

Voyageurs et baguenaudiers

JEAN-PAUL DELAHAYE

Le code de Gros-Gray est utile aux choses sérieuses et futiles.

Les physiciens s'interrogent : l'espace n'aurait-il pas plus de trois dimensions ? La relativité, en prenant en compte le temps, soutient qu'il n'y en a pas moins de quatre, et des théoriciens plus téméraires, armés d'arguments qui échappent au vulgaire, envisagent que nous vivions dans un espace à huit dimensions, voire onze.

Il devient donc urgent de résoudre le problème du voyageur de commerce en dimension n : des points étant donnés dans un espace de dimension n , comment organiser le plus court trajet

qui passe par tous les points ? En suivant l'illustre exemple du mathématicien à qui l'on demandait de calculer le volume d'une vache et qui commençait son raisonnement par « supposons que la vache soit sphérique... », nous nous limiterons au cas des sommets d'un parallélépipède rectangle : quel est le plus court chemin qui passe par tous les sommets d'un tel parallélépipède à n dimensions ?

Un rectangle a quatre sommets. Un parallélépipède, 8, et, plus généralement, un parallélépipède à n dimensions en possède 2^n . Nous noterons ces sommets

00...00, 00...01, 00...10, ..., 11...1 (toutes les suites finies de n symboles "0" ou "1").

Les longueurs des côtés du parallélépipède sont classées de la plus grande à la plus petite. Le problème est maintenant parfaitement bien posé. En imposant de partir du sommet 00...0 (ce qui n'enlève aucune généralité au problème), celui-ci n'admet qu'une seule solution.

La solution est donnée par une suite de sommets qui constituent ce qu'on appelle le code de Gros-Gray, dont le nom provient de Louis Gros et de Frank Gray. Gros était clerc de notaire à Lyon ; il publia en 1872 un opuscule où ce code était présenté pour la première fois en lien avec un casse-tête sur lequel nous reviendrons. Gray travaillait aux laboratoires Bell, il réinventa ce code, et en livra une étude détaillée dans les années 1930 ; il se voit parfois injustement attribuée la paternité exclusive de l'invention.

On sait prouver que le code de Gros-Gray donne le plus court trajet du voyageur de commerce sur le parallélépipède rectangle : ce trajet est représenté sur la figure 2. Le principe de déplacement du voyageur n'est complexe qu'au premier abord : examiné attentivement, il exhibe des régularités fascinantes sur lesquelles nous allons nous attarder.

DES ZÉROS ET DES HUNS

À chaque entier n , nous associons sa notation en binaire $b(n)$ et son code de Gros-Gray que nous noterons $g(n)$. Voici quelques exemples :

$$\begin{aligned} b(0) &= 0 & g(0) &= 0 \\ b(1) &= 1 & g(1) &= 1 \\ b(2) &= 10 & g(2) &= 11 \\ b(3) &= 11 & g(3) &= 10 \\ b(4) &= 100 & g(4) &= 110 \\ b(5) &= 101 & g(5) &= 111 \\ b(6) &= 110 & g(6) &= 101 \\ b(7) &= 111 & g(7) &= 100 \end{aligned}$$

Un tableau plus complet se trouve sur la figure 1. La suite des codes de Gros-Gray peut être définie de bien des façons dont on prouve, avec un peu de patience qu'elles sont équivalentes ; chacune de ces caractérisations sera utile.

La première définition indique comment passer d'un code de Gros-Gray au suivant : on change un seul chiffre (1 en 0 ou 0 en 1), qui est :

- le dernier si le nombre de « 1 » est pair,
- celui à gauche du « 1 » le plus à droite, sinon.

En appliquant cette règle, 110 est suivi de 111, qui a pour suivants 101, 100, puis 1100. Cette règle permet au voyageur d'organiser sa tournée : il n'a d'ailleurs même pas besoin de se souvenir de ce qu'il a fait auparavant, sa position seule lui donnant toutes les informations sur le prochain point où il doit se rendre.

1. LE CODAGE DE GROS-GRAY DES ENTIERS

	CODE BINAIRE	CODE GROS-GRAY	PLACE DES BITS MODIFIÉS	EMPLACEMENTS DES 1
0	00000	00000	654321	654321
1	00001	00001		
2	00010	00011		
3	00011	00010		
4	00100	00110		
5	00101	00111		
6	00110	00101		
7	00111	00100		
8	01000	01100		
9	01001	01101		
10	01010	01111		
11	01011	01110		
12	01100	01010		
13	01101	01011		
14	01110	01001		
15	01111	01000		
16	10000	11000		
17	10001	11001		
18	10010	11011		
19	10011	11010		
20	10100	11110		
21	10101	11111		
22	10110	11101		
23	10111	11100		
24	11000	10100		
25	11001	10101		
26	11010	10111		
27	11011	10110		
28	11100	10010		
29	11101	10011		
30	11110	10001		

Qu'un seul chiffre soit changé à chaque étape explique partiellement que le code de Gros-Gray donne la solution du voyageur de commerce en dimension n : ne changer qu'un seul chiffre signifie que les trajets qu'emprunte le voyageur de commerce sont des arêtes du parallélépipède, il évite donc d'emprunter les diagonales d'un rectangle, qui, on le sait, sont plus longues que les côtés.

Qu'un seul chiffre soit changé à chaque étape est aussi ce qui fait l'intérêt du code en électronique et en informatique, où il est utilisé dans la conception de certains circuits et pour l'exploitation

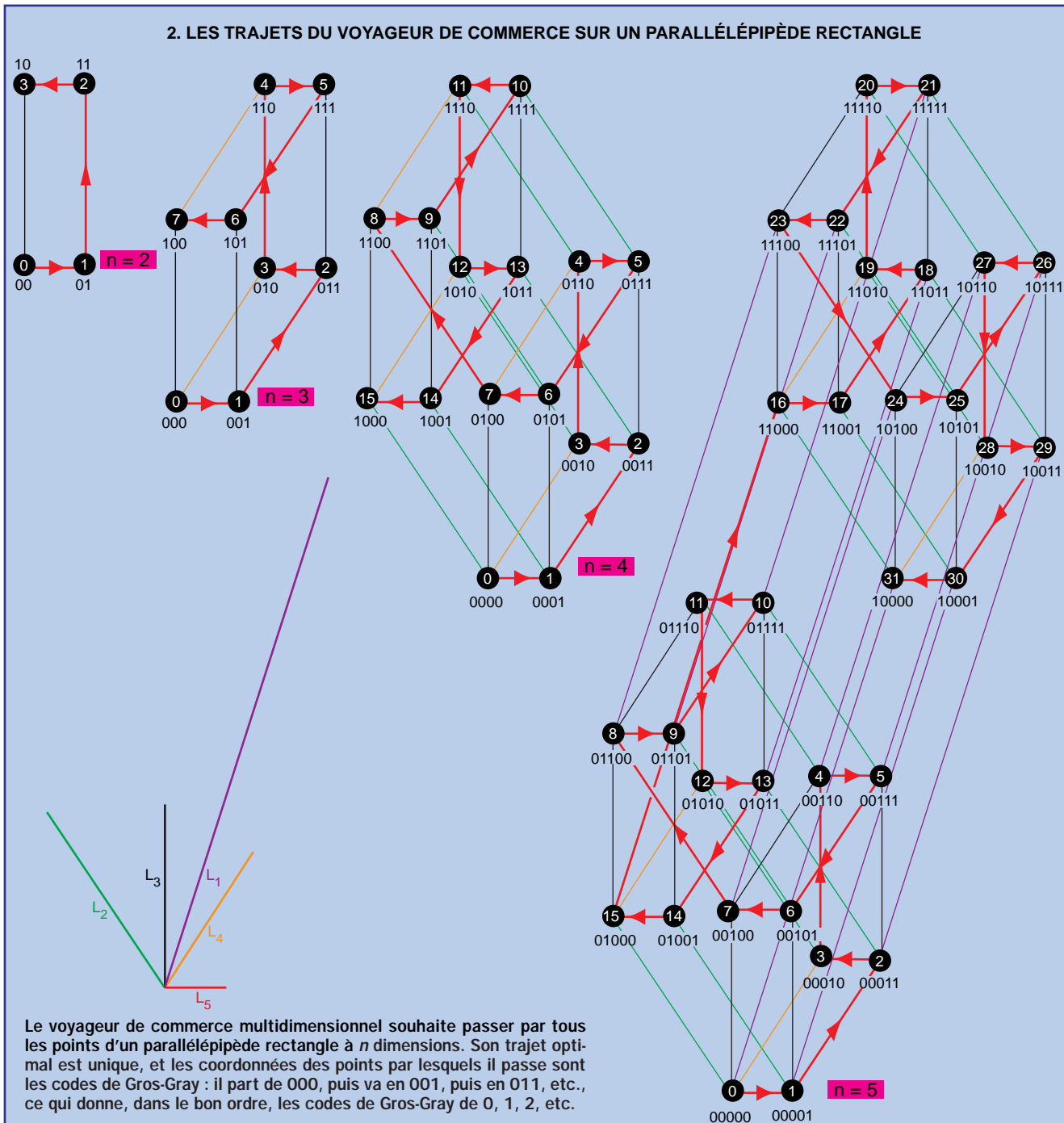
des ordinateurs parallèles : on place les unités de calcul de la machine sur un réseau correspondant à un hyper-cube, et le code de Gros-Gray fournit une numérotation des sommets de cet hyper-cube permettant le contrôle et l'optimisation des communications.

D'autres codes, dénommés codes continus, ont la propriété que le passage d'un nombre au suivant ne change qu'un seul chiffre ; toutefois, ils conduisent à des chemins plus longs et d'autre part le code Gros-Gray est le plus élégant de tous les codes continus, comme le montrent ses autres caractérisations.

RÉCURRENCE, COPIE-AUGMENTÉE ET FRACTALS

La deuxième caractérisation procède par récurrence :

- le code de Gros-Gray de 0 est «00» (ce qui pour nous est équivalent à «00» ou «000» ou «0000», etc. ; d'une manière générale, nous ne tenons pas compte des «0» les plus à gauche d'un code (comme en arithmétique nous ne prenons pas en compte les «0» devant un nombre) ;
- si nous connaissons le code de Gros-Gray des 2^n premiers entiers, celui des 2^n suivants est obtenu en les reprenant



en ordre inverse et en faisant précéder chacun des codes d'un «1».

Exemple : à partir des 4 premiers codes 00, 01, 11, 10, on obtient les quatre suivants en inversant l'ordre 10, 11, 01, 00 et en ajoutant un «1» devant chaque code : 110, 111, 101, 100. À cause de cette propriété, on dit que le code de Gros-Gray est un code réfléchi.

Cette caractérisation donne un petit air fractal au parcours du voyageur de commerce : le chemin qu'il suit dans la seconde moitié du trajet est, à l'envers et translaté, le même que celui qu'il a parcouru dans la première moitié du trajet ; mais, dans le second quart, le chemin parcouru est aussi, à l'envers et translaté, le même que celui parcouru dans le premier quart ; etc. (voir la figure 2). D'ailleurs, sur un parallélépipède, dans un espace à une infinité de dimensions dont les côtés seraient de longueur $1/2^n$, le trajet du voyageur de commerce serait effectivement une courbe fractale.

La troisième caractérisation indique comment connaître le numéro du chiffre

qui change quand on passe d'un code au suivant : le code de Gros-Gray de n ne change du précédent que par un seul chiffre dont le numéro (en comptant à partir de la droite) est fixé par la suite : 1213121412131215...

Cette suite, que l'on dénomme suite de la copie-augmentée, s'obtient de la façon suivante : on part de la suite «1», on la prolonge en la recopiant exactement sauf le dernier élément qu'on augmente de 1, et on recommence : de «1», on passe à «12», puis à «1213», puis à «12131214», etc. Dans la figure 1, on a représenté en rouge les chiffres qui changent ainsi d'un code au suivant : leur dessin, très régulier, fait apparaître, là encore, une forme fractale.

La quatrième caractérisation indique la description explicite de tous les chiffres. Les derniers chiffres des codes de Gros-Gray suivent le motif 01100110011, etc. Les avant-derniers chiffres des codes de Gros-Gray suivent le motif 001111000011110000... etc. Les chiffres numéro i suivent (en partant de la fin) le

motif 2^i fois le «0», puis périodiquement 2^{i+1} le chiffre «1», 2^{i+1} le chiffre «0».

Cette définition est la plus commode pour généraliser dans d'autres bases que deux les codes de Gros-Gray : en base trois, on fait varier le dernier chiffre selon le motif 0122100122100..., l'avant-dernier en reprenant le même motif où l'on répète trois fois chacun des chiffres, soit 00011122222111000000111... etc.

Ces codes des Gros-Gray en base p donnent, là aussi, la solution au problème du voyageur de commerce sur un réseau parallélépipédique comportant p points dans chaque direction.

DÉRIVATION ET INTÉGRATION

Les deux dernières caractérisations sont les plus importantes en pratique, car elles indiquent comment passer de la notation binaire au code de Gros-Gray correspondant, et inversement.

La règle de passage de la notation binaire au code de Gros-Gray est amusante. Le code de Gros-Gray de l'entier n s'obtient en prenant le code binaire de n et en le dérivant :

- les deux notations ont le même premier «1» ; ensuite,
- le digit numéro i en partant de la gauche est 0 si les chiffres numéro $i-1$ et i du code binaire sont égaux, sinon c'est un 1 (il s'agit bien de l'opération analogue à la dérivation lorsque l'on travaille uniquement avec des «0» et des «1»).

Exemple. L'entier 14 s'écrit 1110 en notation binaire (car $14 = 8 + 4 + 2$), ce qui en dérivant donne le code de Gros-Gray de 14 : 1001 (le deuxième chiffre est un «0», car le premier et le second chiffre de l'écriture binaire de 14 sont égaux ; le quatrième chiffre est un «1», car le troisième et le quatrième chiffre de l'écriture binaire de 14 sont différents.)

Cette méthode de calcul est très utile au voyageur de commerce qui, ne sachant pas où il est, mais se souvenant du nombre n de points qu'il a visités, se demande où il doit aller. Il écrit n en base 2, le dérive et sait alors où il est et donc où il doit se rendre.

La règle de passage du code de Gros-Gray à la notation binaire utilise bien sûr le procédé inverse de la dérivation : l'intégration. La notation binaire b de l'entier n s'obtient en intégrant le code de Gros-Gray g de l'entier n , ce qui précisément signifie que le chiffre numéro i de b en comptant à partir de la gauche est la somme, modulo 2, des chiffres de g jusqu'au chiffre numéro i .

Exemple. $g = 101100$ est le code de Gros-Gray de $b = 110111$, qui est l'écriture binaire de $32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 55$ (le quatrième chiffre de b est un «1», car

3. LE CASSE-TÊTE SPIN-OUT

POSITION DE DÉPART : 111111 CODE DE GROS-GRAY DE 1010101 = 85

CE QU'IL FAUT FAIRE :

APRÈS LE 1^{er} MOUVEMENT CORRECT : 111110 CODE DE GROS-GRAY DE 1010100 = 84

APRÈS LE 2^e MOUVEMENT CORRECT : 1111010 CODE DE GROS-GRAY DE 1010011 = 83
ON POURSUIT JUSQU'À 0000000

CE QU'IL NE FAUT PAS FAIRE :

POSITION ACCESSIBLE À PARTIR DE LA POSITION DE DÉPART : 1111101
CODE DE GROS-GRAY DE 1010110 = 86
SI L'ON POURSUIT AINSI, ON ABOUTIT À L'IMPASSE 123 (CODE DE GROS-GRAY 1000000)

Procurez-vous
le casse-tête *Spin-out*,
en vente à la boutique
Pour la Science,
voir pages 30 et 31.

les quatre premiers chiffres de g sont 1011, dont la somme est 3, ou 1 modulo 2).

ON S'AMUSE AUX LABORATOIRES BELL

Cette dernière caractérisation est appréciée du voyageur de commerce qui ne se souvient plus combien de points il a visités, et, plus important, va être la clef de l'analyse du nouveau casse-tête appelé *Spin-out*, inventé par William Keister autrefois ingénieur des Laboratoires *Bell* et aussi ancien collègue de Frank Gray.

Ce casse-tête (voir la figure 3) se présente sous la forme d'une règle avec une partie coulissante qu'il faut faire sortir ce que des boutons pivotants semblent empêcher, car ils se bloquent les uns les autres et coincent le casse-tête.

Au départ, tous les boutons sont verticaux et l'on comprend qu'il faudrait les placer tous à l'horizontale pour sortir la partie coulissante. Le bouton le plus à droite peut toujours être tourné (lorsqu'on pousse la partie coulissante centrale le plus à gauche possible). Un peu d'attention montre que le bouton juste à gauche du bouton en position verticale le plus à droite peut lui aussi pivoter (lorsqu'on pousse la partie coulissante centrale le plus à droite possible) et qu'en fait c'est le seul qui puisse aussi l'être (en plus de celui le plus à droite).

Ces remarques étant faites, le casse-tête est résolu ! En effet, en notant «1» les boutons verticaux et «0» les boutons horizontaux, nous venons de retrouver la première caractérisation de la suite des codes de Gros-Gray : un seul chiffre peut varier à la fois, et c'est soit le dernier, soit celui à gauche du «1» le plus à droite.

Les positions du casse-tête donc sont celles (avec la notation proposée) que le voyageur de commerce doit emprunter sur son parcours. Le casse-tête est ainsi conçu pour qu'on ne puisse pas faire autre chose que se déplacer sur le trajet optimal du voyageur de commerce multidimensionnel. Concrètement, que faut-il faire, et combien de mouvements allons-nous devoir effectuer avant de sortir la partie coulissante du casse-tête ?

Ce que nous savons du code de Gros-Gray donne la réponse. Au départ, nous sommes en position 111111 dont le numéro en binaire est (par intégration) 1010101, c'est-à-dire $64 + 16 + 4 + 1 = 85$. Notre trajet, si nous nous y prenons au

mieux, comportera donc 85 mouvements qui consisteront à passer au code de Gros-Gray 84 (84 s'écrit 1010100 en binaire et, par dérivation, a donc pour code de Gros-Gray : 1111110), puis 83 (qui a pour code de Gros-Gray 1111010), etc. Nous savons donc exactement ce qui nous reste à faire et le temps qu'il nous faudra. L'erreur à ne pas commettre serait de passer à la configuration 86 (dont le code de Gros-Gray est 11111101) et de poursuivre vers 87, ce qui nous conduirait après 36 autres mouvements à la configuration 123 (1000000), qui est une impasse.

C'est d'ailleurs la seule erreur possible pour quelqu'un de systématique qui applique la règle «déplacer alternativement le dernier bouton et le seul autre qui peut l'être». Cette méthode, que certaines personnes découvrent empiriquement permet de résoudre le casse-tête sans rien comprendre à ce qu'on fait, avec une probabilité de 50 pour cent (puisque l'on risque de partir dans la mauvaise direction). En voulant rendre le parcours

long, le concepteur du casse-tête l'a rendu assez facile, car il a dû limiter les possibilités de choix à chaque étape. Considéré de manière abstraite, le casse-tête ne propose qu'un déplacement le long d'une ligne – le trajet du voyageur de commerce – dont l'une des extrémités est une impasse et l'autre, la solution.

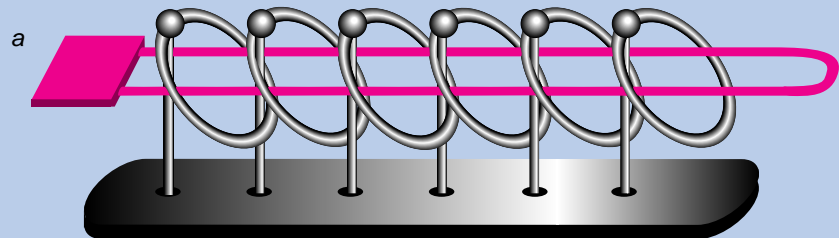
Des variantes sont faciles à imaginer, que vous pourrez vous amuser à réaliser en bois ou en carton. Voici comment obtenir certaines de ces variantes : déplacez l'encoche du bas de la règle d'une ou plusieurs largeurs de bouton, ou bien (dans le but de multiplier les choix à chaque étape) faites plusieurs encoches. Un lecteur saura-t-il faire l'analyse mathématique de ces variantes ?

LE BAGUENAUDIEN, AUSSI VIEUX QUE LE MONDE ?

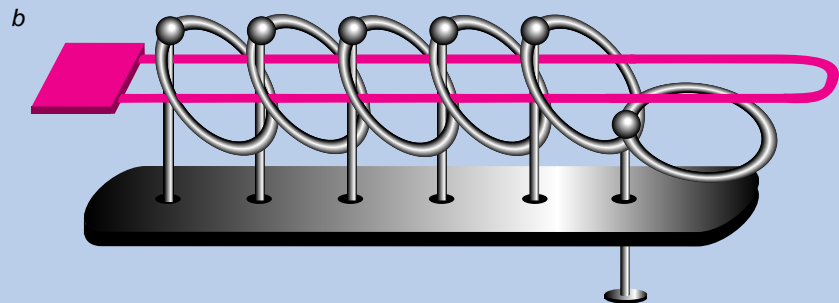
Les connaisseurs de casse-tête mathématiques auront soupçonné une analogie entre le *Spin-out* de Keister et le très ancien baguenaudier (voir la figure 4)

4. LE BAGUENAUDIEN

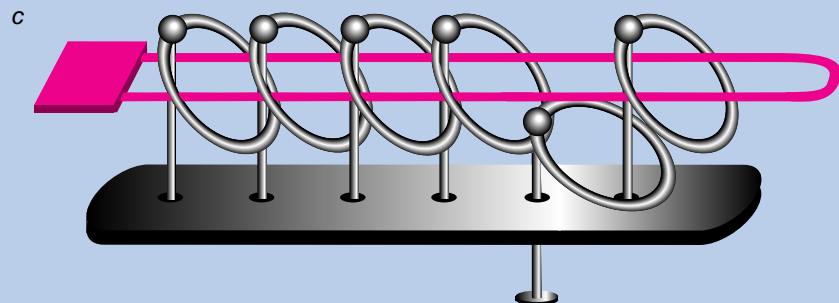
LES DEUX MOUVEMENTS (b) et (c) POSSIBLES D'UN BAGUENAUDIEN À 6 ANNEAUX À PARTIR DE LA POSITION DE DÉPART (a).



POSITION DE DÉPART : 111111 EN CODE DE GROS-GRAY, 101010 = 42 EN CODE BINAIRE



POSITION CORRESPONDANT À : 111110 EN CODE DE GROS-GRAY, 101011 = 43
EN CODE BINAIRE : ON EST PARTI DANS LA MAUVAISE DIRECTION.



POSITION CORRESPONDANT À : 111101 EN CODE DE GROS-GRAY, 101001 = 41
EN CODE BINAIRE : IL FAUT CONTINUER PAR LÀ JUSQU'À 000000

aussi appelé *meleda puzzle*, Talamodspel, ou anneaux chinois. Une légende en attribue l'invention au soldat Hung Ming (181-234), qui en aurait confié la résolution à son épouse pour l'occuper pendant qu'il était parti faire la guerre. La première mention du baguenaudier est faite au milieu du XIV^e siècle sous la plume du mathématicien Jérôme Cardan (1501-1576, plus connu pour sa méthode de résolution des équations du troisième degré et pour son invention des cardans), qui décrit le baguenaudier dans son *De subtilitate libri XXI* paru à Nuremberg en 1550, où il précise : «Cela de soi est inutile ; toutefois on peut le transférer aux serrures artificieuses de coffres.»

Effectivement, en Norvège, des sacs de voyage ont été équipés d'une fermeture utilisant le baguenaudier : on peut craindre que ces serrures ne se soient révélées agaçantes, par exemple lorsque leur propriétaire, pris d'une soudaine envie d'éternuer, désire y saisir un mouchoir.

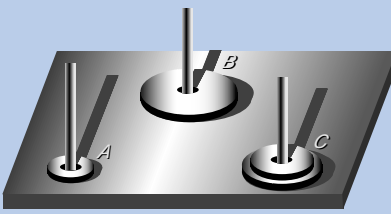
Pour résoudre le baguenaudier, l'analyse proposée pour le *Spin-out* s'applique presque mot à mot. On constate d'abord que le dernier anneau peut toujours être abaissé ou levé et que le seul autre anneau qui accepte de se déplacer est celui qui précède l'anneau levé le plus à droite (et cela à condition d'avoir tiré la double tringle centrale le plus à gauche possible). Cela suggère de coder la position du baguenaudier, en associant un «1» à tout anneau levé et un «0» à tout anneau baissé. La position de départ dans le cas d'un baguenaudier à 7 anneaux est donc 1111111, qui est le code de Gros-Gray de l'entier qui, en binaire, s'écrit 1010101, qui est 85. La suite est la même que pour le *Spin-out* : à condition de partir dans la bonne direction, vous aboutirez en 85 étapes, et aucune méthode ne peut raccourcir les manipulations nécessaires à la libération de la double tringle centrale. Si vous partez dans la mauvaise direction, vous aboutirez à une impasse correspondant à la position 1000000, qui est le code de Gros-Gray de l'entier 123, et vous serez alors obligé de repartir en arrière.

Notons deux avantages du *Spin-out* sur le baguenaudier : la commodité des manipulations et la facilité à en imaginer des variantes. Même les casse-tête millénaires sont perfectibles !

Une fois parti dans la bonne direction, la seule règle à appliquer est : «déplacer alternativement l'anneau le plus à droite et l'anneau mobile le plus à gauche (qu'on identifie en tirant au maximum la double tringle centrale)».

L'anneau que l'on déplace, d'après ce que nous avons dit concernant le

5. LES TOURS DE HANOÏ



SOLUTION OPTIMALE EN 15 MOUVEMENTS
DANS LE CAS DE QUATRE DISQUES

POSITION DES DISQUES	DÉPLACEMENTS À FAIRE	DISQUES DÉPLACÉS
A B C		
[4321, ,]	AB	1
[432, 1,]	AC	2
[43, 1, 2]	BC	1
[43, , 21]	AB	3
[4, 3, 21]	CA	1
[4 1, 3, 2]	CB	2
[4 1, 32,]	AB	1
[4, 321,]	AC	4
[, 321, 4]	BC	1
[, 32, 4 1]	BA	2
[2, 3, 4 1]	CA	1
[21, 3, 4]	BC	3
[21, , 43]	AB	1
[2, , 1, 43]	AC	2
[, , 1, 432]	BC	1
[, , , 4321]		

5. Dans cette solution, on reconnaît la suite copie-augmentée déjà rencontrée dans le voyageur de commerce à n dimensions. Récemment, on a prouvé que la suite des déplacements ne se répète jamais deux fois consécutivement (quel que soit le nombre de disques envisagé). La règle «déplacer alternativement le disque le plus petit (de A vers B, de B vers C, ou de C vers A), puis un autre disque» suffit pour trouver la solution optimale qui, dans le cas de n disques, est une succession de $2^n - 1$ déplacements.

code de Gros-Gray, a pour numéro (en numérotant de droite à gauche) l'entier correspondant de la suite de la copie-augmentée 1213121412131215... qu'on parcourt à l'envers à partir de son 85^e élément.

DES ANNEAUX CHINOIS AUX TOURS DE HANOÏ

Cette suite donne d'ailleurs une solution à un autre casse-tête célèbre et ancien : les tours de Hanoï. Il s'agit de déplacer une pile de disques de taille décroissante en n'utilisant que trois emplacements A, B et C (formant un triangle équilatéral) et en s'imposant à chaque étape de ne jamais poser un disque que sur un disque plus grand. La solution optimale, qui demande $2^n - 1$ étapes, consiste à déplacer alternativement le disque de taille 1 (le plus petit) dans le sens des aiguilles d'une montre, puis celui de taille 2 (le second en taille), puis le premier (dans le sens des aiguilles d'une montre), puis le troisième, etc.,

en suivant le schéma indiqué par la suite copie-augmentée 12131214...

Ceux qui trouvent que la suite de la copie-augmentée est trop compliquée peuvent retenir la solution suivante, encore plus courte et plus simple (analogue à celles énoncées plus haut pour le *Spin-out* et le baguenaudier) : «déplacer alternativement le disque le plus petit dans le sens des aiguilles d'une montre, puis le seul disque disponible d'après les règles».

Un résultat récent dû aux mathématiciens J.-P. Allouche, D. Astoorian, J. Randall et J. Shallit indique une propriété remarquable de la suite des mouvements décrivant la solution optimale dont nous avons dit qu'elle était constituée de $2^n - 1$ déplacements. Il y a six mouvements possibles à chaque étape : prendre le disque en A et le mettre en B, prendre le disque en B et le mettre en C, etc., qu'on désigne par AB, BC, CA, BA, CB, AC. Dans le cas de quatre disques, la solution optimale consiste en la suite de déplacements AB AC BC AB CA CB AB AC BC BA CA BC AB AC BC. Les quatre mathématiciens ont prouvé qu'aussi grand que soit le nombre de disques considérés, les déplacements décrivant la solution optimale ne se répètent jamais deux fois consécutivement : vous n'aurez jamais deux fois de suite AB, ni deux fois de suite AB AC, etc. On n'a jamais épuisé le pouvoir d'inspiration des bons casse-tête mathématiques !

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

J.-P. ALLOUCHE, D. ASTOORIAN, J. RANDALL et J. SHALLIT, *Morphisms, Squarfree Strings, and the Tower of Hanoi Puzzle*, in *The American Mathematical Monthly*, pp. 651-658, 1994.

A. DELEDICQ, *Mathématiques buissonnières*, éditions CEDIC, 1975.

P. van DELFT et J. BOTERMANS, *Creative Puzzles of the World*, Key Curriculum Press. Trad. française : *Mille casse-tête du monde entier*, éditions du Chêne, 1977.

A. DEWDNEY, *Le Yin et le Yang, récursivité et itérations, les Tours de Hanoi et le Baguenaudier*, in *Récréations informatiques, Pour La Science*, février 1985.

E. LUCAS, *Récréations mathématiques*, tome 1, Paris 1891. Réédition Librairie Scientifique Blanchard, 1992.

Ian STEWART, *Four Encounters with the Sierpinski's Gasket*, in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 17, n° 1, pp. 52-64, 1995.