ANALYSE NUMÉRIQUE. — *Fonctions admettant des cycles d'ordre n'importe quelle puissance de 2 et aucun autre cycle.* Note (*) de **Jean-Paul Delahaye,** présentée par Jacques-Louis Lions.

L'étude de la convergence cyclique de la méthode des approximations successives pour une fonction d'une variable réelle conduit à la question suivante (posée par exemple dans [4]) : existe-t-il des fonctions admettant des cycles d'ordre 2^i pour tout entier i et aucun autre cycle ? C'est à cette question ainsi qu'à diverses autres questions liées que nous répondons ici. Les démonstrations sont données dans [7].

The study of the cyclic convergence of successive approximations for a real function leads to the following question [4]*: do functions with cycles of order 2^i for every integer i and no other cycle, exist ? We answer this question, and some others relative to these problems. Proofs are given in* [7].

0. Introduction. — L'étude de la convergence de la méthode des approximations successives pour une fonction f, continue d'un intervalle compact J de **R** dans lui-même, a donné lieu ces 15 dernières années à de nombreux articles qui ont fait considérablement avancer le problème (*voir* par exemple [1], [3], [4], [6], [8], [9]). Parmi les résultats obtenus les deux suivants (donnés dans [4] et démontrés à partir de [1] et [8]) sont remarquables :

(A) *si f admet un cycle d'ordre p, p n'étant pas une puissance de 2, alors il existe $x_0 \in J$ tel que la suite (x_n) définie par $x_{n+1}=f(x_n)$ admette une infinité de valeurs d'adhérence* [*on dit alors que (x_n) est turbulente et par abus de langage on dit que f est turbulente*];

(B) *si pour un certain $i \in \mathbb{N}$ f n'admet pas de cycle d'ordre 2^i, alors quel que soit le point $x_0 \in J$, la suite (x_n) admet un nombre fini de valeurs d'adhérence qui forment un cycle d'ordre 2^j avec $j<i$* [*on dit alors que (x_n) est cycliquement convergente, et par abus de langage on dit que f est cycliquement convergente*].

Malheureusement comme le remarquait M. Cosnard [4] les résultats (A) et (B) ne couvrent pas tous les cas. En effet, peut-être existe-t-il des fonctions f admettant des cycles d'ordre 2^i pour tout $i \in \mathbb{N}$ et aucun autre cycle ?

C'est à cette question posée plusieurs fois déjà ([2], [4], [5]) et importante pour l'étude du comportement général de la méthode des approximations successives que nous répondons ici.

Nous montrons que de telles fonctions existent, qu'elles sont, parfois turbulentes (§ 1), parfois cycliquement convergentes (§ 2). Par ailleurs la fonction g du paragraphe 1 est aussi le premier exemple connu de fonction continue de J dans J à la fois turbulente et à comportement itératif régulier [5].

1. La fonction g. — La fonction $g : [0, 1] \to [0, 1]$ est définie en posant :

$$g(0)=2/3; \qquad g(1)=0,$$
$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad g(1-2/3^i)=1/3^{i-1} \qquad \text{et} \qquad g(1-1/3^i)=2/3^{i+1}$$

puis en la prolongeant par linéarité.

La fonction g vérifie les propriétés suivantes :

(a) *la suite engendrée par g à partir de $x_0=0$ est turbulente;*

(b) *pour tout $i \in \mathbb{N}$, g admet au moins un cycle d'ordre 2^i;*

(c) *g n'admet aucun autre cycle.*

Pour établir (a) on montre que si l'entier n est écrit en base 2 sous la forme $n=b_i^n b_{i-1}^n \dots b_1^n$ ($b_j^n \in \{0, 1\}$) alors x_n s'écrit en base 3 sous la forme $x_n=0, a_1^n a_2^n \dots a_i^n$ où $a_i^n=2b_i^n$ (par exemple puisque 23 s'écrit 10111 en base 2, x_{23} s'écrit 0,22202 en base 3).

Il en résulte immédiatement que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est l'ensemble triadique de Cantor.

Pour établir (*b*) et (*c*) on montre que $g = \lim_{i \to \infty} g_i$ où les g_i sont définies en posant :

$$\begin{cases} g_0(x)=x; \quad g_1(x)=1-x, \\ \forall i \geqq 2, \quad g_i(0)=2/3; \quad g_i(1)=0; \quad g_i(1-1/3^{i-1})=1/3^{i-1}, \\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, i-1\}, \quad g_i(1-2/3^j)=1/3^{j-1}, \\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, i-2\}, \quad g_i(1-1/3^k)=2/3^{k+1} \end{cases}$$

puis en étendant par linéarité quand c'est nécessaire.

Ensuite, par une méthode semblable à celle de [6] on constate que chaque g_i admet des cycles d'ordre $2^i, 2^{i-1}, \ldots, 2, 1$ et aucun autre cycle, ce qui permet de conclure.

En fait comme dans [3] l'étude de g peut se poursuivre plus en détail et, en notant $\mathscr{C}$ l'ensemble triadique de Cantor, et $L(x_0)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite des itérés par g de x_0 on montre que :

— *pour tout* $x_0 \in \mathscr{C}$ *on a* $L(x_0)=\mathscr{C}$;

— *l'ensemble* P *des points de* [0, 1] *donnant une suite cyclique ou ultérieurement cyclique est dénombrable;*

— *pour tout* $x_0 \in [0, 1] \setminus P$ *on a* $L(x_0)=\mathscr{C}$.

En conséquence les compacts invariants minimaux de g sont les cycles et $\mathscr{C}$; et g est donc à comportement itératif régulier [5].

2. La fonction g'. — *Soit* $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ une suite finie [resp. $(f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ une suite infinie] de fonctions continues de l'intervalle [0, 1] de **R** dans lui-même.

On notera $\langle f_0, f_1, \ldots, f_n \rangle$ (resp. $\langle f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots \rangle$) la fonction f définie en posant :

$$f(1)=1 \quad \text{et pour tout } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ (resp. } i \in \mathbb{N}),$$
$$\forall x \in [1-1/3^i, 1-2/3^{i+1}], \quad f(x)=(1-1/3^i)+1/3^{i+1} f_i(3^{i+1}(x-1+1/3^i))$$

puis en étendant par linéarité.

Proposition 1. — *Pour tout* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *(resp.* $i \in \mathbb{N}$*) et pour tout* $j \in \mathbb{N}^*, j \neq 1$, *soit* α_i^j *le nombre de cycles d'ordre* j *de* f_i $(\alpha_i^j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$:

(i) *le nombre de cycles d'ordre* $j \in \mathbb{N}^*, j \neq 1$, *de* $f = \langle f_0, f_1, \ldots, f_n \rangle$ *(resp.* $f = \langle f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots \rangle$*) est* $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^j$ *(resp.* $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^j$*);*

(ii) *si toutes les fonctions* f_i *sont cycliquement convergentes,* f *est aussi cycliquement convergente;*

(iii) *si l'une des fonctions* f_i *est turbulente, alors* f *est turbulente.*

Si maintenant on pose $g' = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots \rangle$ on obtient donc :

(a') *g' est cycliquement convergente;*

(b') *pour tout* $i \in \mathbb{N}$, *g' admet au moins un cycle d'ordre* 2^i;

(c') *g' n'admet aucun autre cycle.*

3. D'autres fonctions g et g'. — Concluons par les deux propositions suivantes dont la première s'établit grâce aux résultats de [6] et la seconde grâce à la proposition 1.

Proposition 2. — (i) *Si g est une fonction vérifiant* (a), (b), (c) *alors quel que soit* $n \in \mathbb{N}$ *il en est de même pour* g^{2^n}.

(ii) *Si g' est une fonction vérifiant (a'), (b'), (c') alors quel que soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *il en est de même pour* g^n.

PROPOSITION 3. — *L'ensemble des fonctions vérifiant* (*a*), (*b*), (*c*) [*resp.* (*a'*), (*b'*), (*c'*)] *est un ensemble ayant la puissance du continu.*

(*) Remise le 11 juillet 1980; acceptée après révision le 15 septembre 1980.

[1] V. V. BASHUROV et V. N. OGIBIN, *U.S.S.R. Comp. Math. and Math. Phys.*, 6, n° 5, 1966, p. 178-184.

[2] M. Y. COSNARD, *La suite des approximations successives est parfois turbulente*, R. R. Université scientifique et médicale de Grenoble, 1977.

[3] M. Y. COSNARD, *Comptes rendus*, 286, série A, 1978, p. 639.

[4] M. Y. COSNARD, *S.I.A.M. J. of Num. Analysis*, 16, 1979, p. 300-310.

[5] M. Y. COSNARD, *Ensembles invariants et comportement itératif régulier*, S.A.N. Université scientifique et médicale de Grenoble, 1979.

[6] M. Y. COSNARD et A. EBERHARD, *Sur les cycles d'une application continue de la variable réelle*, S.A.N. Université scientifique et médicale de Grenoble, 1977.

[7] J. P. DELAHAYE, *Cycle d'ordre* 2^i *et convergence cyclique de la méthode des approximations successives*, Pub. A.N.O., n° 21, Université des sciences et techniques de Lille, 1980.

[8] T. Y. LI et J. A. YORKE, *A.M.M.*, 82, n° 10, 1976, p. 985-992.

[9] A. N. SHARKOVSKIY, *Ukranian Math. J.*, 16, 1964, p. 61-71.

Université des Sciences et Techniques de Lille,
Laboratoire d'Informatique, B.P. n° 36,
59655 *Villeneuve d'Ascq Cedex.*