Les commentaires du mathématicien

JEAN-PAUL DELAHAYE

Les 92 éléments du Big Bang numérique de John Horton Conway.

Aristote, le plus grand de tous les philosophes, méritait bien qu'on le commente, ce que fit Averroès (parmi bien d'autres) au XII^e siècle. Saint Thomas d'Aquin commenta ce commentaire (qu'il désapprouvait) et il fut lui-même commenté par Étienne Gilson qui lui-même... On trouverait mille autres exemples, en littérature ou en philosophie, de ces jeux infinis de commentaires, chacun s'appuyant sur le précédent *ad infinitum*.

Si le philosophe a toujours plus à dire que son prédécesseur, le mathématicien est plus économe de ses propos et ne profite pas de son commentaire pour étaler ses sentiments intimes sur le monde. Dans son *Dictionnaire des idées reçues*, Gustave Flaubert a soigneusement noté, en face du mot mathématiques : dessèchent le cœur.

Pourtant, nous allons voir que le jeu du commentaire mathématique engendre un monde remarquablement riche... en structures mathématiques.

Prenez un mathématicien (au cœur le plus sec possible) ; donnez-lui le texte numérique le plus élémentaire qu'il soit : «1» ; et demandez-lui son commentaire. Laconique, il répondra : «un "1"» (signifiant : le texte est composé d'un «1»), ce qu'il écrira «1 1».

1. L'ART DU COMMENTAIRE NUMÉRIQUE

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
31131211131221
13211311123113112211
11131221133112132113212221
3113112221232112111312211312113211

Partant du nombre 1, on le décrit, cela donne «un "1", c'est-à-dire 11. On décrit 11, cela donne «deux "1"» c'est-à-dire 21, ce qui se décrit «un "2", un "1"», c'est-à-dire 1211 etc. En poursuivant ainsi seuls les chiffres 1, 2 et 3 sont nécessaires.

Demandez-lui de commenter ce commentaire numérique. Avec une remarquable efficacité et sans ostentation, il vous dira «deux "1"», ce qu'il écrira «2 1». Continuez ainsi, vous obtiendrez de lui le commentaire «1 2 1 1», puis «1 1 1 2 2 1», puis «3 1 2 2 1 1», et ainsi de suite...

L'EXPANSION NUMÉRIQUE

Facile à dire, mais quelle est cette suite ? Remarquez que la suite de commentaires est valable aussi bien en français qu'en anglais : elle n'a pas besoin d'être traduite d'une langue à l'autre. Cette suite aurait été décrite pour la première fois par l'Allemand M. Hilgemeir dans un article où il en démontrait quelques propriétés élémentaires. Il revient cependant à John Conway – célèbre pour son invention du jeu de la vie – d'avoir traité presque toutes les questions posées par ce jeu des commentaires numériques infinis. Ce qu'il a trouvé est étrange, complexe et fascinant.

Pour présenter ses résultats, J. Conway propose d'utiliser le langage de la chimie, de la physique et de la cosmologie. Il imagine un monde qui, seconde après seconde, n'est que le développement des commentaires numériques successifs du texte «1». Cette vision parménidienne du monde comme devenir de l'UN, aurait sans doute plu à Platon. Le Big Bang numérique de Conway, c'est l'expansion infinie de la suite : «1», «1 1», «2 1», «1 2 1 1», «1 1 1 2 2 1», «3 1 2 2 1 1», «1 3 1 1 2 2 2 1», «1 1 1 3 2 1 3 2 1 1», «3 1 1 3 1 2 1 1 1 3 1 2 2 1», etc.

Le terme d'expansion n'est pas abusif, car J. Conway a établi que le taux d'augmentation moyen de cet univers est 1,30357726903... D'un terme à l'autre, la taille de l'univers est multipliée par ce nombre, solution d'une équation de degré 71, que J. Conway, aidé d'Oliver Atkin, a

écrite explicitement. Cela signifie que le commentaire numérique d'un texte augmente sa taille de 30 pour cent en moyenne à chaque étape (ce résultat est vrai quel que soit le point de départ, sauf pour le noyau «2 2» qui, bien sûr, reste fixe). Dans cette cosmologie arithmétique, nous savons donc – contrairement à la cosmologie du monde physique où cette question reste ouverte – que l'expansion ne cessera jamais (en particulier, il n'y a pas de cycle fini autre que 2 2). Il est remarquable peut-être que, comme en littérature, le commentateur au fil des siècles voit son travail s'alourdir, devenir de plus en plus compliqué sans qu'il y ait aucune limite, et cela bien que le point de départ soit simplement un unique «1».

L'analogie avec le monde physique proposée par J. Conway est plus profonde encore. L'univers engendré par les commentaires numériques sur l'UN se décompose en éléments stables et en éléments instables, et il y a 92 éléments stables que J. Conway a baptisés du nom des 92 premiers éléments de la classification périodique des éléments chimiques de Mendeleïev. Les transformations des éléments numériques correspondent, sans être exactement les mêmes, aux transmutations spontanées des éléments physiques.

La chimie du Big Bang numérique

Définissons d'abord ce qu'est un élément. Certains nombres N sont une concaténation de deux morceaux $G.D$ qui, dans la suite des commentaires numériques, n'interféreront plus jamais entre eux. $G.D$ est une décomposition du nombre N si, pour tout entier n, le $n$ième commentaire de N est obtenu en juxtaposant le $n$ième commentaire de G et le $n$ième commentaire de D.

Le nombre 1113213211, par exemple, se décompose en $G = 11132$ et $D = 13211$. En effet, les commentaires successifs de 11132 se termineront tous par 2 (réfléchissez une seconde pour vous en persuader), alors qu'aucun commentaire de 13211 ne commencera par 2 (car 13211 → 11131221 → 3113112211 → 132113212221 dont le début est 13211, et donc les premières décimales recommencent de manière cyclique).

Les nombres qui ne peuvent pas être décomposés sont appelés les éléments, ou atomes. Il faut faire attention : ce n'est pas parce qu'un élément apparaît dans un nombre que le nombre se décompose exactement à cet endroit, car il faut que les découpes soient bonnes : le tableau 4, sur le théorème de la coupure et les éléments, donne la liste de

2. LES ÉLÉMENTS

01	H	22
02	He	13112221133211322112211213322112
03	Li	312211322212221121123222112
04	Be	111312211312113221133211322 112211213322112
05	B	1321132122211322212221121123222112
06	C	3113112211322112211213322112
07	N	111312212221121123222112
08	0	132112211213322112
09	F	31121123222112
10	Ne	111213322112
11	Na	123222112
12	Mg	3113322112
13	Al	1113222112
14	Si	1322112
15	P	311311222112
16	S	1113122112
17	Cl	132112
18	Ar	3112
19	K	1112
20	Ca	12
21	Sc	3113112221133112
22	Ti	11131221131112
23	V	13211312
24	Cr	31132
25	Mn	111311222112
26	Fe	13122112
27	Co	32112
28	Ni	11133112
29	Cu	131112
30	Zn	312
31	Ga	13221133122211332
32	Ge	31131122211311122113222
33	As	11131221131211322113322112
34	Se	13211321222113222112
35	Br	3113112211322112
36	Kr	11131221222112
37	Rb	1321122112
38	Sr	3112112
39	Y	1112133
40	Zr	12322211331222113112211
41	Nb	1113122113322113111221131221
42	Mo	13211322211312113211
43	Tc	311322113212221
44	Ru	132211331222113112211
45	Rh	311311222113111221131221
46	Pd	111312211312113211
47	Ag	132113212221
48	Cd	3113112211
49	In	11131221
50	Sn	13211
51	Sb	3112221
52	Te	1322113312211
53	I	311311222113111221
54	Xe	11131221131211
55	Cs	13211321
56	Ba	311311
57	La	11131
58	Ce	1321133112
59	Pr	31131112
60	Nd	111312
61	Pm	132
62	Sm	311332
63	Eu	1113222
64	Gd	13221133112
65	Tb	3113112221131112
66	Dy	111312211312
67	Ho	1321132
68	Er	311311222
69	Tm	11131221133112
70	Yb	1321131112
71	Lu	311312
72	Hf	11132
73	Ta	13112221133211322112211213322113
74	W	312211322212221121123222113
75	Re	111312211312113221133211322112211 213322113
76	Os	1321132122211322212221121123222113
77	Ir	3113112211322112211213322113
78	Pt	111312212221121123222113
79	Au	132112211213322113
80	Hg	31121123222113
81	T1	111213322113
82	Pb	123222113
83	Bi	3113322113
84	Po	1113222113
85	At	1322113
86	Rn	311311222113
87	Fr	1113122113
88	Ra	132113
89	Ac	3113
90	Th	1113
91	Pa	13
92	U	3

3. LES TRANSMUTATIONS

01	H	→	H
02	He	→	Hf Pa H Ca Li
03	Li	→	He
04	Be	→	Ge Ca Li
05	B	→	Be
06	C	→	B
07	N	→	C
08	0	→	N
09	F	→	O
10	Ne	→	F
11	Na	→	Ne
12	Mg	→	Pm Na
13	Al	→	Mg
14	Si	→	Al
15	P	→	Ho Si
16	S	→	P
17	Cl	→	S
18	Ar	→	Cl
19	K	→	Ar
20	Ca	→	K
21	Sc	→	Ho Pa H Ca Co
22	Ti	→	Sc
23	V	→	Ti
24	Cr	→	V
25	Mn	→	Cr Si
26	Fe	→	Mn
27	Co	→	Fe
28	Ni	→	Zn Co
29	Cu	→	Ni
30	Zn	→	Cu
31	Ga	→	Eu Ca Ac H Ca Zn
32	Ge	→	Ho Ga
33	As	→	Ge Na
34	Se	→	As
35	Br	→	Se
36	Kr	→	Br
37	Rb	→	Kr
38	Sr	→	Rb
39	Y	→	SrU
40	Zr	→	Y H Ca Tc
41	Nb	→	Er Zr
42	Mo	→	Nb
43	Tc	→	Mo
44	Ru	→	Eu Ca Tc
45	Rh	→	Ho Ru
46	Pd	→	Rh
47	Ag	→	Pd
48	Cd	→	Ag
49	In	→	Cd
50	Sn	→	In
51	Sb	→	Pm Sn
52	Te	→	Eu Ca Sb
53	I	→	Ho Te
54	Xe	→	I
55	Cs	→	Xe
56	Ba	→	Cs
57	La	→	Ba
58	Ce	→	La H Ca Co
59	Pr	→	Ce
60	Nd	→	Pr
61	Pm	→	Nd
62	Sm	→	Pm Ca Zn
63	Eu	→	Sm
64	Gd	→	Eu Ca Co
65	Tb	→	Ho Gd
66	Dy	→	Tb
67	Ho	→	Dy
68	Er	→	Ho Pm
69	Tm	→	Er Ca Co
70	Yb	→	Tm
71	Lu	→	Yb
72	Hf	→	Lu
73	Ta	→	Hf Pa H Ca W
74	W	→	Ta
75	Re	→	Ge Ca W
76	Os	→	Re
77	Ir	→	Os
78	Pt	→	Ir
79	Au	→	Pt
80	Hg	→	Au
81	T1	→	Hg
82	Pb	→	T1
83	Bi	→	Pm Pb
84	Po	→	Bi
85	At	→	Po
86	Rn	→	Ho At
87	Fr	→	Rn
88	Ra	→	Fr
89	Ac	→	Ra
90	Th	→	Ac
91	Pa	→	Th
92	U	→	Pa

4. LE THÉORÈME DE LA COUPURE ET LES ÉLÉMENTS

Certains nombres se décomposent en deux parties qui n'interfèrent plus jamais dans la suite des commentaires successifs. Ainsi 1113213211 se décompose en 11132 et 13211.
Le résultat suivant, obtenu par John Horton Conway, indique tous les endroits où l'on peut faire de telles coupures :
Si le nombre *a* se termine par un 2 et que *b* commence par 121, 123, 131, 132, 111, 312, 313, 321, 323, 3112, 3113, 3221 ou 3223, alors le nombre *ab* peut être coupé en *a* et *b*.
Si le nombre *a* se termine par un 1 ou un 3 et que *b* commence par 22121, 22123, 22131, 22132, 22111, 22312, 22313, 22321, 22323, 223112, 223113, 223221, ou 223223, alors le nombre *ab* peut être coupé en *a* et *b*.
Les nombres qui ne peuvent plus être coupés s'appellent des éléments.
En étudiant soigneusement ce qui se passe à partir de 1, on voit que les 7 premiers nombres de la suite sont des éléments qui ne réapparaissent plus ensuite (ce sont des éléments instables), et qu'il y a 92 éléments stables qui persistent indéfiniment.
Les éléments stables suffisent toujours dans la suite du développement des commentaires sur l'UN. Quand on connaît leur comportement, on sait décrire totalement l'évolution de la suite.

toutes les bonnes découpes. J. Conway a montré que, parmi tous les éléments, il n'y en a que 92 *(voir le tableau 2)* qui restent présents dans l'univers au cours de son évolution. Le Théorème chimique de J. Conway énonce qu'à partir d'un certain moment l'univers n'est composé que des 92 éléments (les éléments stables) et qu'à partir de ce moment (pour chaque nombre engendré à partir du 1), les 92 éléments stables sont présents dans l'Univers.

L'évolution de l'Univers à partir d'un certain moment n'est donc que la transformation des éléments stables les uns en les autres, selon des règles immuables *(détaillées sur le tableau 3)*. Une sorte de bouillonnement complexe, mais parfaitement réglé, détermine l'avenir des commentaires infinis sur l'UN.

La démonstration de ce premier résultat consiste simplement en la vérification des tableaux et en quelques raisonnements arithmétiques. Il ouvre cependant la porte, cette fois en utilisant des méthodes d'algèbre matricielle (triangulation de matrice, calcul de valeurs propres et de vecteurs propres), à la démonstration d'un second résultat que J. Conway appelle le Théorème arithmétique, qui indique des propriétés statistiques de l'évolution des commentaires sur l'UN.

Ce théorème, déjà évoqué, indique que la taille de l'univers augmente exponentiellement à une vitesse égale à 1,30357726903..., et que l'abondance des différents éléments tend vers certaines valeurs fixées non nulles.

Pour un million d'atomes, il y a par exemple, en moyenne, 91 790 atomes d'hydrogène, 27 d'arsenic, 102 d'uranium, 3 237 d'hélium.

Que se passe-t-il lorsque l'on part d'un nombre autre que «1»? Quelques éléments supplémentaires apparaissent – J. Conway les dénomme transuraniens – qui restent présents indéfiniment, mais leur taux d'abondance tend vers zéro, et donc seuls les 92 éléments restent présents avec des taux non négligeables (les mêmes que précédemment) ; l'expansion se fait encore exponentiellement avec le même taux, donnant un accroissement de 30,35 pour cent en moyenne à chaque étape.

Cette fois, Conway n'a pas pu détailler la démonstration, car, dit-il, elle est astronomiquement difficile et nécessite plusieurs dizaines de pages. Il attend qu'on lui en propose une solution simplifiée.

LES COMMENTAIRES CYCLIQUES

Récemment, sans connaître les résultats de J. Conway, Bernard Germain-Bonne, de l'Université de Lille, s'est posé une question nouvelle sur les suites de commentaires numériques.

Existe-t-il des suites numériques infinies qui, lorsqu'on en fait le commentaire, soient égales à elles-mêmes? Une telle suite serait son propre commentaire, comme, dans le cas fini, le nombre 22 est son propre commentaire (22 est la seule suite finie qui soit égale à son commentaire).

5. LES CYCLES DE BERNARD GERMAIN-BONNE

Voici les 500 premiers chiffres de trois nombres infinis qui sont le commentaire du commentaire du commentaire d'eux-mêmes. Le nombre *a* a pour commentaire *b* qui a pour commentaire *c* qui a pour commentaire *a*.

a = f(f(f(a))) =

3123211231132132211231131122211331121321232221123113112221131112311322311211
1311222112132113311213211221121332211231131122211311123113321112131221123113
1122211322311311222112111312211311123113322112132113212231121113112221121321
1321222113222122211211232221123113112221131112311332111213122112311311123112
1113311211131221121321131211132221123113112221131112311332211322311311222113
1112311332211211131221131211132211121312211231131112311211232221121321132132
21133122112231131122211211131221131112311332

f(a) = b = f(f(f(b))) =

1311121312211213211312111322211213211321322123211211131211121332211213211321
3221133112132113221321123113213221121113122123211211131221222112112322211213
2113213221133112132123123112111311222112132113213221132213211321322112311311
2221133112132123222112111312211312112213211231132132211211131221131211322113
3211322112211213322112132113213221133112132123123112111311222112132113311213
2112312321123113112221121113122113111231133221121321132132211331121321232221
13221321132132211331121321232221123113112221

f(f(a)) = c = f(f(f(c))) =

1113311211131122211211131221131112311332211211131221131211132211121312211231
1311123112112322211211131221131211132221232112111312211322111312211213211312
1113222112311311221112131221123113112211322112211213322112111312211312111322
2123211211131211121311121321123113213221121113122113121113222113221113122113
1211132221121321132132212321121113121112133221123113112221131112212211131221
1213211312111322211231131122211311122113222123122113222122211211232221121113
12211312111322212321121113121112131112132112

Bernard Germain-Bonne a démontré qu'il n'y avait que 4 cycles de longueur 3 et qu'il n'y avait aucun cycle d'une autre longueur.

B. Germain-Bonne a répondu non, mais il s'est alors posé la question de savoir s'il pouvait exister des suites numériques infinies (des nombres infinis, en quelque sorte) qui se commentent cycliquement les unes les autres : dans un cycle de période 3, la première serait le commentaire de la deuxième, qui serait le commentaire de la troisième qui serait le commentaire de la première.

L'étude minutieuse qu'il a menée (et qui l'a conduit, lui aussi, à développer une théorie des éléments analogue à celle de J. Conway) a donné la réponse suivante :

Seuls des cycles à trois éléments sont possibles, et il y a en quatre en tout et pour tout. On les obtient par la méthode suivante :

– On part de l'élément Zn, égal à 312 ;

– On calcule le commentaire à trois reprises ; cela donne Cu, puis Ni, puis Zn Co = 31232112, ce qui prolonge le mot de départ ;

– On calcule encore le commentaire trois fois ; cela donne Cu Fe, puis Ni Mn, puis Zn Co Cr Si, soit 312 32112311321322112, ce qui prolonge encore le mot de départ. Etc.

De proche en proche, on obtient une infinité de chiffres qui composent un mot infini qui est «le commentaire du commentaire du commentaire de lui-même».

Le second cycle est obtenu de la même façon en partant de Ho ; son début est Ho Gd Pm Ca Zn Ar Mn. Le troisième et le quatrième sont obtenus en faisant précéder les deux premiers de H = 22

Ces nombres infinis, qui sont exactement égaux au commentaire du commentaire du commentaire d'eux-mêmes, ne sont pas périodiques (jamais les mêmes chiffres ne se répètent dans le même ordre). Leurs décimales représentent donc des nombres irrationnels nouveaux et remarquables. Ils utilisent évidemment les 92 éléments de la chimie du monde numérique de J. Conway, et cela dans des proportions qui sont celles déjà calculées précédemment par J. Conway. Ces nombres infinis sont des mondes complets, stabilisés, autonomes, qui se connaissent parfaitement et qui contiennent en eux-mêmes tous les commentaires (numériques) qu'on peut faire sur eux.

Les commentaires ordonnés sont toujours cycliques

Les commentaires que nous avons envisagés jusqu'à présent sont des commentaires exhaustifs : à partir du commentaire, il est possible de reconstituer le texte original. En littérature, ce n'est en général pas le cas.

Changeons un peu les règles du jeu du commentaire numérique et écrivons le commentaire d'une suite de nombres, par exemple (9 3 1 2 1 9), en comptant le nombre de «0» s'il y en a, puis le nombre de «1» s'il y en a, etc., et écrivons dans cet ordre les résultats. Ici on obtient (2 1 1 2 1 3 2 9), qui lui-même peut se commenter en (3 1 3 2 1 3 1 9), etc. Que se passe-t-il alors? Y a-t-il encore expansion infinie pour ce nouveau type de commentaire simplificateur?

Le problème semble proche du précédent, mais en réalité il est bien plus simple. Hervé Lehning et, indépendamment, Victor Bronstein et Aviezri Fraenkel ont montré que, quel que soit le point de départ, une telle suite finissait toujours par donner un cycle : ces commentaires ordonnés sont donc toujours cycliques et ne donnent jamais lieu à une croissance infinie.

La suite (1) donne par exemple :
(1) (1 1) (2 1) (1 1 1 2) (3 1 1 2) (2 1 1 2 1 3) (3 1 2 2 1 3) (2 1 2 2 2 3) (1 1 4 2 1 3) (3 1 1 2 1 3 1 4) (4 1 1 2 2 3 1 4)(3 1 2 2 1 3 2 4) (2 1 3 2 2 3 1 4) (2 1 3 2 2 3 1 4)

Ce qui est même mieux qu'un cycle, puisque c'est un point fixe.

La suite partant de (6 7) donne rapidement un cycle d'ordre 3. Ce n'est pas un hasard, car Hervé Lehning a montré que seuls 1 2 et 3 pouvaient être des périodes. Mais, aussi puissant que soit ce résultat sur les cycles, il ne résout pas toutes les questions qu'on peut se poser, et je ne sais pas si quelqu'un a réussi à caractériser tous les points fixes, comme (2 1 3 2 2 3 1 4).

Jean-Paul Delahaye est professeur d'informatique à l'Université des sciences et technologies de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

V. Bronstein et A. Fraenkel, *On a Curious Property of Counting Sequences*, in *American Mathematical Monthly*, pp. 560-563, juin 1994.

J. Conway, *The Weird and Wonderful Chemistery of Audioactive Decay*, in *Open Problems in Communication and Computation* (T. Cover Ed.), Springer-Verlag, pp. 173-188, 1987.

M. Hilgemeir, *Die Gleichniszahlen-Reihe*, in *Bild der Wissenschaft*, n° 12, pp. 194-195, 1986.

H. Lehning, *Quelle est la meilleure preuve?*, in *Quadrature*, n° 11, pp.5-12, 1992.

B. Germain-Bonne, *Mots autodescriptifs et co-descriptifs*, Publication du Laboratoire d'analyse numérique de l'Université de Lille, n° 332, 1994.