La conjecture de Syracuse

Jean-Paul Delahaye – Christian Lasou
Université des Sciences et Technologies de Lille
Licence S.T-A Semestre 2 – SIME
2008-2009

Le plus simple des problèmes mathématiques irrésolus

Les sciences résolvent les questions élémentaires, puis passent à d'autres plus compliquées, progressant petit à petit. Le pédagogue défend aussi idée d'apprentissage graduel : l'élève traitera les cas simples, puis lentement passera aux cas difficiles.

Malheureusement le monde mathématique ne se plie pas à ce rêve laborieux d'une armée de chercheurs dévoués avançant selon un plan fixé sur un front rectiligne : il y a des passages étroits où il est difficile de maintenir l'allure. Pire, la plaine est semée de murailles invisibles dont on ne réalise l'existence qu'en s'y cognant.

La *conjecture de Syracuse* est une de ces murailles sur laquelle la communauté mathématique a butté (avec un amusement vite devenu agacement) et que pour l'instant aucun alpiniste n'a su gravir.

Essayez, vous verrez on arrive toujours sur 1

Prenez un entier, n, s'il est pair vous le divisez par 2, s'il est impair vous calculer 3n+1 :

$$\begin{array}{lcl} n \text{ pair} & \rightarrow & n/2 \\ n \text{ impair} & \rightarrow & 3n+1 \end{array}$$

Recommencez cette opération avec le résultat. Que se passe-t-il ?

Partant de 10, vous passez à 5, puis à 16, puis à 8, puis à 4, puis à 2, puis à 1 qui vous ramène à 4, 2, 1 cycle dans lequel vous restez alors tout le temps : $10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Partant de 15 vous trouvez : $15 \rightarrow 46 \rightarrow 23 \rightarrow 70 \rightarrow 35 \rightarrow 106 \rightarrow 53 \rightarrow 160 \rightarrow 80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

C'est un peu plus long, mais au bout du compte on retombe sur 1 (voir la figure 1, où d'autres cheminements vers 1 sont dessinés). Deux entiers peuvent donner le même résultat (par exemple 32 et 5 donnent 16, leurs cheminements se rejoignent) ce qui suggère de représenter les divers parcours sous la forme de graphes ou de tableaux (voir figure 2).

Essayez d'autres valeurs au hasard, en vous aidant d'un ordinateur si vous voulez. Vous verrez : *vous tomberez toujours sur 1*. Mon affirmation péremptoire est injustifiée du point de vue du mathématicien car personne n'a jamais montré qu'on arrive toujours à 1 (d'où le nom de « conjecture de Syracuse » pour cette affirmation). Sur un plan pratique, je ne prenais pas un grand risque car on a essayé tous les nombres jusqu'à $3{,}5 \times 10^{17}$, et tous aboutissent à 1.

Troubles dans les esprits

Cette conjecture dont l'origine, vers 1950, reste confuse porte une grande variété d'autres noms provenant de mathématiciens l'ayant étudiée ou fait connaître : *problème de Collatz, problème de Kakutani, problème de l'algorithme de Hassa, problème de Ulam*. Le nom de *conjecture de Syracuse* est lié à l'université de Syracuse aux Etats-Unis, où le problème fut étudié. Le nom le plus souvent retenu aujourd'hui est plus simplement celui de *problème 3x+1*.

S. Kakutani qui fit circuler le problème dit que « pendant un mois tout le monde à l'université de Yales travailla dessus, sans résultat. Un phénomène semblable se produisit à l'université de Chicago. La plaisanterie circula que cette énigme était le résultat d'une conspiration destinée à ralentir la recherche mathématique aux Etats-Unis ».

À partir de 1960 la conjecture de Syracuse a donné lieu à quelques publications de recherche qu'on rattache au domaine de la théorie des nombres. Ces travaux ont pris aujourd'hui une tournure très sérieuse, conduisant à certains résultats dont nous allons parler. Pour l'instant on ne sait toujours pas répondre de façon définitive à la question : *arrive-t-on toujours sur 1 ?*

Que peut-il se passer d'autre ? Partant d'un entier quelconque a priori trois cas sont possibles :

1. Aboutir à 1 (c'est-à-dire au cycle $4 \to 2 \to 1$)
2. Aboutir à un autre cycle que $4 \to 2 \to 1$
3. Tomber sur une suite infinie de nombres entiers ne revenant jamais là où elle est passée, et prenant donc toutes les valeurs possibles et par conséquent des valeurs de plus en plus grandes

N'importe quel amateur peut tenter sa chance, mais il doit réaliser que des gens intelligents (parfois géniaux) ont essayé et s'y sont cassés les dents : si vous croyez après quelques heures de recherche avoir trouvé un raisonnement qui démontre la conjecture, rédigez-le soigneusement et, avant d'alerter la presse, faites-le contrôler par un ami. De nombreuses fausses preuves ont déjà circulé, dont une, en 1997, sur internet, et une, en 1998, déposée chez un notaire par un mathématicien amateur qui craignait qu'on ne lui vole son idée.

Il y a une vingtaine d'années le grand mathématicien Paul Erdös qu'on interrogeait sur ce problème et l'impuissance des mathématiques à le traiter malgré sa déconcertante simplicité répondit que « les mathématiques aujourd'hui ne sont pas encore prêtes pour aborder de telles questions ». Est-ce toujours le cas aujourd'hui ?

La durée de vol, l'altitude, le vol en altitude etc.

À défaut de prouver le résultat et pour tenter de trouver un contre-exemple (après tout, peut-être que tout entier n'arrive pas sur 1 !) de nombreux calculs sont faits conduisant à une série de records soigneusement tenue à jour et à laquelle il est sans doute plus facile de s'attaquer qu'à la conjecture elle-même.

Avant d'indiquer quelques records nous allons fixer un vocabulaire imagé qui va nous faciliter le travail de description des comportements des suites. Nous dirons que la suite obtenue à partir d'un entier est son *vol*, vol qui atteint une *altitude maximum* (l'entier le plus grand par lequel on passe), qui a une *durée* (le nombre d'étapes avant d'*atterrir* à 1). Nous parlerons aussi de la durée de vol en altitude pour le nombre de points de la suite avant qu'elle ne passe sous l'altitude de départ (on compte le point de départ). Le vol numéro 11 (ou vol 11) est $11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$, son altitude maximale est 52, la durée de vol est 14, et la durée de vol en altitude est 8.

Remarquons qu'il existe des vols de durée aussi longue que l'on veut : le vol 2^n est $2^n \to 2^{n-1} \to 2^{n-2} \to 2^{n-3} \to \ldots \to 2 \to 1$ qui a pour durée n

Voici quelques questions moins évidentes, mais d'une difficulté raisonnable, que vous pouvez essayer de résoudre à titre d'amusement :

1. Y a-t-il un maximum absolu pour la durée de vol en altitude ? Si oui lequel ?

2. Le coefficient d'ascension (rapport entre altitude maximum et altitude de départ) est-il toujours inférieur à un nombre donné ? Si oui lequel ?

Cherchez un peu et si vous ne trouvez pas, allez voir la figure 5.

Records de calcul

Le *record de vérification* de la conjecture nous l'avons dit est $3{,}5 \times 10^{17}$, ce qui veut dire que tous les vols dont le numéro est inférieur à $3{,}5 \times 10^{17}$ atterrissent en 1. Ce résultat est du à Tomás Oliveira e Silva de l'université de Aveiro au Portugal qui a développé des trésors d'ingéniosité pour arriver à ce résultat.

On appelle *vol de durée record*, un vol dont tous les vols de numéro plus petits sont plus courts. Le vol 7 dont la durée est 16 est un vol de durée record car les vols 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ont des durées inférieures à 16. Les premiers vols de durée record sont indiqués dans le tableau de la figure 4. Aujourd'hui le plus grand vol de durée record publié (par Eric Roosendaal) est le 129ième : il s'agit du vol 46 785 696 846 401 151 dont la durée est 2090 .

On considère de même les *vols de durée en altitude record* (tout vol de numéro plus petit reste en altitude moins longtemps). On en a trouvé 32 dont le plus grand publié (par Eric Roosendaal en décembre 2002) est le vol 180 352 746 940 718 527 qui reste en altitude 1575 étapes.

Les *vols d'altitude record* sont ceux qui atteignent un maximum d'altitude qu'aucun vol de numéro inférieur n'atteint. On en connaît 88 dont le dernier trouvé par Tomàs Oliveira e Silva en 2008 est le vol de 1 980 976 057 694 848 447 qui réussit à atteindre l'altitude vertigineuse de 64 024 667 322 193 133 530 165 877 294 264 738 020.

Le nombre P(N) d'étapes paires du vol N et le nombre I(N) d'étapes impaires vérifient toujours : $I(N)/P(N) < \log(2)/\log(3)$ (voir figure 5)

On remarque que pour certains nombres N le rapport I(N)/P(N) s'approche assez près de $\log(2)/\log(3) = 0{,}63092975\ldots$ On conjecture qu'on s'en approche de plus en plus. Ceci suggère de repérer les *records d'approche* : nombre N tel que le rapport I(N)/P(N) est plus grand que le rapport I(n)/P(n) pour tous les $n<N$.

Ces records d'approche sont rares : seuls 15 sont connus aujourd'hui dont le dernier est N = 100 759 293 214 567 qui donne I(N)/P(N) = 0,604938.

On sait que pour tout entier p il existe au moins un vol de durée p : le vol 2^p. En général il en existe d'autres et trouver le plus petit n'est pas facile. Un défi a été lancé pour l'an 2000 : trouver le plus petit entier n dont la durée de vol est 2000. Pour l'instant le nombre 377060271667498687 est le meilleur trouvé, mais rien n'assure que c'est le plus petit.

Examen numérique du problème de base

Pour mener les calculs, comme toujours en programmation, l'intelligence est utile et ce qu'on obtient avec les plus puissantes des machines peut être battu par un ordinateur personnel astucieusement programmé.

Voici quelques idées conduisant à gagner du temps dans la recherche d'un contre-exemple et utiles pour battre les record mentionnés au dessus.

Pour établir que tout vol inférieur à n atterrit en 1, il n'est pas nécessaire de mener le calcul jusqu'à 1 pour chaque $x \leq n$: on peut arrêter chaque vol dès qu'il passe en dessous de son point de départ x (car si avant x on a testé tous les vols de numéros inférieurs à x, on est alors certain que le vol x une fois arrivé sous x se poursuivra jusqu'à 1). On peut aussi arrêter le calcul dès qu'on trouve un nombre déjà atteint par un vol précédent (pour le savoir on doit mémoriser les nombres par lesquels on est déjà passé ce qui doit se faire intelligemment si on veut que ce procédé soit véritablement économique).

Plus intéressantes encore sont les remarques mathématiques du type :

- tout vol dont le numéro est de la forme n = 4k+ 1 finit par passer en dessous de n. On calcule les étapes à partir de n (qui est impair) : on obtient 12k+4 (pair), 6k+2 (pair), 3k+ 1 (pair ou impair mais plus petit que n).

On en déduit que dans une suite de tests systématiques, il est inutile de traiter les nombres de la forme 4k+ 1 (car ils passent toujours sous n), ce qui fait gagner 25% du temps de calcul. Comme il est aussi inutile de traiter ceux de la forme 4k ou 4k+2 (qui passent dès la première étape en dessous de leur point de départ) il ne reste plus qu'à essayer ceux de la forme 4k+3, ce qui représente une économie de calcul de 75% par rapport à la méthode naïve.

Ce type d'accélération des calculs mérite d'être perfectionné. Voici un premier pas dans cette direction : tout vol dont le numéro est de la forme n=16k+3 finit par passer en dessous de n. En effet les étapes à partir de 16k+3 (impair) sont 48k+10 (pair), 24k+5 (impair), 72k+16 (pair), 36k+8 (pair), 18k+4 (pair), 9k+2 (pair ou impair, mais plus petit que n).

En poursuivant sur le même principe on montre que si on écrit les nombres sous la forme 256k+i avec i variant de 0 à 255, seuls ceux correspondant à un i parmi : 27, 31,47, 63, 71, 91, 103, 111, 127 155 159 167, 191, 207, 223, 231, 239, 251, 255 doivent être traités, ce qui cette fois donne un gain de plus de 92%.

Le programme de Eric Roosendaal à qui on doit certains records est fondé sur une étude des entiers mis sous la forme 65536k+i ($65536=2^{16}$) dont seuls 1729 cas (soit 2,6%) restent à étudier. Cette économie est associée dans son programme à d'autres idées arithmétiques, ainsi qu'à une méthode de traitement simultané de plusieurs vols à la fois. Le programme de T. Oliveira e Silva améliore encore ces idées ce qui lui permet d’être le détenteur actuel du record de vérification de la conjecture.

Des résultats mathématiques en progrès

Les résultats les plus avancés obtenus du côté des tentatives de démonstrations mathématiques utilisent aussi l'idée du vol en altitude. En effet un peu de réflexion (voir raisonnement en figure 5) montre que la conjecture de Syracuse est équivalente à : la durée de tout vol en altitude est finie ; autrement dit à l' affirmation : tout vol finit par passer sous son point de départ.

Basant leurs raisonnements sur une étude arithmétique fine de l’arbre associé à la conjecture, R. Terra et C. Everett indépendamment l’un de l'autre ont montré que « presque tout vol finit par passer sous son point de départ ». Le "presque" signifie ici :

- il existe un nombre n tel que, parmi les vols de numéro ≤ n, au plus 10% ne passent pas sous leur point de départ ;
- il existe un nombre n’ (plus grand que n) tel que, parmi les vols de numéro ≤ n', au plus l% ne passent pas sous leur point de départ ;
- il existe un nombre n'' (plus grand que n') tel que, parmi les vols numéro ≤ n'', au plus 0,l% ne passent pas sous leur point de départ ; etc.

On a l'impression qu'on n’est pas loin de la conjecture, mais réfléchissez bien, le résultat signifie seulement que les vols qui restent toujours en altitude sont de plus en plus rares quand on tend vers l'infini. Il se peut quand même qu'il en existe, et donc, on ne peut pas déduire la conjecture du *presque* de Terra et Everett.

Pire, leur résultat n'implique même pas qu'une infinité de vols atterrissent en 1, car il n'interdit pas l' existence d'un cycle autre que 4-2-1. Le résultat est un progrès mais seulement si c'est véritablement un premier pas vers le même résultat sans le *presque*.

Plus récemment des démonstrations concernant cette fois les vols qui atterrissent en 1 (et non plus les vols qui ne restent qu'un temps fini au-dessus de leur point de départ) ont été obtenues. On a prouvé qu’il existait une constante c telle que si n est assez grand alors le nombre de $x \leq n$ qui atterrissent en 1 est supérieur à n^c.

Le résultat a d'abord été montré pour la constante c=0,05 par R. Crandal en 1978, puis avec c=0,3 par J. Sander et c=0,43 par I. Krasikov en 1989, puis avec c=0,48 par G. Wirsching en 1993, et enfin avec c=0,81 par D. Applegate et J. Lagarias en 1995.

On s' approche du but (qui sera atteint si on obtient le résultat avec c=1) mais rien n'assure que les méthodes utilisées vont permettre d'avancer encore.

La démonstration du résultat de 1995 est d'ailleurs assez particulière car elle utilise la résolution de grands systèmes d'équations qui ont été traitées par programmes. La démonstration ne peut donc pas être vérifiée à la main et l'article dans lequel le résultat est présent, donne non pas la démonstration du théorème avec c=0,81 mais l'explication de la façon dont les systèmes d'équations sont écrits, les résultats des programmes et la façon de les interpréter : un mathématicien qui veut vérifier le résultat doit suivre les explications et raisonnements, écrire un programme (compliqué !), le faire fonctionner et s’assurer qu'il a bien obtenu ce qu’il faut.

Une autre série de résultats remarquables doit être mentionnée qui concerne cette fois les cycles (éventuels) autres 4-2-1. R. Crandal et N. Yoneda ont établi en 1978 que s'ils en existaient, ils étaient nécessairement de taille supérieure à 275 000. Cette borne a été poussée à 17 087 915 en 1993, puis tout récemment à 102 225 496. Les preuves de ces affirmations utilisent les informations provenant des records de vérification de la conjecture, faisant là encore de ces résultats mathématiques des propriétés invérifiables par un mathématicien sans ordinateur.

S’il y a des cycles autres que 4-2-1 ils seront vraiment très longs ! Tout ceci est très intéressant, mais laisse toujours irrésolue la question générale de l'existence d’autres cycles que le cycle connu $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Un argument heuristique testé expérimentalement

Les expérimentations numériques jusqu'à $2{,}98 \times 10^{17}$ constituent un premier "presque" ; les résultats mathématiques cités au-dessus constituent un second "presque". En voici un troisième.

Certains raisonnements dit *heuristiques* (« qui aident à la découverte ») basés sur des considérations approximatives ou probabilistes peuvent éclairer une question mathématique. Le raisonnement suivant concernant la conjecture de Syracuse est une première tentative de ce type :

« Chaque nombre est soit pair, soit impair, il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs et donc une fois sur deux, lors d'un vol on appliquera la formule $n \rightarrow 3n+1$ et une fois sur deux on appliquera la formule $n \rightarrow n/2$. À chaque fois qu'on fera deux étapes l'altitude sera donc en gros multipliée par 3/2 (ce qui revient à ajouter 50%), et donc ... le vol ira vers des altitudes infinies. » Le raisonnement heuristique naïf conduit à l’inverse de ce qu'énonce la conjecture de Syracuse !.

Mais ce raisonnement est vraiment trop naïf, car il ne tient pas compte du fait que lorsque l’on a appliqué la formule $n \rightarrow 3n+1$ à partir d'un nombre impair on est alors certain de trouver un nombre pair (3 fois un nombre impair est impair, en ajoutant un on a donc un nombre pair). Il faut rendre le raisonnement plus subtil. Voici la version qu'en propose Jeffrey Lagarias

Après avoir appliqué la formule $n \rightarrow 3n+1 = m$ (pair) et juste après la formule $m \rightarrow m/2$ on tombe cette fois sur un nombre qu'on peut considérer comme quelconque. Il a donc 1 chance sur 2 d'être impair, 1 chance sur 4 d'être le double d'un nombre impair, 1 chance sur 8 d'être le quadruple d'un nombre impair, etc. Le vol qui mène d'un nombre impair au nombre impair suivant aura donc pour effet « en moyenne » :

- de multiplier n par 3/2, une fois sur 2 (trajet de longueur 2) ;

- de le multiplier par 3/4, une fois sur 4 (trajet de longueur 3) ;

- de le multiplier par 3/8, une fois sur 8 (trajet de longueur 4) ; etc.

Ceci conduit à la conclusion qu'en moyenne entre deux entiers impairs appartenant à un même vol, on multiplie l'altitude par la constante :

$$c = (3/2)^{1/2}(3/4)^{1/4}(3/8)^{1/8}(3/16)^{1/16}... = 3/4$$

En moyenne, on passe donc d'un nombre impair à un nombre impair plus petit de 25%, et donc on finit par atterrir sur un cycle (le raisonnement heuristique n'exclut pas qu'il puisse y avoir d'autres cycles que 4→2→1).

L'intérêt de ce raisonnement un peu compliqué est qu'en considérant maintenant un processus aléatoire construit sur le modèle supposé dans le raisonnement heuristique, on peut calculer le temps moyen pour que, partant de n, on passe en dessous de n (*durée moyenne de vol en altitude en ne comptant que les étapes impaires*). Le résultat de ce calcul est 3,49265…Or en évaluant, cette fois expérimentalement, la valeur moyenne de cette durée de vol en altitude (on essaie tous les entiers entre 3 et 2 milliards et on fait la moyenne) on trouve 3,4926... Cette coïncidence numérique remarquable indique que le modèle probabiliste du raisonnement heuristique est certainement correct.

S'il est correct, il n'y a pas de vol infini en altitude, et donc la conjecture est vraie (du moins concernant l'inexistence de vol tendant vers l'infini).

Malheureusement pour avoir une démonstration complète il faudrait justifier par une preuve (et non par une expérimentation) que le modèle probabiliste utilisé est correct. Le raisonnement heuristique renforce la conviction qu'on peut avoir sur l'inexistence de vols infinis, mais ce n'est pas une démonstration.

On est ici dans une situation analogue à celle concernant les décimales du nombre π : dans les deux cas on a une suite numérique parfaitement déterminée par des règles arithmétiques fixées ; dans les deux cas on constate que la suite se conforme miraculeusement bien à un modèle probabiliste clairement identifié (pour π c'est le modèle du tirage équitable des chiffres) ; dans les deux cas une vérification numérique poussée a été menée, mais dans les deux cas sans qu'on puisse obtenir de preuve de ce qui est constaté numériquement.

Le déterminisme le plus sommaire s'exhibe à chaque fois sous l'apparence du hasard le plus convaincant sans qu'on puisse faire autre chose que le constater.

Remarquons que les modèles probabilistes prédisent que l'altitude la plus haute du vol n est au plus Kn^2 (pour une certaine constante K) ce qui pour K=8 est aussi expérimentalement vérifié.

Nous avons maintenant trois "presque" pour la conjecture de Syracuse. Des "presque" ne suffisent pas à démontrer un résultat et donc, même si notre conviction s’est renforcée, la conjecture de Syracuse n'est pas devenue un théorème.

L’indécidabilité n’est pas loin

Jeffrey Lagarias m'a indiqué que pour lui « la conjecture est encore désespérément hors de portée, mais il la croit vraie. Si elle devait être fausse cela serait à cause d'un long cycle plutôt qu'à cause d’un vol infini. Mais même cela semble extrêmement improbable. Mon intuition dit « impossible », mais je ne sais pas en trouver une bonne traduction verbale »

Le fait de ne pas réussir à démontrer un résultat conduit inévitablement à se poser la question : ne serait-ce pas un indécidable ? C'est-à-dire : ne se pourrait-il pas que les méthodes traditionnelles des mathématiques (codifiées par exemple dans la très puissante théorie des ensembles) ne soient pas en mesure de démontrer la conjecture de Syracuse qui pourtant serait vraie ?

Notons que la conjecture pourrait être fausse et que cela soit indécidable : cela signifierait qu'un jour par les méthodes mathématiques traditionnelles nous allons tomber sur un entier que nous n'arriverons pas à faire atterrir sur 1, mais dont nous ne saurons pas montrer non plus qu'il n'atterrira jamais sur 1.

Exceptionnellement ici nous avons quelques raisons de considérer cette question de l'indécidabilité avec sérieux car un résultat de logique mathématique établit que nous ne sommes pas loin de l'indécidabilité.

Ce résultat est dû à J. Conway. Celui-ci a considéré les généralisations de la conjecture de Syracuse obtenues en prenant non plus 2 formules qu'on applique selon que n est pair ou impair, mais en en considérant p formules qu'on applique selon le reste de la division de n par p. Conway montre comment définir précisément une conjecture du type « tout n atterrit en 1 » de telle façon qu’elle soit indécidable dans la théorie des ensembles.

En fait dans n'importe quelle théorie mathématique précise, la méthode de Conway permet de construire un problème ressemblant à la conjecture de Syracuse et qui y soit indécidable (attention : cela ne signifie pas qu' on puisse définir un problème de type Syracuse qui soit indécidable dans toutes les théories à la fois ; une telle chose n'existe pas car « être indécidable » est toujours relatif à une théorie fixée).

Le résultat de Conway n'établit pas que la conjecture est indécidable ni même qu'elle est difficile (car certaines variantes de la conjecture sont faciles !), mais seulement que des problèmes assez semblables le sont ce qui est quand même troublant.

Chose amusante, en 1993 le résultat de Conway a été utilisé par Philippe Devienne, Patrick Lebègue et Jean-Christophe Routier du Laboratoire d’Informatique Fondamentale de Lille pour démontrer la puissance d’un formalisme de programmation à base de règles logiques. Comme d'habitude les recherches en apparence les plus futiles se trouvent avoir des conséquences pratiques, insoupçonnables a priori.

Les variantes sont aussi difficiles

Les mathématiciens sont toujours soucieux de généralité car elle permet d'extraire pleinement la puissance d’un raisonnement particulier et d’en tirer des conséquences inattendues. Ils se sont donc interrogés sur ce qu’on obtenait pour des problèmes ressemblant à la conjecture de Syracuse.

Ils se sont demandés d'abord ce qui se passait pour le problème 3x+1 lorsqu'on autorisait les altitudes négatives.

La conjecture qu'ils ont proposée est que tous les vols se terminent sur l'un des trois cycles suivants :

-1 → -2 -5 → -14 → -7 → -20 → -10

-17 → -50 → -25 → -74 → -37 → -1l0 → -55 → -164 → -82 → -41

→ -122 → -6l → -l82 → -9l → -272 → -136 → -68 → -34

Pour la fonction 5x+1 (à utiliser à place de 3x+1 quand x est impair) tous les vols n'arrivent pas en 1, car en plus du cycle 6 → 3 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 on trouve les cycles :

13 → 66 → 33 → 166 → 83 → 416 → 208 → 104 → 52 → 26

17 → 86 → 43 → 216 →108 → 54 → 27 → 136 → 68 → 34

Le vol 7 pour 5x+l, lui, semble bien infini quoiqu'on ne sache pas le démontrer .

L'adaptation de l'argument heuristique de Lagarias suggère d'ailleurs, pour qx+l à la place de 3x+1, si q est supérieur strictement à 3 alors il existe des vols infinis.

Pour le problème 181x+1 on trouve un cycle qui ne contient pas 1. De même pour q=1093 on peut établir que certains vols n'atterrissent pas en 1.

Tout ceci a conduit à une nouvelle conjecture formulée par Richard Crandall (une sorte de conjecture anti-Syracuse) qui affirme :

- pour qx+1 (à la place de 3x+1) avec q impair et strictement supérieur à 3 il y a toujours au moins un vol qui n'atterrit pas en 1.

Bien sûr cette conjecture reste à démontrer !

Les considérations indiquées au-dessus sur les cycles montrent que la conjecture de Crandall est vraie pour q=5, 181 et 1093. En 1995, Z. Franco et C. Pomerance ont montré que les entiers q pour lesquels la conjecture de Crandall était vraie devenaient de plus en plus fréquents quand q tend vers l'infini, autrement dit que la conjecture était « presque vraie » (comme il est « presque vrai » que tout vol pour 3x+ 1 passe sous son point de départ).

D'autres généralisations ont été formulées et des résultats ont commencé à être obtenus établissant des connexions entre ces questions, l'arithmétique des nombres premiers, certaines équations diophantiennes (équations à coefficients entiers dont on cherche des solutions en nombres entiers), les chaînes de Markov (des itérations probabilistes) et la théorie ergodique (études de l'utilisation répétée des fonctions de mélange).

Avec toutes ces variantes donc, même si la conjecture de Syracuse était résolue prochainement les mathématiciens et expérimentateurs numériques ont de quoi s' amuser pendant des siècles .

Bibliographie

D.Applegate, J.Lagarias. Density Bounds for the 3x+1 Problem. I Tree-Search Methods, II Krasikov Inequalities, Mathematics of Computation, 64, 209, 1995 pp. 411-438.

J.H.Conway. Unpredictable Iterations. Proc. 1972 Number Theory Conference. University of Colorado, Boulder, 1972, pp.49-52.

R.E.Crandall. On the « 3x+1 » Problem. Mathematics of Computation, 32, 144, 1978, pp.1281-1292.

P.Devienne, P.Lebègue, J.C.Routier, J.C.Würtz. One Binary Horn Clause is Enough. Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, 1994, Springer Verlag, LNCS.

Z.Franco, C.Pomerance. On a Conjecture of Crandall Concerning the qx+1 Problem. Mathematics of Computation, 64, 211, 1995, pp. 1333-1336.

B.Hayes. Le problème de Syracuse. Récréations Informatiques. Pour La Science / Belin 1984, pp. 11-16.

V.Klee, S.Wagon. Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory. Ch. 19 : The 3x+1 Problem. Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Exposition, n°11, 1993.

J.Lagarias. The 3x+1 Problem and its Generalizations. Amer. Math. Monthly, 92, 1985, pp.3-23.

J.Lagarias. The 3x+1 Problem Annotated Bibliography. Novembre 1997. Communication personnelle.

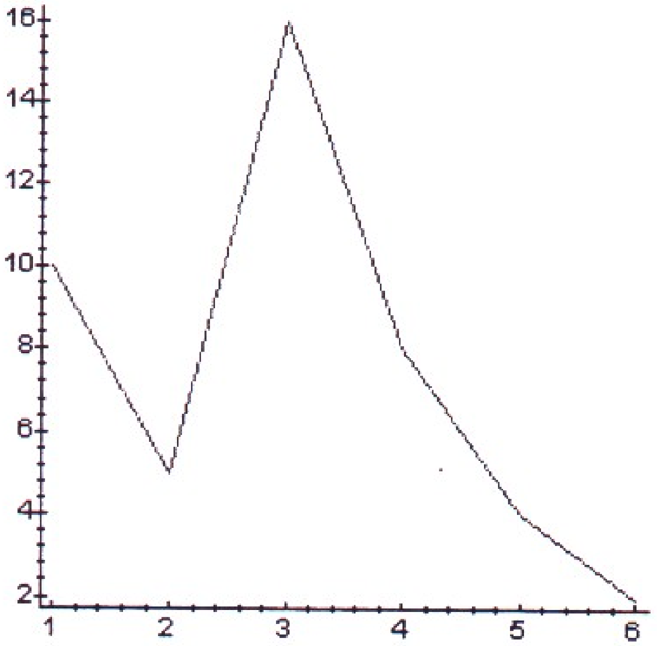
K.R.Matthews. The Generalized 3x+1 Mapping. 1997, à paraître.

T.Oliveira e Silva. Maximum Excursion and Stropping Time Record Holders for the 3x+1 Problem : Computational Results. À paraître dans Mathematics of Computation.

E.Roosendaal. On the 3x+1 Problem (1-2004) : http://www.ericr.nl/wondrous/

Figure 1. Si n est pair passez à n/2, sinon passez à 3n+1.

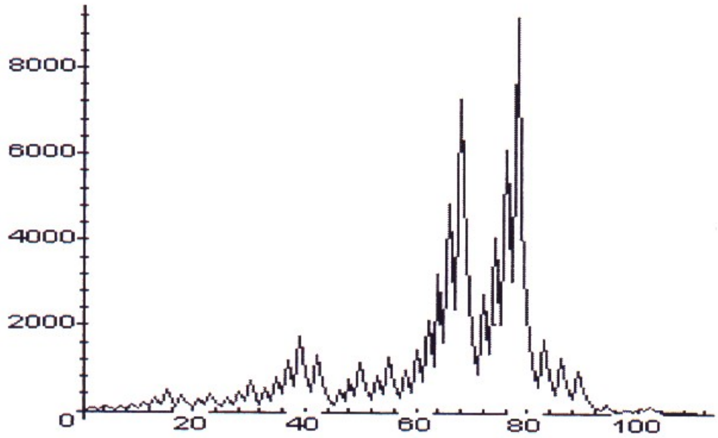
10 [10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]



15 [15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]

27 [27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]

durée du vol 111, durée du vol en altitude 95, altitude maximum atteinte 9232



159487 [159487, 478462, 239231, 717694, 358847, 1076542, 538271, 1614814, 807407, 2422222, 1211111, 3633334, 1816667, 5450002, 2725001, 8175004, 4087502, 2043751, 6131254, 3065627, 9196882, 4598441, 13795324, 6897662, 3448831, 10346494, 5173247, 15519742, 7759871, 23279614, 11639807, 34919422, 17459711, 52379134, 26189567, 78568702, 39284351, 117853054, 58926527, 176779582, 88389791, 265169374, 132584687, 397754062, 198877031, 596631094, 298315547, 894946642, 447473321, 1342419964, 671209982, 335604991, 1006814974, 503407487, 1510222462, 755111231, 2265333694, 1132666847, 3398000542, 1699000271, 5097000814, 2548500407, 7645501222, 3822750611, 11468251834, 5734125917, 17202377752, 8601188876, 4300594438, 2150297219, 6450891658, 3225445829, 9676337488, 4838168744, 2419084372, 1209542186, 604771093, 1814313280, 907156640, 453578320, 226789160, 113394580, 56697290, 28348645, 85045936, 42522968, 21261484, 10630742, 5315371, 15946114, 7973057, 23919172, 11959586, 5979793, 17939380, 8969690, 4484845, 13454536, 6727268, 3363634, 1681817, 5045452, 2522726, 1261363, 3784090, 1892045, 5676136, 2838068, 1419034, 709517, 2128552, 1064276, 532138, 266069, 798208, 399104, 199552, 99776, 49888, 24944, 12472, 6236, 3118, 1559, 4678, 2339, 7018, 3509, 10528, 5264, 2632, 1316, 658, 329, 988, 494, 247, 742, 371, 1114, 557, 1672, 836, 418, 209, 628, 314, 157, 472, 236, 118, 59, 178, 89, 268, 134, 67, 202, 101, 304, 152, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]

Durée : 183, durée de vol en altitude 116, altitude maximum atteinte 17202377752

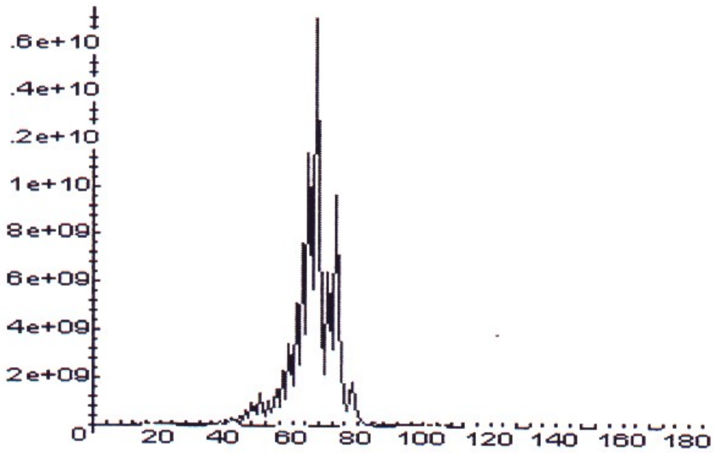


Figure 2. Graphe.

Pour suivre un vol on part d'un nombre et puis on se déplace vers la gauche en restant sur la même ligne tant qu'on le peut. Quand on arrive en bout de ligne (à gauche) on passe à la case au-dessus de celle où on est : 22 par exemple donne 11 puis 34 puis 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Si n est placé dans la i^ème^ colonne le nombre d'étapes paires du vol n est i. La conjecture de Syracuse est équivalente à la question de savoir si cet arbre, poursuivi indéfiniment, contient tous les entiers.

```
1<-2<-4<-8<-16<-32<-64<--128<-256<-512<-1024<-2048<-4096<-8192<-16384
              |      |
              |      21<---42<--94<-168<--336<--672<-1344<-2699<--5398
              |
              5<-10<-20<---40<--80<-160<--320<--640<-1280<-2560<--5120
                  |         |         |
                  |         |         53<--106<--212<--424<--848<--1696
                  |         |               |
                  |         |               35<---70<--140<--280<---560
                  |         |                      |
                  |         |                      23<---46<---92<---184
                  |         |                            |
                  |         |                            15<---30<----60
                  |         |
                  |         13<--26<--52<--104<--208<--416<--832<--1664
                  |                   |
                  |                   17<---34<---68<--136<--272<---544
                  |                          |
                  |                         11<---22<---44<---88<---176
                  |                                |           |
                  |                                |           29<----58
                  |                                |                   |
                  |                                |                  19
                  |                                |
                  |                                7<---14<---28<----56
                  |                                           |
                  |                                           9<----18
                  |
                  3<--6<---12<--24<--48<---96<--192<--394<--788<--1576
```

Figure 3. Les 40 premiers vols.

Vol	durée	durée de vol en altitude	altitude maximum
1	0	1	1
2	1	1	2
3	7	6	16
4	2	1	4
5	5	3	16
6	8	1	16
7	16	11	52
8	3	1	8
9	19	3	52
10	6	1	16
11	14	8	52
12	9	1	16
13	9	3	40
14	17	1	52
15	17	11	160
16	4	1	16
17	12	2	52
18	20	1	52
19	20	6	88
20	7	1	20
21	7	3	64
22	15	1	52
23	15	8	160
24	10	1	24
25	23	3	88
26	10	1	40
27	111	96	9232
28	18	1	52
29	18	3	88
30	18	1	160
31	106	91	9232
32	5	1	32
33	26	3	100
34	13	1	52
35	13	6	160
36	21	1	52
37	21	3	112
38	21	1	88
39	34	13	304
40	8	1	40

Figure 4. Les records.

Les vols de durée record sont ceux qui ont une durée jamais atteinte par un vol de numéro plus petit.

Vol de durée record (jusqu'à 100 000)

vol	durée	altitude maximum
3	7	16
6	8	16
7	16	52
9	19	52
18	20	52
25	23	88
27	111	9232
54	112	9232
73	115	9232
97	118	9232
129	121	9232
171	124	9232
231	127	9232
313	130	9232
327	143	9232
649	144	9232
703	170	250504
871	178	190996
1 161	181	190996
2 223	182	250504
2 463	208	250504
2 919	216	250504
3 711	237	481624
6 171	261	975400
10 971	267	975400
13 255	275	497176
17 647	278	11003416
23 529	281	11003416
26 623	307	106358020
34 239	310	18976192
35 655	323	41163712
52 527	339	106358020
77 031	350	21933016

Le record actuel publié (par Eric Roosendaal en 2003) : 2045 pour 22 702 016 320 473 825

Les vols d’altitude record sont ceux qui atteignent une altitude jamais atteinte par un vol de numéro plus petit.

Vol d’altitude record (jusqu’à 100 000)

vol	durée	altitude maximum
2	1	2
3	7	16
7	16	52
15	17	160
27	111	9232
255	47	13120
447	97	39364
639	131	41524
703	170	250504
1 819	161	1276936
4 255	201	6810136
4 591	170	8153620
9 663	184	27114424
20 895	255	50143264
26 623	307	106358020
31 911	160	121012864
60 975	334	593279152
77 671	231	1570824736

Le record actuel publié (par Eric Roosendaal en 2003) est de 4 830 857 225 169 174 231 293 987 863 972 468 altitude atteinte par le vol 255 875 336 134 000 063.

D’autres records et des mises à jour régulières à l’adresse internet :

http://personal.computrain.nl/eric/wondrous/

Figure 5. Résultats.

(a) *Si tout nombre strictement supérieur à 4 a une durée de vol en altitude finie alors la conjecture de Syracuse est vraie.*

En effet, supposons que tout nombre strictement supérieur à 4 a une durée de vol en altitude finie. Montrons par récurrence que tout *n* atterrit en 1. C'est vrai pour 5. Soit un entier *n* strictement supérieur à 5 et supposons (hypothèse de récurrence) que pour tout entier $i < n$ le vol atterrit en 1. Par hypothèse, *n* a une durée de vol en altitude finie, donc partant de *n* on descend en dessous de *n* et on arrive à un *i* dont on sait que , par hypothèse de récurrence, il atterrit en 1, donc *n* atterrit en 1, C.Q.F.D.

(b) *Plus généralement, la conjecture de Syracuse est équivalente à l'un des énoncés suivants :*

(1) la durée de tout vol est finie ;

(2) la durée de tout vol en altitude est finie ;

(3) tout vol a un nombre fini d'étapes paires ;

(4) tout vol a un nombre fini d'étapes paires en altitude ;

(5) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires ;

(6) tout vol a un nombre fini d'étapes impaires en altitude ;

Il est clair que l'affirmation *(1)* implique toutes les autres.

Nous avons déjà vu que *(2)* implique *(1)*.

Partant d'un nombre pair on aboutit nécessairement à un nombre impair au bout d'un nombre fini d'étapes, et réciproquement toute étape impaire est immédiatement suivie d'une étape paire, donc *(3)* et *(5)* sont équivalentes. Et comme *(3)* implique *(5)*, par exemple, on a aussi *(3)* implique *(1)*.

Pour des raisons similaires *(2)*, *(4)* et *(6)* sont équivalentes. C.Q.F.D.

(c) *La durée de vol en altitude et le coefficient d'ascension (rapport entre le point de départ et le point le plus haut) peuvent être aussi grands qu'on le souhaite*.

On prend $N=2^p-1$ (impair) qui donne $3(2^p - 1)+1 = 3.2^p -2$ (pair) qui donne $3.2^{p-1} - 1$, qui deux étapes plus loin donne $3^2.2^{p-2} - 1$ etc. jusqu'à arriver au bout d'un total de 2p étapes à $3^p - 1$.

La durée de vol en altitude à partir de $2^p - 1$ est donc d'au moins 2p et le coefficient d'ascension est donc supérieur à $(3^p - 1)/(2^p - 1)$. Il n'y a donc des durées de vol en altitude aussi longues qu' on le veut et des coefficients d'ascension aussi grands qu'on le veut.

(d) *Si le vol N atterrit en 1 alors le nombre P(N) d'étapes paires du vol N et le nombre I(N) d'étapes impaires du vol N vérifient* :

$I(N) / P(N) < \log(2) / \log (3)$.

Soit $N = E(0), E(l), \ldots, E(p)=l$ le vol N

On a $N = [E(0) / E(1)] [E(1) / E(2)] ... [E(p-1) / (E(p)]$

Donc :

$\log N = \log(E(0) / (E(l)) + \log(E(l) / (E(2)) + ...+ \log (E(p-l) / (E(p))$

Lorsque i est une étape paire on a : $\log (E(i)/(E(i+l)) = \log 2$

Lorsque i est une étape impaire on a .

$$\log (E(i)/(E(i+l)) = \log (E(i)/(3E(i)+1)) < \log(1/3) = -\log 3$$

donc : $0 < \log N < P(N) \log(2) - I(N) \log(3)$

d’où : $I(N) / P(N) < \log(2) / \log (3)$

Figure 6. Accélération des calculs.

(a) *Gains avec une partition des entiers en 4 classes.*

Pour vérifier la conjecture de Syracuse pour tous les vols de numéros inférieurs ou égaux à n, il suffit de vérifier que tous ces vols ont une durée en altitude finie (cf. Fig.5).

Tout entier peut s'écrire sous la forme $4k$ ou $4k+1$ ou $4k+2$ ou $4k+3$.

Pour $4k$ et $4k+2$, c'est évident car, étant pair, la durée de leur vol en altitude est 1.

$4k+1 \to 12k+4 \to 6k+2 \to 3k+1$ pair ou impair mais strictement inférieur à $4k+1$, donc la durée de vol en altitude est 3.

Pour $4k+3$ on ne peut pas faire de même (hélas, car la conjecture serait démontrée ;-) en effet :

$$4k+3 \to 12k+10 \to 6k+5 \to 18k+16 \to 9k+8$$

et ici on ne peut pas continuer car on ne sait pas si c'est pair ou impair !

(b) *Gains avec une partition des entiers en 8 classes.*

Parmi les cas $8k$, $8k+1$, $8k+2$, $8k+3$, $8k+4$, $8k+5$, $8k+6$ et $8k+7$ seuls sont à examiner deux cas $8k+3$ et $8k+7$, en effet quand c'est pair c'est évident et on a $8k+1 = 4k'+1$ et $8k+5 = 4(k'+1)+1$ en posant $k'=2k$

$$8k+3 \to 24k+10 \to 12k+5 \to 36k+16 \to 18k+8 \to 9k+4$$

$$8k+7 \to 24k+22 \to 12k+11 \to 36k+34 \to 18k+17 \to 54k+52 \to 27k+26$$

et dans ces deux cas on ne peut pas conclure donc on ne gagne rien de plus qu'avec la répartition en 4 cas.

(c) *Gains avec une partition des entiers en 16 classes.*

Je vous le laisse comme exercice sachez que la réponse est : seul trois cas sur seize sont sans conclusion ; on gagne donc 13/16 soit 81,25% des calculs, ce qui est mieux qu'avec 4 cas

On peut bien sûr continuer à essayer d'économiser les calculs avec 32 classes, 64 classes, etc.

Figure 7 . Trouvez la conjecture

(a) *Quelle conjecture raisonnable formuler si on accepte les entiers négatifs ?.*

Réponse : tous les vols aboutissent à l'un des quatre cycles :

4 → 2 → 1 -1 → -2 -5 → -14 → -7 → -20 → -10

-17 → -50 → -25 → -74 → -37 → -1l0 → -55 → -164 → -82 → -41 → -122 → -6l → -l82 → -9l → -272 → -136 → -68 → -34

(b) *Quelle conjecture formuler si on remplace 3x+1 par 3x-1 ?.*

Réponse : on est ramené au cas 3x+1 avec des départs négatifs.

(c) *Quelle conjecture formuler si on remplace 3x+1 par 5x+1 ?.*

Réponse : il y a trois cycles possibles :

6 → 3 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

13 → 66 → 33 → 166 → 83 → 416 → 208 → 104 → 52 → 26

17 → 86 → 43 → 216 → 108 → 54 → 27 → 136 → 68 → 34

et lorsqu'on ne tombe pas dessus le vol est infini.

(d) *Pour qx+1 il y a au moins un cycle si q* = 7, 15, 31, …2^i-1, *lequel ?.*

Réponse :

$2^i \rightarrow 2^{i-1} \rightarrow 2^{i-2} \rightarrow \ldots \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Si on prend 181x+1 on trouve deux cycles :

35 → 6 336 → 1 584 → 792 → 396 → 198 → 99 → 17 920 → 8 960 → 4 480 → 2 240 → 1 120 → 560 → 280 → 140 → 70

27 → 4 888 → 2 444 → 1 222 → 611 → 1l0 592 → 55 296 → 27 648 → 13 824 → 6 912 → 3 456 → 1 728 → 864 → 432 → 216 → 108 → 54

Une recherche de cycles pour qx+1, avec q impair jusqu'à 400, ne donne que les cycles indiqués ici. Les valeurs q = 3, 5, 7, 15, 31, 127, 181, 255, semblent donc les seules valeurs impaires de q inférieures à 400 pour lesquelles on ait des cycles.

Figure 8 . Algorithme de Floyd.

Supposons qu'on dispose d'une suite x_i (i = 0, 1,…) engendrée par une itération $x_{i+1} = f(x_i)$ avec $f : E \to E$, dont on cherche à savoir si elle est périodique de période p à partir d'un certain rang k (on dit *ultimement périodique*). Si E est fini, on est assuré que k et p existent (démontrez-le).

Exemple : Pour $x_0 = 10$, $x_1 = 5$, $x_2 = 16$, $x_3 = 8$, $x_4 = 4$, $x_5 = 2$, $x_6 = 1$, $x_7 = 4$, $x_8 = 2$, $x_9 = 1$, … on a $k = 4$ et $p = 3$.

Pour rechercher p et k l'idée la plus naturelle est de tester à chaque fois qu'on dispose d'une nouvelle valeur x_i, si on l'a déjà obtenue avant. L'algorithme qui en résulte est peu efficace car il conduit à faire un nombre de tests qui croît au fur et à mesure qu'on avance dans la suite et en plus il faut mémoriser tous les nombres obtenus précédemment.

Voici un algorithme qui est plus efficace sauf si le calcul de x_i donc la fonction f est très coûteux, il s'agit de l'algorithme de Floyd :

1 - On recherche d'abord le plus petit i tel que $x_i = x_{2i}$. Pour cela, à chaque étape on garde en mémoire uniquement x_i et x_{2i} et on passe à l'étape suivante en calculant $x_{i+1} = f(x_i)$ et $x_{2i+2} = f(f(x_{2i}))$.

2 - Quand on a trouvé le plus petit i tel que $x_i = x_{2i}$, on calcule x_{i+1}, x_{i+2}, etc. jusqu'à trouver le plus petit p tel que $x_i = x_{i+p}$, p est la période (la plus petite).

3 - Si on souhaite connaître k indice du démarrage de la période, on repart de x_0 à la recherche du plus petit k tel que x_k soit dans les valeurs de la période.

L'idée est que sur une boucle le lièvre rattrape la tortue !