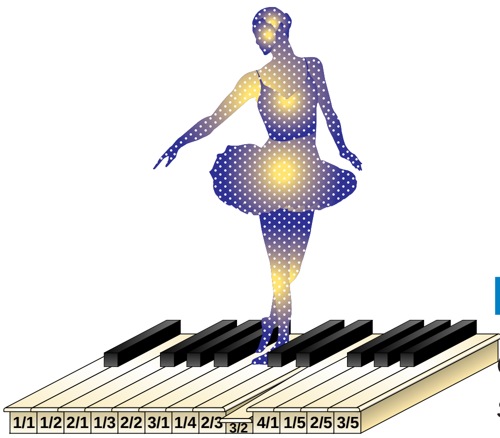


Négligeable, mais troublant

JEAN-PAUL DELAHAYE

Certains ensembles infinis et partout denses sont négligeables... et ce n'est pas un paradoxe.

Le point n'a pas d'épaisseur : en enlevant successivement des points à une droite, nous ne la vidons jamais. Nous pouvons même en enlever 1 000 milliards sans y créer de trou véritable : un être se déplaçant dans ce qui reste, en faisant des pas aussi petits que l'on veut, pourra toujours aller de n'importe quel point à n'importe quel autre *(voir la figure 1)*.

C'est seulement quand nous enlevons un intervalle complet à une droite que le déplacement des êtres aux trop petites jambes est impossible. En ôtant par exemple l'intervalle [–1, +1] (tous les nombres compris entre –1 et +1), nous interdisons le passage de la partie positive à la partie négative à un marcheur dont les pas sont de longueur inférieure à 2, car il ne peut franchir le trou central, trop large.

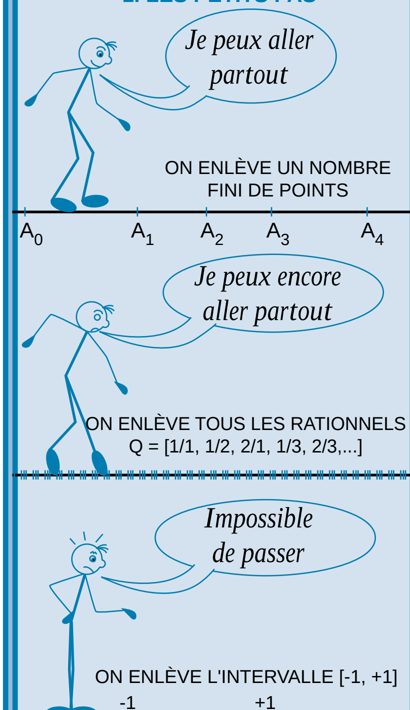
Même la suppression d'un ensemble infini, comme l'ensemble des nombres rationnels (quotients de deux entiers), ne gêne pas la démarche à petits pas des êtres minuscules. Aussi n'est-ce pas la finitude ou l'infinitude qui permet d'élucider le problème : d'autres notions sont nécessaires pour étudier quels sont les trous négligeables de l'ensemble des nombres réels. Quelles sont ces notions? Pouvons-nous examiner ce qui reste des ensembles «quand on leur a presque tout enlevé»?

Le domaine des mathématiques, dénommé topologie de la droite réelle ou théorie du continu, s'est constitué pour traiter ce sujet. Cette théorie est troublante : alors que tout s'y développe de manière parfaitement rationnelle, le visiteur s'y trouve vite confronté à des situations presque paradoxales où l'intuition hésite et vacille.

La crainte de tomber sur des contradictions et l'idée préconçue que la compréhension de l'infini pris comme un tout (ce qu'on appelle l'infini actuel) était réservée à Dieu, ont longtemps paralysé les mathématiciens. Ce n'est qu'au XIXe siècle que Bernhard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831-1916) et Georg Cantor (1845-1918) ont découvert que l'on peut classer et comparer les sous-ensembles infinis de l'ensemble des nombres réels sans rencontrer de contradictions. Ce fut un émerveillement qui bouleversa les mathématiciens et en troubla gravement certains (Cantor est mort fou). Cela fait déjà un siècle que nous avons pénétré cet univers dangereux, et nous n'avons pas rencontré de paradoxes fatals. Après une période d'instabilité et de doute au début du XXe siècle – période appelée «crise des fondements» –, les mathématiciens ont mis au point une théorie des ensembles qui apparaît inébranlable et sert de support à la topologie.

Est-il néanmoins si sûr que tout soit bien résolu? Certains logiciens et philosophes soutiennent que nous sommes toujours au bord du précipice. L'heuristique de Borel que nous allons présenter et que les résultats récents de mathématiques expérimentales rendent vraisemblable est une des marques flagrantes de cette étrangeté du monde de la topologie.

1. LES PETITS PAS



Si on enlève à la droite un nombre fini de points, aussi petits que soient les pas qu'on m'autorise à faire, je peux encore me déplacer sur tout ce qui reste. Si on enlève tous les nombres rationnels à la droite, je peux encore me déplacer partout, mais si on enlève l'intervalle [–1, +1], avec des pas plus petits que 2, je reste coincé dans la partie où je me trouve. Même en enlevant beaucoup de points à une droite, on ne fait pas toujours un vrai trou.

Le négligeable

L'heuristique de Borel se fonde sur la notion d'ensemble négligeable (ou ensemble de mesure nulle). Par définition, un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels est négligeable si on peut l'enfermer dans une suite – finie ou infinie – d'intervalles dont la longueur totale est aussi petite qu'on veut. Cette définition a été formulée pour la première fois en 1881 par A. Harnack dans un travail sur l'intégrale de Riemann, mais c'est Borel, en 1894, qui établira la théorie complète des ensembles mesurables.

Un point A à lui seul est un ensemble négligeable, car on peut l'enfermer dans l'intervalle [A –1/100, A +1/100] qui a pour longueur 1/50 (la longueur de l'intervalle [a, b] des nombres compris entre a et b est b–a). En prenant 1/1 000 à la place de 1/100, on enfermerait A dans un intervalle de longueur 1/500, et finalement, quelle que soit la longueur L positive qu'on se donne, A peut être enfermé dans un intervalle de longueur L : [A-L/2, A + L/2]. Un ensemble fini de points, par exemple

A_1, A_2, ...A_l, est aussi un ensemble négligeable, car on peut enfermer chaque point au centre d'un intervalle de longueur aussi petite que l'on désire, et la longueur totale sera aussi petite qu'on le souhaite.

Et les ensembles infinis ? Prenons un ensemble infini de points numérotés par les nombres entiers A_0, A_1, A_2, A_p,... Un tel ensemble est un ensemble infini dénombrable, et l'on sait que l'ensemble des nombres rationnels est un ensemble infini dénombrable *(voir la figure 2)*. Un tel ensemble est-il négligeable ? Oui ! Voyons pourquoi. Nous allons d'abord enfermer l'ensemble de tous les points A_i dans une suite d'intervalles de longueur totale 2. Pour cela, nous prendrons l'intervalle $[A_0 - 1/2, A_0 + 1/2]$ qui contient A_0, puis $[A_1 - 1/4, A_1 + 1/4]$ qui contient A_1, puis $[A_2 - 1/8, A_2 + 1/8]$ qui contient A_2, etc. La longueur du premier intervalle est 1, la longueur du second est 1/2, la longueur du troisième est 1/4, etc. Au total, la longueur cumulée de tous les intervalles qui enferment les A_i est donc 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + somme infinie qui vaut exactement 2. Pour nous persuader que 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + = 2, nous calculons : 1 + 1/2 = 2 – 1/2 ; 1 + 1/2 + 1/4 = 2 – 1/8, 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 2 – 1/16, etc. L'écart avec 2 diminue de plus en plus ; à l'infini, il est nul.

Il est donc possible d'enfermer tout l'ensemble infini des A_i dans une suite d'intervalles de longueur totale 2. Si nous réduisons maintenant la longueur de tous les intervalles d'un facteur 100 avec les points A_i toujours au centre de chacun, la longueur cumulée des intervalles est 100 fois plus petite que précédemment, c'est-à-dire 2/100 = 1/50. Le procédé de rétrécissement est général, et nous pouvons donc construire une suite d'intervalles qui enfermera tous les A_i et dont la somme des longueurs sera 1/500, ou 1/500 000, ou n'importe quel nombre aussi petit que nous le souhaitons. Cela signifie exactement que l'ensemble infini des A_i est négligeable.

Ce n'est pas troublant si nous pensons par exemple à $A_i = i$, car cela signifie que l'ensemble des nombres entiers est une partie négligeable des nombres réels, ce que notre intuition nous suggérait déjà. En revanche, le résultat est beaucoup plus troublant quand A_i est l'ensemble des nombres rationnels.

Alors que les nombres rationnels sont partout en nombre infini (entre deux nombres réels, il y a toujours une infinité de nombres rationnels, *voir la figure 2b)*, il est possible de les enfermer tous dans une suite d'intervalles dont la longueur totale est 1/1 000. Cela semble paradoxal : l'ensemble des nombres rationnels, quoique infini et partout dense (au voisinage d'un nombre réel, il y a un nombre

2. INFINI DÉNOMBRABLE ET PARTOUT DENSE

(a) L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable (c'est-à-dire peut être mis en correspondance terme à terme avec l'ensemble des entiers).

On prend les fractions irréductibles dont la somme du numérateur et du dénominateur fait 2. Il n'y a que 1/1, on l'associe à l'entier 0. On prend ensuite toutes les fractions irréductibles dont la somme du numérateur et du dénominateur fait 3. Il y a 2/1 et 1/2. On les associe à 1 et 2. Etc.

1/1	2/1	1/2	3/1	1/3	4/1	3/2	2/3	1/4
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Dans cette liste, tout nombre rationnel positif apparaît. Les nombres rationnels constituent un ensemble infini dénombrable.

En revanche, Cantor a découvert que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable : c'est un infini plus gros. Il est impossible de numéroter les réels avec les entiers, comme nous venons de le faire pour les rationnels.

(b) L'ensemble des nombres rationnels est partout dense dans *R*.

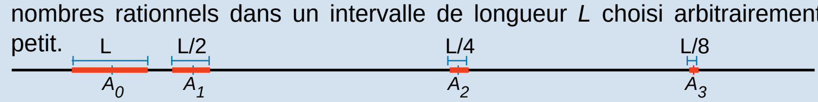
Entre deux nombres réels *a, b* quelconques, il y a toujours un nombre rationnel. En effet, si *a* et *b* sont différents, leurs développements décimaux sont différents à partir d'un certain chiffre, par exemple : *a* = 0,183466345..., *b* = 0,183472128... Le rationnel 0,18347 = 18347/100000 est entre *a* et *b*.

Entre deux nombres réels différents, il y a une infinité de nombres rationnels ; ici, on pourrait prendre 0,18347 ; 0,183472 ; 0,1834721 ; 0,183472128.

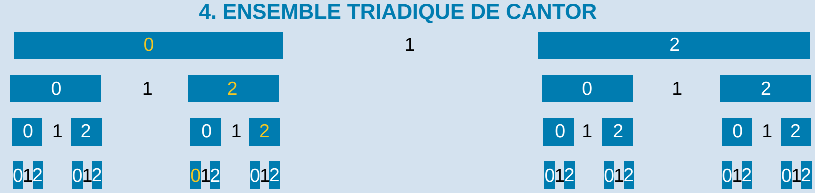
3. ENSEMBLES NÉGLIGEABLES

Un ensemble est négligeable si on peut le recouvrir avec des intervalles dont la longueur totale est aussi petite qu'on le veut. Ainsi, l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5} est négligeable .

L'ensemble Q des nombres rationnels est négligeable, car, en utilisant des intervalles de longueur *L*/2, *L*/4, *L*/8, etc., on peut enfermer tous les nombres rationnels dans un intervalle de longueur *L* choisi arbitrairement petit.



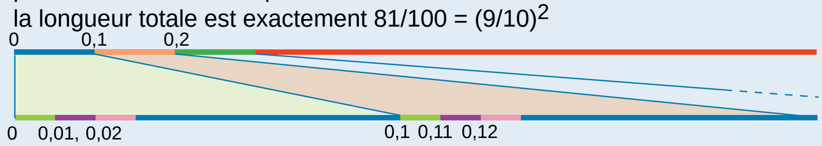
4. ENSEMBLE TRIADIQUE DE CANTOR



L'ensemble triadique de Cantor s'obtient en partant de l'intervalle [0,1] auquel on enlève le tiers médian. On enlève à nouveau le tiers médian à chacun des deux intervalles qui restaient, puis on recommence indéfiniment. Ce qui reste à l'infini est non dénombrable et négligeable. L'ensemble de Cantor est l'ensemble de nombres dont le développement en base 3 ne comporte que des 0 et des 2, comme : 0,0220020202200... (le tiers médian enlevé à la première étape correspond aux nombres dont le premier chiffre est un 1 ; les tiers enlevés à la seconde étape correspondent aux nombres dont le second chiffre est un 1 ; etc.). En associant à ce nombre de l'ensemble triadique de Cantor le nombre réel dont l'écriture en base 2 est 0,0110010101100... (on a remplacé les 2 par des 1), on définit une correspondance élément par élément entre les réels compris entre 0 et 1 et l'ensemble de Cantor. Ainsi l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable, mais il est négligeable : à l'étape *n* de sa construction, il peut être enfermé dans un ensemble d'intervalles de longueur totale $(2/3)^n$, quantité qui tend vers 0 quand *n* tend vers l'infini.

5. UN CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE BOREL

Les nombres qui ne sont pas univers forment une partie négligeable.
Montrons d'abord que les nombres réels entre 0 et 1 qui n'ont pas de "0" dans leur développement décimal forment un ensemble négligeable.
Tous les nombres dont le premier chiffre après la virgule n'est pas "0" constituent exactement l'intervalle [1/10, 1], de longueur totale 9/10.
De la même façon, en découpant l'intervalle [0, 1] en 100 intervalles de longueur 1/100 correspondant aux nombres commençant par 0,00 0,01 0,02 . . . 0,99, on voit que les nombres qui n'ont de 0 ni en première position ni en seconde position constituent un ensemble d'intervalles dont la longueur totale est exactement 81/100 = $(9/10)^2$



De la même façon, en découpant en petits intervalles, on voit que les nombres n'ayant de "0" dans aucune des positions 1, 2 . . . *m*, après la virgule, constituent des intervalles dont la longueur totale est $(9/10)^m$.
Cela montre que les nombres entre 0 et 1 n'ayant pas de "0" dans leur développement décimal forment un ensemble négligeable. Il en va de même pour les nombres n'ayant pas de "1", etc., ou n'ayant pas la séquence "123" ou "1998", etc. (utiliser le même raisonnement avec la base 100, 1 000 etc., avec *x*, 10*x*, 100*x*, etc.). Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables l'est aussi, on voit que les nombres qui ne sont pas univers constituent un ensemble négligeable.

rationnel aussi proche qu'on le désire) serait négligeable ! Dur à avaler !

L'explication de cette apparente difficulté n'est-elle pas que la notion mathématique d'ensemble négligeable est mal formulée et qu'on peut démontrer de n'importe ensemble qu'il est négligeable ?

Non. Il existe des ensembles qui ne sont pas négligeables, par exemple l'intervalle [–1, +1] (ou n'importe quel intervalle [*a, b*] avec *a* inférieur à *b*). Si vous recouvrez les points de [–1, +1] par une suite d'intervalles, comme nous l'avons fait pour l'ensemble des A_i, alors vous découvrirez toujours que la longueur cumulée des intervalles utilisés dépasse 2 : l'intervalle [–1, +1] n'est pas négligeable.

Plus on l'étudie, plus on l'aime ! La définition mathématique d'ensemble négligeable formalise notre notion intuitive d'ensemble de peu d'importance. La situation est caractéristique d'un progrès scientifique : notre intuition est confirmée sur les ensembles finis (ces ensembles sont négligeables) et sur l'ensemble constitué par l'intervalle [–1, +1] (cet ensemble n'est pas négligeable). Appliquée à d'autres ensembles (comme celui des rationnels), la conclusion étonne dans un premier temps, mais n'amène aucune véritable difficulté.

L'adoption de la définition formelle d'ensembles négligeables est maintenant universelle et ne choque plus. Les fonctions continues, mais n'ayant de dérivée en aucun point (qui résultent aussi des progrès de notre compréhension du continu), contredisaient aussi nos intuitions initiales, et pourtant elles ont perdu tout pouvoir scandaleux aujourd'hui.

L'étude des ensembles négligeables conduit à quelques propriétés attendues et inattendues. Un sous-ensemble d'un ensemble négligeable est négligeable. La réunion de deux ensembles négligeables l'est encore. Le complémentaire d'un ensemble négligeable ne l'est jamais et est partout dense ; ce dernier résultat correspond à l'idée naturelle que, si l'on enlève un ensemble négligeable à l'ensemble des réels, on obtient quelque chose qui est presque tout. Plus étonnante est la propriété que la réunion d'une infinité numérotée E_0, E_1, E_2, ... E_n, ... d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable : nous verrons plus loin qu'elle a des conséquences remarquables.

La notion d'ensemble négligeable ne coïncide pas exactement avec la notion d'ensemble «fini ou infini dénombrable» élaborée à la même époque par Cantor. Le monde des nombres est plus subtil : certains ensembles infinis non dénombrables (donc déjà assez gros) sont négligeables. Le plus célèbre ensemble non dénombrable négligeable est l'ensemble triadique de Cantor, qui est l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture en base 3 peut se faire sans utiliser le 1 *(voir la figure 4)*. Avec le résultat de Borel, nous allons rencontrer bien d'autres ensembles infinis non dénombrables négligeables.

6. LE NOMBRE DE CHAMPERNOWNE EN DIVERSES BASES

SUR 1 000 CHIFFRES

BASE 2 : CH = 0,0001111110011010110111010011011...

NOMBRE DE 0 : 499	NOMBRE DE 1 : 499

BASE 3 : CH = 0,0100222222222222222121022021000022...

NOMBRE DE 0 : 339	NOMBRE DE 1 : 326	NOMBRE DE 2 : 335

BASE 4 : CH = 0,0133212231310313222020333220013001222120332 . . .

NOMBRE DE 0 : 246	NOMBRE DE 1 : 247	NOMBRE DE 2 : 261	NOMBRE DE 3 : 246

BASE 5 : CH = 0,0302040012323112114114102121314414423002412. . .

NOMBRE DE 0 : 217	NOMBRE DE 1 : 204	NOMBRE DE 2 : 183	NOMBRE DE 3 : 192	NOMBRE DE 4 : 204

BASE 10 : CH = 0,123456789101112131415...

0 : 66	1 : 177	2 : 177	3 : 148	4 : 77	5 : 77	6 : 77	7 : 67	8 : 67	9 : 67

Le nombre de Champernowne, constitué par la suite des entiers, est "par construction" normal en base 10 et, selon Borel, il est presque certainement normal dans toutes les bases. On le vérifie sur les fréquences en base 1, 2, 3, 4, 5 et 10 où, bien que prouvée, l'égalisation est moins apparente.

UN NOMBRE EST PRESQUE CERTAINEMENT ÉTONNANT !

Un nombre réel est un nombre normal en base 10 si, dans son développement en base 10 : les 10 chiffres apparaissent en proportion équilibrée (10 pour cent de chaque) ; les 100 paires possibles de chiffres (00, 01, 02, 99) apparaissent aussi en proportion équilibrée (chacune apparaît avec la fréquence de 1 pour cent) ; les 1 000 triplets de chiffres (000, 001, 999) apparaissent en proportion équilibrée (chacun apparaît avec une fréquence de 0,1 pour cent) ; etc.

Un résultat, démontré par Émile Borel en 1909, nous conduit au bord du paradoxe : l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas normaux en base 10 est négligeable (quoique aussi non dénombrable).

Assez naturellement, on dit d'une propriété qui est vérifiée pour tout nombre réel, sauf pour ceux appartenant à un ensemble négligeable, qu'elle est *presque certaine,* et donc que le résultat de Borel peut s'exprimer en huit mots : être normal en base 10 est presque certain.

Une interprétation probabiliste du résultat de Borel est possible : en tirant au hasard les décimales d'un nombre réel avec un système équitable (qui ne favorise aucun chiffre), on obtient un nombre normal en base 10, avec une probabilité de 100 pour cent. Les versions probabilistes ou topologiques du résultat de Borel sont profondément surprenantes : être normal est une propriété tellement forte (pour être normal, il faut se soumettre simultanément à une infinité de contraintes) qu'on reste interloqué du résultat de Borel : tous les nombres réels, sauf une partie négligeable d'entre eux, satisfont cette infinité de contraintes que le hasard produit avec certitude ! La version topologique possède l'avantage de ne pas faire appel à l'idée irréaliste d'une série infinie de tirages au sort.

Il résulte du théorème de Borel que la propriété être équiréparti en base 10 (avoir autant de 0 que de 1, que de 9 dans son développement décimal) est presque certaine. De même encore, être un nombre-univers en base 10 (posséder un développement décimal qui contient toutes les séquences finies possibles de chiffres) est une propriété presque certaine.

Quand on change de base de numération, les résultats précédents restent vrais, et donc «être normal en base 2», «être normal en base 3», etc., sont toutes des propriétés presque certaines. Le fait évoqué plus haut qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est encore un ensemble négligeable se traduit en la propriété que la conjonction d'une infinité dénombrable de propriétés presque certaines l'est aussi. Les propriétés «être normal dans toutes les bases de numération simultanément», «être univers dans toutes les bases simultanément» ou «être équiréparti dans toutes les bases simultanément» sont donc presque certaines.

Mis sous cette forme ultime, le résultat de Borel dépasse les bornes du raisonnable. En effet, alors qu'on connaît des nombres normaux en base 10 comme le nombre de Champernowne 0,123456789101112... *(voir Champernowne et quelques autres,* par Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science,* décembre 1998), on ne connaît de manière explicite aucun nombre normal en toute base.

Presque partout, mais introuvable !

Si ce n'est pas un paradoxe, cela y ressemble : bien qu'un nombre soit presque certainement normal en toute base simultanément, on ne sait définir de manière explicite aucun nombre dont on puisse prouver qu'il est normal en toute base : les nombres normaux en toute base sont tout (à un ensemble négligeable près), mais on n'en a aucun !

Le seul début d'exception est fourni par la théorie algorithmique de l'information, qui permet de définir un nombre normal en toute base (le nombre Oméga de Chaitin), mais dont il est impossible de connaître les décimales. Ce nombre n'est pas donné par une méthode qui en permette le calcul et ne peut donc pas satisfaire notre désir de connaître vraiment un nombre normal en toute base (on peut d'ailleurs s'interroger sur la réalité de nombres, comme le nombre Oméga, mathématiquement bien définis, mais dont les décimales sont par principe incalculables).

Le mathématicien, en étudiant sur un plan abstrait l'existence des nombres normaux, prouve de façon parfaitement rigoureuse que les nombres normaux dans toute base sont infiniment majoritaires ; pourtant, le mathématicien ne réussit pas même à en expliciter un seul !

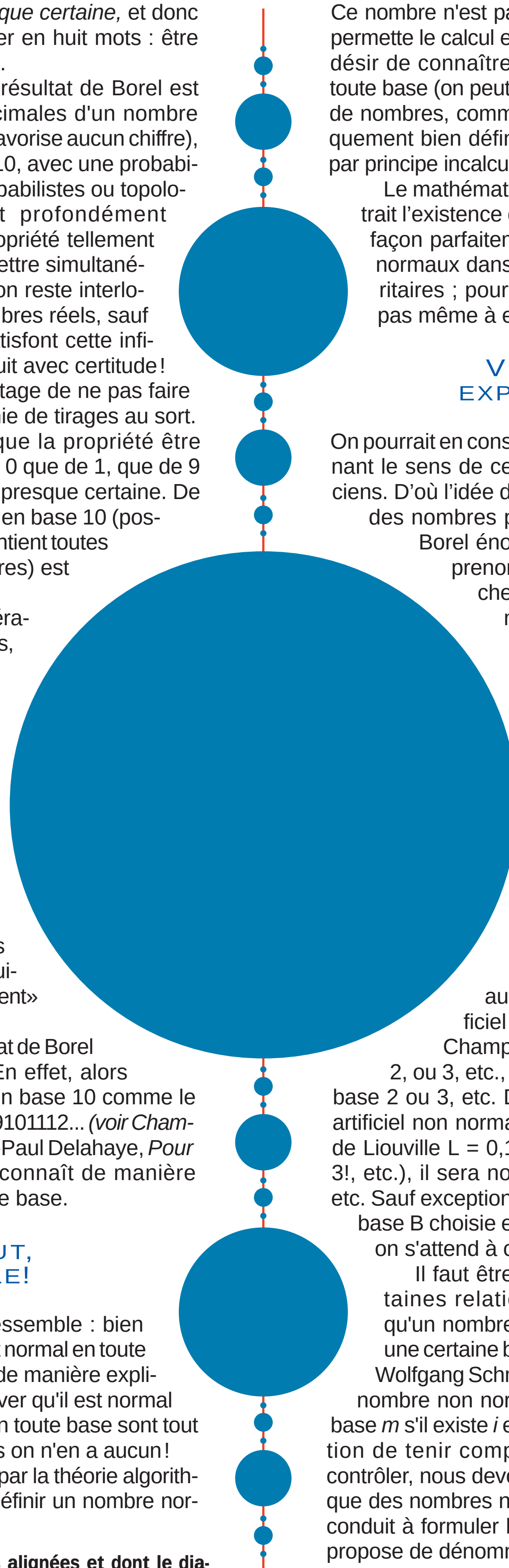
Vérifications expérimentales

On pourrait en conséquence avoir des doutes concernant le sens de ce que démontrent les mathématiciens. D'où l'idée de tester expérimentalement, pour des nombres particuliers, ce que le résultat de Borel énonce sur un plan général. Si nous prenons un nombre au hasard sans tricher, c'est-à-dire sans en fixer nous-mêmes les chiffres (directement ou indirectement) par une règle artificielle, comme nous le faisons quand nous définissons le nombre de Champernowne, nous devrions tomber sur un nombre normal en base 10, et en n'importe quelle base. C'est effectivement ce que nous constatons, par exemple avec $\sqrt{2}$, avec π, avec *e*, etc. Tous ces nombres sont expérimentalement des nombres normaux en toute base.

Le théorème de Borel suggère aussi qu'en prenant un nombre artificiel en base 10, comme le nombre de Champernowne et en l'écrivant en base 2, ou 3, etc., on trouvera un nombre normal en base 2 ou 3, etc. De même, en prenant un nombre artificiel non normal en base 10 (comme le nombre de Liouville L = 0,1100010, des 1 en position 1!, 2!, 3!, etc.), il sera normal une fois écrit en base 2, 3, etc. Sauf exception conçue exprès, quelle que soit la base B choisie et quel que soit le nombre x choisi, on s'attend à ce que x soit normal en base B.

Il faut être attentif aux exceptions, car certaines relations parfaitement connues font qu'un nombre défini pour n'être pas normal en une certaine base ne le sera pas dans une autre. Wolfgang Schmidt a par exemple montré que tout nombre non normal en base n ne le sera pas en base m s'il existe i et j vérifiant que : $n^i = m^j$. À condition de tenir compte de ces exceptions faciles à contrôler, nous devons nous attendre à ne rencontrer que des nombres normaux en toute base. Cela nous conduit à formuler le principe abstrait suivant, que je propose de dénommer l'heuristique de Borel :

«Quand on considère un nombre et qu'on l'écrit en une base B, à moins qu'il n'ait été défini par une règle qui en fixe les chiffres en cette base-là, et qui



7. Ce collier cantorien est fait de sphères alignées et dont le diamètre diminue, d'une génération à l'autre, d'un facteur 3. Son axe n'est pas tout noir, il contient une infinité non dénombrable, mais négligeable, de points rouges, qui sont l'ensemble triadique de Cantor.

en empêche exprès la normalité, on obtiendra toujours un nombre normal en base B (et donc équiréparti en base B, et univers en base B).»

En particulier, tout nombre irrationnel algébrique (solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) doit être normal en toute base. Toute constante comme π, e, log(3) doit être normale en toute base. Tout nombre possédant une expression algébrique simple composée avec ces nombres (par exemple, $e+\pi$, $99\,\pi/\log(3)$, Log(π), etc., doit être normal en toute base.

Le «doit» de la phrase précédente est très étrange, et cette formulation ne peut que déplaire au mathématicien traditionnel. Ceux que je dépeins par «mathématiciens traditionnels» ne tiennent compte que des vérités démontrées. Or l'écart entre ce que donne l'heuristique de Borel et ce que donne la connaissance mathématique (c'est-à-dire ce qui est démontré) est le plus grand possible : personne ne sait RIEN prouver de ce qu'indique l'heuristique de Borel (pourtant vérifiée numériquement à chaque fois qu'on le tente et pourtant démontrée globalement par Borel il y a presque 100 ans).

La figure 6 indique les développements du nombre de Champernowne en diverses bases ; d'autres expérimentations, faites ces dernières années sur des millions de décimales, confirment aussi l'heuristique de Borel. Une étude de S. Pincus et R. Kalman en 1997 fait exception et prétend détecter des différences subtiles entre les décimales des divers nombres irrationnels qui pourraient peut-être agir sur la normalité. Cette étude doit être éclaircie.

Ces mathématiques qui suggèrent des théorèmes généraux que jamais personne n'arrive à prouver dans aucun cas particulier ne sont-elles pas étranges? Comment corriger cette anomalie des nombres partout présents, mais introuvables? Comment arranger les mathématiques pour éviter qu'elles n'autorisent des démonstrations globales ne se traduisant jamais en cas précis?

Quels remèdes?

Lorsque l'écart est si grand entre, d'une part, ce qu'on voit expérimentalement ou par le raisonnement global et, d'autre part, ce qu'on réussit à prouver en particulier, il est temps d'être inquiet (comme un physicien le serait si on lui présentait une théorie qui prouverait l'existence de particules partout présentes, mais dont il ne verrait jamais aucune preuve manifeste). L'heuristique de Borel ne crée pas de contradiction explicite, mais la situation est rationnellement insatisfaisante et pourrait signaler un défaut majeur de nos conceptions. Si nous réussissons un jour à trouver des nombres dont nous prouvions qu'ils sont normaux en toute base, ce sera parfait. Nous aurons comblé le trou entre propriétés générales et propriétés particulières. Le quasi-paradoxe sera résolu sans que nous ayons rien à changer dans notre conception, et notre inconfort actuel n'aura été que temporaire et sans signification.

L'attente a déjà été longue, et il est devenu légitime de s'interroger sur la nature de ce quasi-paradoxe : n'appelle-t-il pas une réforme dans notre vision des mathématiques? Le continu du mathématicien n'est pas celui du physicien, car ce dernier n'accorde aucun sens à l'affirmation qu'il y a une infinité non dénombrable d'instants dans une seconde. La méfiance implicite du physicien n'est-elle pas justifiée?

Puisque le continu du mathématicien se fonde sur la théorie des ensembles (car le continu se construit à partir des opérations de la théorie des ensembles prise comme allant de soi), peut-être faut-il renoncer à la théorie des ensembles ou la réformer? C'est ce point qu'étudient certains logiciens, comme T. E. Forster, de l'Université de Cambridge, qui formule des théories des ensembles avec l'ensemble de tous les ensembles (dans la théorie usuelle de Cantor, il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles), ou comme E. Nelson, qui propose une théorie dite non standard (à la base d'une conception des infiniment petits), ou comme J. Barwise, qui défend une théorie des hyper-ensembles (permettant l'étude des paradoxes liés aux autoréférences). D'autres encore proposent de nouveaux axiomes (par exemple portant sur les grands ensembles) : ces nouveaux axiomes, en augmentant le pouvoir de preuve des mathématiques, permettront peut-être de démontrer ces propriétés de normalité.

À l'opposé de ces voies tentant de rendre plus puissante la théorie des ensembles, d'autres recherches remettent en cause la logique usuelle. Les mathématiciens intuitionnistes et constructivistes espèrent, par des raisonnements plus exigeants, conjurer les quasi-paradoxes de l'existence (comme celui résultant de l'heuristique de Borel) et pour cela refusent par principe qu'une démonstration puisse aboutir à un énoncé d'existence («il existe un objet vérifiant telle propriété») sans qu'elle soit accompagnée d'une méthode de construction de l'objet en question. Leurs méthodes sont malheureusement restrictives et compliquent le développement de l'analyse.

On le voit, les nombres normaux, les nombres-univers, les ensembles négligeables et l'heuristique de Borel conduisent à des interrogations sur la nature profonde des mathématiques. Même si beaucoup de mathématiciens refusent de considérer les solutions alternatives avec sérieux et préfèrent attendre sans changer le monde ensembliste adopté au début du XX^{e} siècle, rien n'assure qu'ils ont raison et que les difficultés du monde ensembliste classique ne resurgiront pas plus gravement encore à l'occasion d'un autre problème.

8. PROPRIÉTÉS "VRAIES ET FAUSSES"

Si une propriété est vérifiée pour tout nombre, sauf ceux appartenant à un ensemble négligeable, elle est presque certaine (ou presque certainement vraie). Si les nombres qui vérifient la propriété constituent un ensemble négligeable, la propriété est presque certainement fausse.

Propriétés "vraies" :
- **être équiréparti en base B,**
- **être univers en base B,**
- **être normal en base B,**
- **être équiréparti en toute base,**
- **être univers en toute base,**
- **être normal en toute base,**

Propriétés "fausses" :
- **être rationnel,**
- **être algébrique,**
- **ne pas utiliser de "0" dans son développement décimal.**
- **appartenir à l'ensemble de Cantor,**
- **avoir une suite de chiffres programmable par algorithme.**
- **être définissable dans le système mathématique de la théorie des ensembles.**

Jean-Paul Delahaye est professeur à l'Université de Lille. e-mail : delahaye@lifl.fr

E. Borel, *Presque tous les nombres réels sont normaux*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 27, pp. 247-271, 1909.

J. Barwise et L. Moss, *Vicious Circles*, CSLI Publications, Stanford, Californie, 1996.

J. Borwein et P. Borwein, *Making Sense of Experimental Mathematics*, CECM, Simon Fraser University, Canada, 1996.

D. Champernowne, *The Construction of Decimal Normal in the Scale of Ten*, in *J. London Math. Soc*. 8. pp. 254-260, 1933.

J.-P. Delahaye, *Le fascinant nombre* π, Éditions Pour La Science-Belin, 1997.

T. Forster, *Set Theory with Universal Set,* Oxford Science Publications, Clarendon Press, 1995.

V. Klee et S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, n° 11, 1993.

W. Schmidt, *On Normal Numbers*, in *Pacific Journal of Mathematics*, 10, p. 3, 1960.