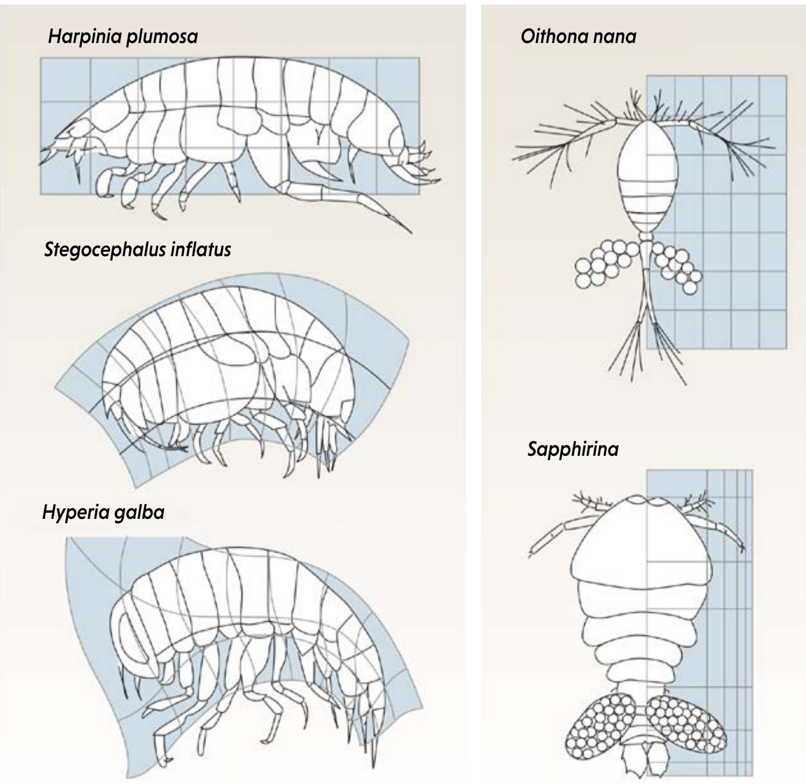
Né en 1860 d'un père professeur de grec au Queen's College de Galway, en Irlande, D'Arcy Wentworth Thompson était marin et naturaliste, en même temps qu'un fin helléniste, un bon géomètre et un physicien expert.

Il a occupé durant trente-deux ans le poste de professeur d'histoire naturelle à l'université Saint-Andrews, à Dundee, en Écosse. Il a été élu Fellow de la Royal Society en 1916, puis anobli en 1937 et récompensé de la médaille Darwin en 1946. C'était un remarquable orateur qui avait un don exceptionnel pour les langues.

Son livre *On Growth and Form*, paru en 1917, et dont la seconde édition en 1942 était encore plus volumineuse, développait ce qu'on dénomme aujourd'hui les biomathématiques (voir les sites https://archive.org/details/ongrowthform00thom et www.ongrowthandform.org).

Sa théorie des transformations, dont il donna une version pratique illustrée par des images qui parlent d'elles-mêmes, est un outil maintenant formalisé pour étudier et comprendre les formes et leurs liens (voir l'article d'Yves Bouligand, « D'Arcy Thompson et la logique des formes », *Dossier Pour la Science* n° 44, pp. 4-9, juillet-septembre 2004).

Certains animaux semblent ainsi avoir des formes très différentes. On comprend qu'en réalité, ils sont proches, car une simple transformation géométrique permet de passer de l'un à l'autre. L'analogie est rendue visuellement évidente par la superposition d'un quadrillage sur les figures, comme ci-dessous.

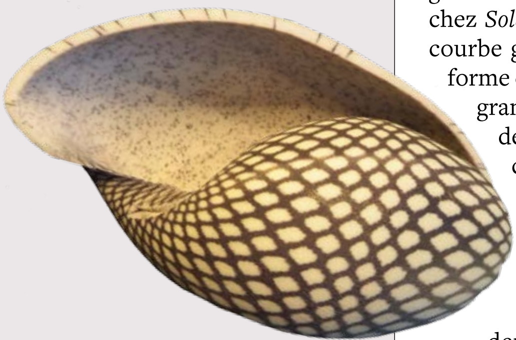


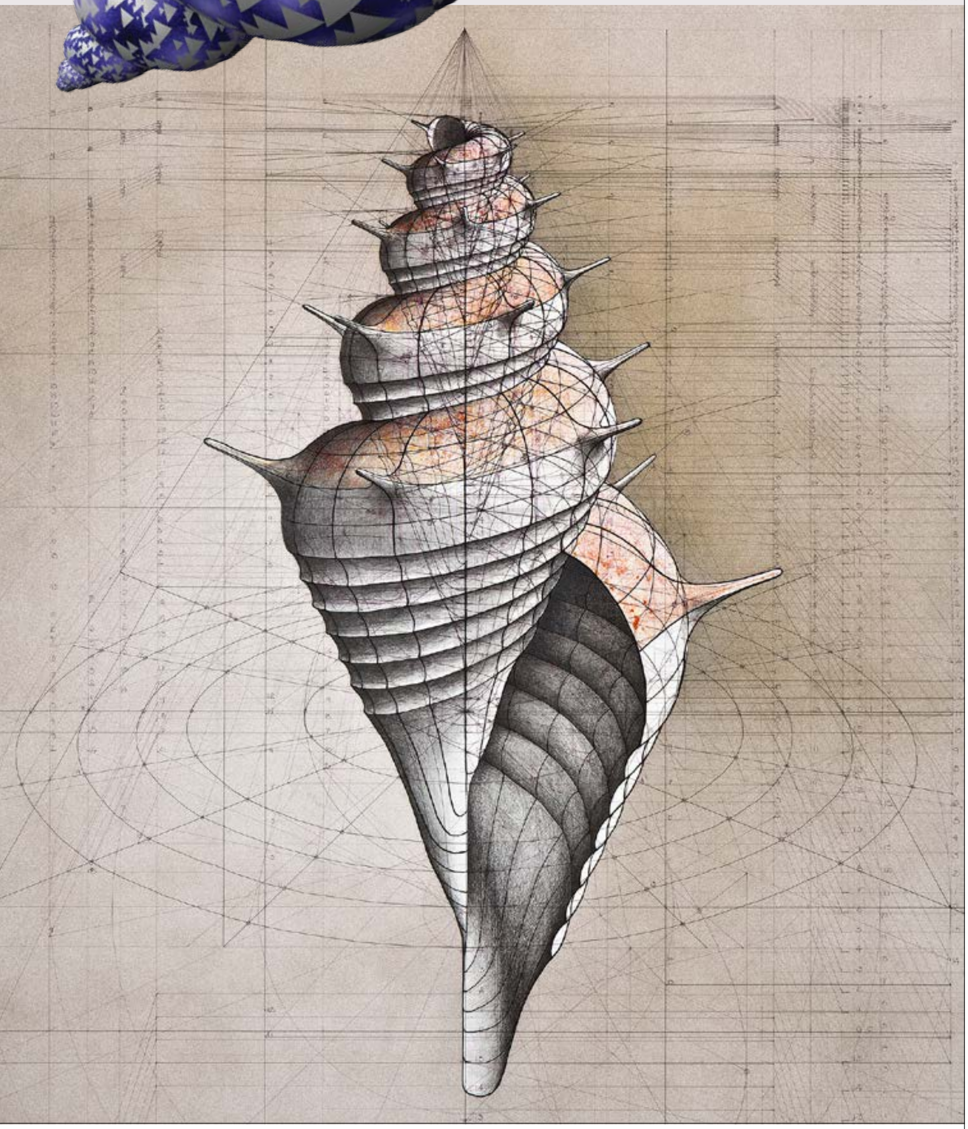
© Dessins d'après D. Thompson, *On Growth and Form*, 1917.

5

COQUILLAGES IMAGINAIRES ET MUREX

Avec un programme général, Francesco De Comité a su jouer avec les paramètres pour produire des coquillages imaginaires. Toutefois, rien n'est simple dans le monde vivant et c'est vrai même dans celui, réduit, des coquillages. Les murex et leur famille, coquillages munis d'élégantes piques, superbement dessinés par l'artiste vénézuélien Rafael Araujo, échappent au modèle élaboré actuellement.





© Rafael Araujo (dessin de murex)

> Pour ce qui est de la forme de l'opercule, le passage suivant montre que D'Arcy Thompson avait non seulement compris le principe abstrait de la construction, mais que son œil expert de naturaliste savait identifier les paramètres qui caractérisent une espèce de coquillage:

«La courbe génératrice [de l'opercule] adopte des formes très variées. Elle est circulaire chez *Scalaria*, *Cyclostoma* et *Spirula*; on peut la considérer comme une portion de cercle chez *Natica* ou *Planorbis*. Elle est triangulaire chez *Conus* ou *Thatcheria*, et rhomboïde chez *Solarium* ou *Potamides*. Très souvent, la courbe génératrice adopte plus ou moins la forme d'une ellipse: chez *Oliva* et *Cypraea*, le grand axe de l'ellipse est parallèle à celui de la coquille; [...] et dans de nombreux cas bien documentés, tels que *Stomatella*, *Lamellaria*, *Sigaretus haliotoides* et *Haliotis*, le grand axe de l'ellipse est oblique par rapport à celui de la coquille. Cette courbe génératrice devient presque une demi-ellipse chez *Nautilus pompilius* et un peu plus qu'une demi-ellipse chez *Nautilus umbilicatus*, le grand axe étant dans les deux cas perpendiculaire à l'axe de la coquille. La forme de la courbe ne se prête que rarement à une expression mathématique simple. [...] Chez certaines ammonites, celles du groupe '*Cordati*', [...] la courbe génératrice correspond presque exactement à une cardioïde d'équation $r = a(1+\cos\theta)$.»

DIFFICULTÉS INFORMATIQUES ET DESSINS DE SURFACE

Pour disposer d'une définition mathématique que l'imprimante 3D comprenne, il faut non seulement s'occuper de définir la surface externe du coquillage, mais aussi sa surface interne, qui est du même type. Il faut lier les deux surfaces en opérant de telle manière que le volume délimité soit sans trou, jamais trop fin et n'exigeant pas une précision dans les détails supérieure à celle fournie par l'imprimante.

Cette construction du volume demande donc un travail qui ne se réduit pas à écrire les formules proposées par l'analyse géométrique décrite dans l'encadré 2. En utilisant une méthode classique, Francesco De Comité obtient la solution en transformant les surfaces en un très grand nombre de triangles attachés, triangles qui lui sont aussi utiles pour colorier la surface. La taille du programme, une fois débarrassé des commentaires et réduit à l'essentiel, est de 4000 caractères (ou octets), soit une grande page environ.

Au-delà de la forme des coquillages, qui est assez bien maîtrisée, un second défi se présente au modélisateur, celui des motifs colorés à la surface des coquillages.

Une première méthode pour les reproduire consiste à les capter par un procédé photographique et à les plaquer à la surface des coquilles artificielles que l'on programme. Cela donnera bien sûr d'assez bons résultats, mais il s'agit d'une forme de tricherie qui ne permettra pas d'obtenir un court modèle mathématique, puisqu'il faut beaucoup d'informations pour mémoriser l'image, copiée pixel par pixel, de la surface d'un vrai coquillage.

Heureusement, des procédés plus satisfaisants semblent possibles. Ils se fondent sur l'idée que la coquille provient des tranches d'opercule qui se construisent successivement. Le rayon s'accroît et ces tranches sont colorées selon des règles simples, qui déterminent la coloration de chaque nouvelle tranche en fonction des précédentes. Le plus souvent, la couleur d'un point de la tranche $n+1$ se déduira de celle du point de la tranche n situé au même endroit et de ses voisins. Parfois, pour déterminer le motif de la tranche $n+1$, il sera utile d'utiliser les motifs de plusieurs tranches antérieures à la tranche n.

Les Britanniques Conrad Waddington et Russell Cowe ont adopté cette hypothèse dès 1969, suivis en 1984 par leur compatriote Stephen Wolfram, le célèbre créateur du logiciel de calcul formel Mathematica. Ils ont supposé que les points étaient colorés en respectant les règles d'un automate cellulaire unidimensionnel. Ce type de mécanismes, imaginé par le mathématicien d'origine hongroise John von Neumann dans les années 1940, est le plus simple qu'on puisse concevoir pour définir des interactions déterministes entre objets discrets (*voir l'encadré 3*).

L'hypothèse des automates cellulaires, qui, pour un informaticien, est la plus facile à programmer, ne semble cependant pas s'appuyer sur des considérations biologiques précises. Au moins à titre d'essai, elle méritait d'être explorée et ce qu'elle donne ressemble vaguement à ce que l'on observe dans la nature. L'une des raisons de ce succès limité est que l'on utilise souvent les automates cellulaires avec deux couleurs, ce qui est insuffisant pour reproduire avec précision la complexité des pigmentations des coquillages.

Une hypothèse plus proche de la biologie s'inspire de la vision que le mathématicien britannique Alan Turing a développée dans les dernières années de sa vie pour décrire des modèles mathématiques de la morphogenèse. Adoptée par les biologistes allemands Hans Meinhardt et Martin Klingler, elle a été reprise par Francesco de Comité.

L'idée est celle d'une activation à courte distance combinée à une inhibition plus prolongée déterminées par deux substances, un activateur et un inhibiteur. La concentration de chacune d'elles dépend de leurs concentrations en chaque point dans les étapes précédentes de la construction. Le modèle est continu et s'exprime par des équations aux dérivées partielles (équations différentielles où les fonctions dépendent de plusieurs variables).

Voici un exemple de ces équations.

$$\frac{\partial a}{\partial t} = s\left(\frac{a^2}{b} + b_a\right) - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = sa^2 - r_b b + D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + b_b$$

Sans entrer dans les détails, indiquons que $a(x, t)$ et $b(x, t)$ sont les concentrations de l'activateur a et de l'inhibiteur b. Elles dépendent du temps t et de la position x de la zone colorée sur le contour de l'opercule, assimilé à une courbe. Les coefficients D_a et D_b sont les paramètres de diffusion; plus leur valeur est élevée, plus la diffusion des substances est rapide. Les coefficients r_a et r_b caractérisent les vitesses de décroissance des concentrations a et b (pour d'autres précisions, voir le magnifique livre de Hans Meinhardt, *The Algorithmic Beauty of Sea Shells*, Springer, 2009, page 23).

JEUX ESTHÉTIQUES ET NOUVEAUX DÉFIS

Après avoir cherché à imiter au mieux la réalité du monde biologique et en avoir découvert et exploité certains des secrets pour fabriquer des formes qui en imitent les créatures, il est amusant de jouer avec le modèle obtenu. On produit alors des formes aussi belles que les vraies, mais qui n'existent pas dans la nature (*voir l'encadré 5*).

Cependant, la nature, qui n'a pas joué à fabriquer tous ces pseudo-coquillages que la maîtrise acquise permet de créer, a exploré d'autres voies plus complexes… qui échappent aujourd'hui aux modélisateurs. En particulier, les coquillages de la famille des *Muricidae* (dont fait partie le genre *Murex*), utilisés depuis l'Antiquité pour extraire la pourpre, présentent des piques régulières.

Ces structures qui échappent au modèle mathématique général utilisé pour les autres coquillages exigent des compléments et provoqueront sans doute une complication des programmes actuels. Francesco de Comité réfléchit à la façon dont on pourrait franchir l'obstacle créé par ces exceptionnels et récalcitrants coquillages. S'il réussit, ne croyons pas que le travail de modélisation du réel touchera alors à sa fin: le monde du vivant ne se limite pas aux coquillages et son inventivité ne se laissera pas réduire facilement à quelques formules mathématiques, quels que soient le soin et l'intelligence que nous y consacrerons. ■

BIBLIOGRAPHIE

F. De Comité, **Modelling seashells shapes and pigmentation patterns : Experiments with 3D printing**, *Proceedings of Bridges 2017 : Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture*, Tessellations Publishing, 2017.

P. Chossat, **Des équations pour de bons motifs**, *Dossier Pour la Science* n° 91, avril-juin 2016.

Y. Bouligand, **D'Arcy Thompson et la logique des formes**, *Dossier Pour la Science* n° 44, juil.-sept. 2004.

H. Meinhardt, **The Algorithmic Beauty of Sea Shells**, Springer (4e éd.), 2009.

D. W. Thompson, **Forme et croissance**, Seuil/Éditions du CNRS, 1994.

S. Wolfram, **Cellular automata as models of complexity**, *Nature*, vol. 311, pp. 419-424, 1985.

A. Turing, **The chemical basis of morphogenesis**, *Phil. Trans. B.*, vol. 237, pp. 37-72, 1952.

H. Moseley, **On the geometrical forms of turbinated and discoid shells**, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, vol. 128, pp. 351-370, 1838.