	JOUEUR A	
JOUEUR B	B coopère et gagne 3 — A coopère et gagne 3	B coopère et gagne 0 — A trahit et gagne 8
	B trahit et gagne 8 — A coopère et gagne 0	B trahit et gagne 1 — A trahit et gagne 1

Le dilemme du renvoi d'ascenseur

JEAN-PAUL DELAHAYE • PHILIPPE MATHIEU

Doit-on se sacrifier à tour de rôle dans de nombreuses confrontations comme les ventes aux enchères ou les élections?

Situation ambiguë : je suis face à un inconnu au rez-de-chaussée de cette grande tour, devant ce petit ascenseur à une seule place dont la porte est ouverte. Il n'y a pas de bouton pour le rappel lorsqu'il sera monté, et je n'ai pas du tout, mais alors pas du tout, envie de gravir les huit étages à pied. L'inconnu me dit : «Laissez-moi passer en premier, car, arrivé en haut, je vous renverrai l'ascenseur.»

Dois-je accepter? Pourquoi devrais-je le croire et accepter qu'il passe devant moi? D'ailleurs tiendra-t-il sa promesse si je le laisse passer? C'est le dilemme du renvoi d'ascenseur.

Le problème est-il d'essence uniquement psychologique? Non, car il peut être aussi mathématisé! L'étonnant est que son étude mathématique, lorsque nous imaginons que nous devons y jouer à de multiples reprises avec toutes sortes de gens, fasse ressortir de multiples aspects inattendus. Cette variante du dilemme itéré du prisonnier (voir une synthèse à propos de ce dilemme dans le dossier *Pour la science* sur *Les mathématiques sociales*) possède des propriétés remarquables : la plus étonnante est que certaines stratégies optimales font intervenir un choix au hasard!

Nous verrons aussi que, même dans le cas le plus simple, quand nous voulons jouer contre quelqu'un qui adopte le même comportement que nous, nous sommes conduits à des calculs subtils : les mathématiques sociales ne se réduisent pas toutes à des statistiques et à des règles de trois...

Dilemmes du prisonnier et de l'ascenseur

Fixons d'abord les règles du jeu abstrait que nous tirons de ce problème de l'ascenseur. À chaque rencontre, chacun des deux participants, désignés par *A* et *B,* doit faire un choix : soit il coopère, ce que nous désignons par *c* (comme *coopérer*), soit il trahit, ce que nous désignons par *t* (comme *trahir*). Ce double choix est dénommé une *rencontre*. Il y a ainsi quatre rencontres possibles, que nous notons *[c,c], [c,t], [t,c]* et *[t,t],* la première lettre désignant le choix de *A,* la seconde celle de *B*. Une *partie* est constituée d'une succession de rencontres. Les choix faits à chaque rencontre le sont simultanément, et la seule information dont dispose un joueur pour décider de ce qu'il joue à la rencontre numéro *n* est celle du passé des rencontres (par exemple, après trois rencontres *[c,c] [t,t] [t,c])*. Le nombre de rencontres d'une partie n'est pas fixé à l'avance, mais on supposera qu'il y en a plusieurs (cinq au moins).

● Lorsque l'un des joueurs trahit *(t)* et que l'autre coopère *(c)*, correspondant à une rencontre *[t,c]*, *A,* qui a trahi, gagne 8 points et *B*, qui a coopéré, n'en gagne aucun (ce que l'on désigne par *g(tc)* = 8, *g(ct)*= 0, g étant l'initiale de gain) ; dans notre exemple imagé, l'une des deux personnes est montée dans l'ascenseur en prenant l'autre par surprise. Les huit points gagnés correspondent à la satisfaction du personnage qui, après avoir trahi les règles du savoir-vivre, se fait tracter sans effort jusqu'en haut. Celui qui reste en bas alors qu'il voulait coopérer n'a aucun point, car, non seulement il reste

1a. Rencontre [t,c]. 8 points pour celui qui monte, 0 pour celui qui reste en bas : le crime paie. **1b. Rencontre [t,t]. 1 point pour chacun des deux vindicatifs : la dispute ne paie pas.** **1c. Rencontre [c,c] : 3 points pour chacun des deux compères : frustrés, mais amicaux.**

sur place, mais il a dû accepter la vexation de s'être fait surprendre par l'autre.

- Lorsque les deux joueurs trahissent (rencontre *[t,t]*), chacun gagne un point *(g(tt)* = 1*)*. Dans ce type de rencontre, les deux joueurs se battent pour monter dans l'ascenseur, aucun ne voulant céder, et, après avoir perdu du temps et avoir échangé des coups, ils renoncent et montent à pied.
- Lorsque les deux joueurs coopèrent (rencontre *[c,c]*), chacun gagne 3 points *(g(cc)* = 3*)*. C'est le cas où, sans se disputer, ils comprennent rapidement qu'aucun ne cédera et donc renoncent.

Les valeurs des coefficients pourraient être différentes, l'important, pour qu'il y ait dilemme de l'ascenseur, est que : *g(tc) > g(cc) > g(tt) > g(ct),* ce qui est naturel, et aussi que *{g(tc)+g(ct)}* / 2 > *g(cc)*, ce qui est le cas ici avec : *g(tc)*=8, *g(cc)*=3, *g(tt)*=1, *g(ct)*=0.

Si l'immeuble, au lieu d'avoir 8 étages, en avait 20, des coefficients mieux choisis seraient sans doute : *g(tc)*=20, *g(cc)*=3, *g(tt)*=1, *g(ct)*=0. Si la dispute dans le cas d'une partie *[t,t]* était rapide et peu violente, on choisirait peut-être *g(tc)*=8, *g(cc)*=2, *g(tt)*=1, *g(ct)*=0.

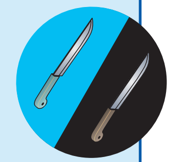
Le problème classique dénommé *Dilemme du prisonnier* est très proche et correspond au choix *g(tc)*=5, *g(cc)*=3, *g(tt)*=1, *g(ct)*=0 (le gain qu'on tire en trahissant quelqu'un qui souhaite coopérer est moins important). La première série d'inégalités *g(tc) > g(cc) > g(tt) > g(ct)* est vérifiée, mais pas la seconde, qui y est inversée : *{g(tc)+g(ct)}* / 2 < *g(cc)*.

Il s'agit, dans les deux cas, d'un dilemme, car l'intérêt individuel de chacun est d'obtenir *g(tc)* (c'est le plus grand des coefficients). Toutefois, si chaque joueur se laisse tenter et trahit, la rencontre *[t,t]* ne rapporte qu'un seul point à chaque joueur, ce qui collectivement est le pire des choix.

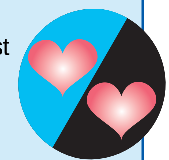
Cette inversion d'une inégalité entre le dilemme du prisonnier et celui de l'ascenseur change beaucoup le problème. L'inégalité *{g(tc)+g(ct)}/2 > g(cc)* signifie que, dans une série de parties successives, les deux joueurs ont intérêt à jouer alternativement *[c,t] [t,c] [c,t] [t,c]*, etc., car cela leur rapporte en moyenne *{g(tc)+g(ct)}*/2 alors que, s'ils jouent *[c,c] [c,c] [c,c]*..., ils ne gagneront en moyenne que *g(cc)* points par rencontre. Avec ce choix alternatif de coefficients, les joueurs gagnent 4 points en moyenne avec des séries *[c,t] [t,c] [c,t] [t,c]*... et 3 en moyenne avec des séries *[c,c] [c,c] [c,c]*...

L'avantage de la première méthode est encore accru dans le cas d'un immeuble à 20 étages. À l'inverse, dans le cas du dilemme du prisonnier, il est optimal de jouer *[c,c] [c,c] [c,c]*... : la coopération mutuelle est encouragée par les valeurs des coefficients.

2. DISPUTE, HASARD, COOPÉRATION SIMPLE, MÉTACOOPÉRATION

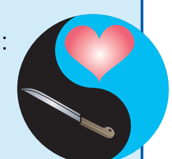


(i) Une partie où chaque joueur tente de gagner les huit points que rapporte une rencontre *[t,c]* conduit chacun à de mauvais résultats.Dans une partie composée de dix rencontres : *[t,t] [t,t] [t,t] [t,t] [t,t] [t,t] [t,t] [t,t] [t,t] [t,t]*, le nombre de points gagnés par le premier est 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 10, et le nombre de points gagnés par le second est 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 10.



(ii) Une partie où chaque joueur «coopère» sagement avec l'autre est déjà plus rémunératrice :*[c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c]*. Le nombre de points gagnés par le premier est 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3=30, et le nombre de points gagnés par le second est 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3 = 30.

(iii) Une partie où chaque joueur joue au hasard donne, par exemple, *[c,c] [c,t] [t,t] [t,c] [t,t] [c,c] [t,c] [t,t] [c,c] [t,t]*. Le nombre de points gagnés par le premier est 3+0+1+8+1+3+8+1+3+1 = 29, et le nombre de points gagnés par le second, 3+8+1+0+1+3+0+1+3+1 = 21.



(iv) Une partie où les joueurs jouent «en opposition de phase» correspond à une entente de niveau supérieure, la métacoopération : *[c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c]*. Le nombre de points gagnés par le premier est 0+8+0+8+0+8+0+8+0+8 = 40, et le nombre de points gagnés par le second est égal à 8+0+8+0+8+0+8+0+8+0 = 40.

LA MÉTACOOPÉRATION

Dans une longue série de rencontres au dilemme de l'ascenseur, pour gagner beaucoup de points (ce qui, bien sûr, est le but), il faut réussir à organiser une alternance qui peut être à deux temps *[c,t] [t,c] [c,t] [t,c]*... ou plus complexe *[c,t] [c,t] [t,c] [t,c] [c,t] [c,t] [t,c] [t,c]*... ou plus compliquée encore. Ce type d'alternances n'est pas optimale dans le dilemme du prisonnier, mais favorable dans le dilemme de l'ascenseur : c'est une sorte de coopération de niveau supérieur, que nous dénommerons *métacoopération*. Pour gagner des points au jeu du dilemme de l'ascenseur comme au dilemme du prisonnier, il faut absolument éviter les rencontres *[t,t]*. On peut tenter de se mettre d'accord avec son partenaire pour jouer *[c,c] [c,c] [c,c]*..., c'est la coopération simple qui est idéale au dilemme du prisonnier et assez bonne au dilemme de l'ascenseur. Toutefois le plus rentable au dilemme de l'ascenseur est de mettre en place la métacoopération *[c,t] [t,c] [c,t] [t,c]*... La coopération est vraiment délicate, car il faut que l'un des joueurs accepte de perdre au premier coup, en espérant que son partenaire lui «renverra l'ascenseur».

Ce dilemme est-il fréquent dans la vie courante ? Sans doute bien plus qu'on ne le croit, et nous pensons que c'est faute d'avoir su précisément le distinguer du dilemme du prisonnier qu'on a été parfois déçu de ne pas retrouver, dans le monde réel, ce qu'on modélisait par des simulations informatiques.

Voici une liste de situations dont la modélisation semble plus satisfaisante par le dilemme du renvoi d'ascenseur que par le dilemme du prisonnier.

Élections avec deux candidats d'un même camp

Deux candidats du parti d'extrême-centre veulent se présenter à la prochaine élection présidentielle. Bien sûr, il y a aussi des candidats d'autres partis. Les divers cas sont :

- *[c,c]*. Les deux candidats se présentent, mais restent corrects, c'est-à-dire ne cherchent pas à se discréditer mutuellement, ne publient pas de tracts injurieux, etc. On évalue alors que chacun a 30 pour cent de chances d'être élu. Les voix correspondant à l'électorat de leur formation se répartissent équitablement sur les deux candidats.
- *[t,t]*. Les deux candidats se présentent, mais entrent en compétition agressive, ce qui nuit à chacun. Leur campagne fait fuir des électeurs de leur camp, et finalement tous deux sont également pénalisés par cette confrontation publique. On évalue que chacun ne dispose plus que de 10 pour cent de chances d'être élu.
- *[t,c]*. Seul le premier candidat est agressif, alors que l'autre ne l'est pas

3. JOUER CONTRE SOI-MÊME EST DIFFICILE

(A) Donnant-donnant : je choisis de coopérer *(c)* au premier coup d'une partie, ensuite je choisis, au coup numéro *n*, ce que l'adversaire a joué au coup numéro *n*–1. Donnant-donnant ne joue pas très bien contre elle-même, car elle joue des parties : *[c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c] [c,c].*

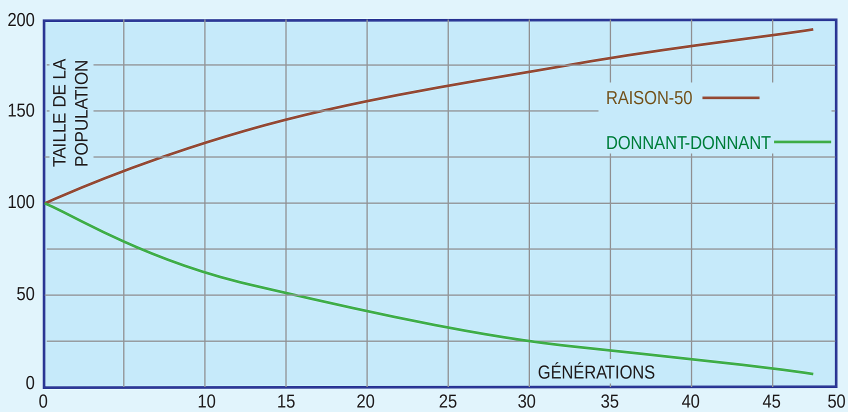
(B) Raison-50 : tant qu'aucun coup du passé n'a été de type *[c,t]* ou *[t,c]*, je choisis au hasard *c* ou *t* avec 50 pour cent de chances pour chacun ; ensuite je joue toujours l'inverse de mon coup précédent.

Raison-50 contre elle-même joue des parties du type : *[c,c] [t,t] [t,t] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c]...* Après une période de recherche de déphasage (qui s'étend ici sur trois échanges), les deux exemplaires de Raison-50 qui se rencontrent jouent en "opposition de phase", ce qui est le mieux possible et correspond à une parfaite métacoopération.

(C) Le simple fait de bien jouer avec elle-même conduit Raison-50 à battre Donnant-donnant en tournois. Si la partie est assez longue, la période de recherche de déphasage peut être négligée et donc, en moyenne par coup, on a le tableau de résultats :

	Donnant-donnant	Raison-50	Total
Donnant-donnant	3	4	7
Raison-50	4	4	8

Ce tableau laisse prévoir ce qui se passe en compétition écologique (100 exemplaires de chaque stratégie sont mis dans une même arène, et chaque exemplaire rencontre chaque autre ; le nombre de points gagnés dans ce combat généralisé détermine les effectifs de la génération suivante ; on s'arrange pour que l'effectif total reste constant). Au bout de 50 générations, plus aucun exemplaire de Donnant-donnant ne subsiste.



(ce second candidat fait exprès de mener une mauvaise campagne, voire renonce à se présenter et apporte son soutien au premier). La campagne ne fait pas fuir d'électeurs du parti d'extrême-centre vers les autres partis, et donc celui qui joue *t* a plus de chances de se faire élire que dans le cas *[c,c]* ou dans le cas *[t,t]*. On évalue à 0 pour cent les chances de celui qui joue *c*, et à 80 pour cent les chances de celui qui joue *t*. Au total, on retrouve donc les coefficients 3, 1, 8, 0 multipliés par 10 pour cent. Bien sûr, une évaluation dans un cas réel donnerait des valeurs différentes, mais elles satisferaient sans doute les inégalités qui caractérisent le dilemme de l'ascenseur.

Dans un tel cas, il est clair que l'entente pour céder le pas à tour de rôle (la métacoopération) est le comportement collectif le plus raisonnable. Bien sûr, dans la réalité, celui qui cède le pas en espérant bénéficier plus tard du renvoi d'ascenseur prend un grand risque : changement de situation politique, apparition de nouveaux candidats, refus de l'autre. Dans le second exemple, l'existence de nombreuses rencontres est plus vraisemblable.

La commission de spécialistes

Dans les commissions de recrutement des universités ou des centres de recherche, le type de marché suivant, implicite ou explicite, est fréquent : «Cette année, je ne défends pas trop mon candidat et te laisse défendre le tien ; l'année prochaine, tu m'aideras en retour à faire passer un jeune pour mon équipe.» Un coup *[c,c]* est une commission où chacun défend sans excès son candidat. Un coup *[t,t]* est une commission où chacun se bat violemment pour faire passer son candidat (avec le risque que ce ne soit un troisième candidat que la commission retienne). Un coup *[t,c]* est une commission où l'un s'efface devant l'autre pour assurer la victoire du premier en espérant une situation inversée l'année suivante.

Les enchères dans une salle des ventes

Deux collectionneurs se trouvent dans une salle des ventes où sont proposés divers objets qu'ils convoitent : il vaut mieux qu'ils s'entendent et cèdent à tour de rôle, plutôt que se disputer chaque pièce en provoquant une montée, ruineuse et inutile, des enchères. L'accord est du type : «Je te laisse enchérir sur le premier objet qui nous intéresse, sans faire monter les enchères : au second objet, tu me laisseras seul», etc. Un coup *[c,c]* est une enchère dans laquelle nous essayons pacifiquement d'acquérir l'objet. Un coup *[t,t]* est une enchère où, excités l'un par l'autre, nous faisons monter déraisonnablement les enchères. Un coup *[t,c]* est une enchère où l'un s'abstient de monter pour que l'autre puisse acquérir l'objet à un prix pas trop élevé.

L'accès à un bien insécable périodiquement disponible

Ce cas généralise les précédents. La tactique *c* consiste à tenter de se saisir chacun du bien insécable en respectant des règles de loyauté et d'agressivité contrôlée dans le combat. La tactique *t* est de tenter de se saisir du bien sans retenue, en trahissant les accords (implicites ou explicites) qui fixent les moyens normaux ou loyaux de combat.

Un coup *[t,c]* correspond alors au cas où l'un des combattants fait allégeance à l'autre, ce qui évite que le combat ne dégénère. Dans le monde animal, il est fréquent que des confrontations peu violentes aient lieu entre animaux d'une même espèce jusqu'à ce que l'un des adversaires se soumette et marque son allégeance par une posture convenue.

Un coup *[c,c]* correspond à un combat peu violent qui dure, avec le risque que la femelle convoitée ne s'éloigne.

Un coup *[t,t]* correspond à un combat violent risquant de conduire à des blessures graves ou même à la mort.

Dans le cas des combats animaux, la situation ne conduit pas nécessairement à un état de métacoopération (trop complexe et fragile), mais plus fréquemment à la mise en place d'une hiérarchie qui fait que, dans les rencontres suivantes, celui qui a gagné la première fois par abandon de son adversaire gagnera ensuite systématiquement. Nous verrons plus loin que cette situation correspond à l'adoption de stratégies rationnelles non équitables.

Du rififi chez les phages

Récemment Martin Novak, de l'Institute for Advanced Study à Princeton, et Karl Sigmund,de l'Université de Vienne, à la suite d'expériences menées par Paul Turner et Lin Chao, de l'Université du Maryland, ont décrit le cas des virus ϕ6 et ϕH2 qui infectent une bactérie et adoptent l'un, une stratégie agressive ; l'autre, une stratégie modérée. En mesurant la virulence de chacun des phages (à l'aide d'un marqueur génétique), ils ont calculé les coefficients du jeu que les deux virus jouent les uns contre les autres au sein d'une bactérie infectée. Les coefficients trouvés satisfont exactement la première série d'inégalités indiquée plus haut, ce qui signifie qu'on est en présence d'un dilemme. Le fait constaté que le virus modéré (coopérant) ϕ6 est la forme la plus répandue est conforme aux analyses tirées des simulations informatiques menées avec le dilemme du prisonnier. Bien que la situation soit celle d'un dilemme de l'ascenseur, les virus, trop simples, ne réussissent pas à jouer une stratégie de métacoopération qui leur serait la plus profitable. Seule la coopération simple est atteinte, qui entraîne la multiplication des phages ϕ6. Il se peut que des analyses plus fines montrent chez d'autres organismes élémentaires des cas de dilemme de l'ascenseur conduisant à une métacoopération, mais ces mesures prouvent déjà que les inégalités décrivant la situation du dilemme de l'ascenseur se produisent naturellement, même chez les organismes les plus simples.

LA STRATÉGIE DONNANT-DONNANT

Revenons aux jeux abstraits. Les études sur le dilemme du prisonnier ont montré que la stratégie *Donnant-donnant* obtient d'assez bons résultats face à une grande variété d'adversaires. Cette stratégie consiste à coopérer *(c)* au premier coup d'une partie, puis à choisir, au coup numéro *n*, ce que l'adversaire a joué au numéro *n*–1. Cette stratégie incite l'adversaire à coopérer tout en ne prenant jamais vraiment de risque, car on démontre que dans une partie, aussi longue soit-elle, l'écart du total des points de *Donnant-donnant* avec son adversaire n'est jamais supérieur à cinq points. Cette fameuse stratégie joue-t-elle encore bien au dilemme de l'ascenseur ?

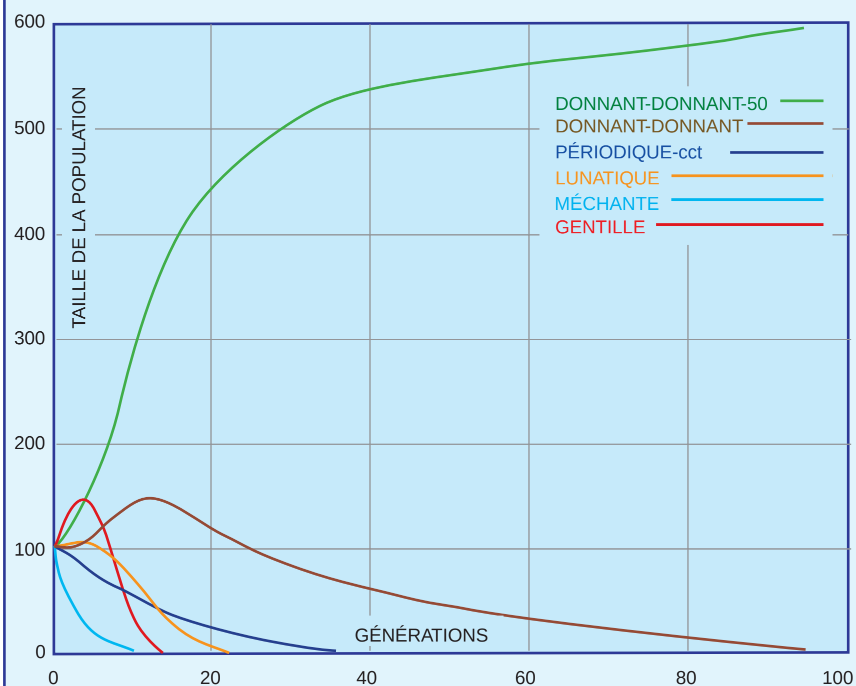
Elle s'en tire correctement. En effet, face à une stratégie où le partenaire coopère tout le temps *(c)*, elle se contentera de ce régime continu de coopération simple ; face à une stratégie agressive (jouant fréquemment *t*), elle réagira en jouant souvent *t*, ce qui devrait dissuader son adversaire de poursuivre, ou en tout cas l'empêcher de marquer beaucoup de points. Enfin, face à une stratégie tentant de mettre en place un régime d'alternance *[c,t] [t,c] [c,t] [t,c]*..., elle acceptera, et chacune profitera des bénéfices procurés par la métacoopération.

Pourtant plusieurs aspects du comportement de *Donnant-donnant* ne sont pas satisfaisants. Face à elle-même, *Donnant-donnant* ne réussit à mettre en place un régime de coopération simple, moins rémunérateur que le régime de métacoopération. En effet, quand une stratégie *Donnant-donnant* joue face à elle-même, la première rencontre est *[c,c]*,ce qui conduit à une nouvelle rencontre *[c,c]* au second coup, etc. De façon générale, rien dans le comportement de *Donnant-donnant* n'incite son adversaire à alterner les choix *c* et les choix *t*, et donc le plus souvent *Donnant-donnant* ne réussira qu'à obtenir une coopération simple.

Il faut être plus subtil pour jouer au dilemme du renvoi d'ascenseur qu'au dilemme du prisonnier. Les deux niveaux de coopérations envisageables et la nécessité d'une bonne coordination compliquent le jeu. Il y a d'ailleurs presque un paradoxe dans le fait que, pour atteindre le niveau de la métacoopération, il faut que l'un des joueurs commence par trahir : en tentant de créer une métacoopération, on risque donc d'effrayer un joueur inquiet, qui craindra qu'on refuse toute coopération. La stratégie *Rancunière* (elle joue toujours *c*, sauf si l'adversaire a joué *t*, auquel cas elle se met à jouer *t* indéfiniment), qui réussit assez bien au dilemme du prisonnier, n'accède jamais au régime de métacoopération. Jouer *t* peut signifier, soit je refuse de coopérer, soit je tente de mettre en place une métacoopération. Toute stratégie qui ne veut pas se contenter d'un régime de coopération simple doit surmonter cette ambiguïté.

4. UN TOURNOI À 6 : LE DÉTERMINISME N'EST PAS EFFICACE

Voici une compétition écologique avec 6 stratégies.
1) Donnant-donnant (déjà définie).
2) Donnant-donnant-50 : tant qu'aucun coup du passé n'a été de type *[c,t]* ou *[t,c]*, je choisis au hasard *c* ou *t*, avec 50 pour cent de chances pour chacun ; ensuite, je joue comme donnant-donnant.
3) Périodique-cct : je joue cycliquement *c, c, t, c ,c, t*...
4) Lunatique : je joue au hasard *c* ou *t* en choisissant avec une pièce de monnaie (50 pour cent de chances pour *c* et pour *t*).
5) Méchante : je joue toujours *t*.
6) Gentille : je joue toujours *c*.
Au bout de 100 générations, seule survit Donnant-donnant-50, qui occupe toute l'arène. La stratégie Donnant-donnant-50, qui combine à la fois les qualités de Donnant-donnant et la recherche efficace d'un déphasage, est l'une des meilleures stratégies connues aujourd'hui pour le jeu du dilemme de l'ascenseur.



Parties optimales

Le défaut le plus ennuyeux de *Donnant-donnant* est de mal jouer contre elle-même, et c'est réellement un défaut grave. Cela transparaît nettement lorsqu'on utilise, pour comparer les stratégies, ce que l'on appelle les compétitions écologiques : ce sont des compétitions où les stratégies que l'on veut évaluer sont mises dans une arène artificielle ; ensuite, en fonction de leur réussite lors des rencontres qu'elles font deux à deux, leurs effectifs augmentent ou diminuent. Au bout de quelques générations, les mauvaises stratégies ont disparu, et les bonnes occupent tout le terrain. Bien réussir lors d'une telle compétition écologique, c'est envahir l'arène, ce qui signifie qu'on rencontrera souvent des stratégies sœurs (jouant selon les mêmes règles). Bien réussir nécessite donc de bien jouer face à soi-même, et cela *Donnant-donnant* ne sait pas le faire.

Les simulations informatiques *(voir les figures 3 et 4)* confirment cette faiblesse de *Donnant-donnant* et, mieux encore, un résultat mathématique prouve que *Donnant-donnant* n'est pas bonne et ne peut pas l'être. Pour l'énoncer, nous introduirons certaines notions utiles à la bonne compréhension des dilemmes.

Dénommons *partie optimale* une partie infinie opposant deux stratégies et telle que la limite de la somme des gains moyens ne puisse pas être améliorée. Une partie *[c,c] [c,c] [c,c] [c,c]*... n'est pas optimale, car la limite de la somme des gains moyens est 6. En revanche, une partie *[c,t] [c,t] [c,t] [c,t]*... est optimale, car la limite de la somme des gains moyens est 8. La partie infinie *[c,t] [c,t] [c,t] [c,t]*... n'est toutefois pas équitable, car c'est toujours le premier joueur qui se sacrifie pour que le second marque des points (ce type de parties est le jeu que pratiquent les espèces, où une hiérarchie s'installe entre individus). On introduit donc la notion de partie optimale *équitable* en imposant que le score obtenu soit partagé à parts égales entre les deux joueurs. Les parties selon le schéma de métacoopération *[c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t]*... sont optimales équitables. Au dilemme de l'ascenseur, il existe toutes sortes de parties optimales équitables : toutes celles obtenues en répétant périodiquement un schéma quelconque composé du même nombre de *[c,t]* que de *[t,c]*, et nous en avons déjà cité plusieurs.

Maintenant voici la définition qui va nous intéresser : on dénomme stratégie *rationnelle* une stratégie qui, lorsqu'elle joue contre elle-même, joue toujours des parties optimales. De même, bien sûr, on dénomme stratégie *rationnelle équitable* une stratégie qui, lorsqu'elle joue contre elle-même, joue toujours des parties optimales équitables. La question est : existe-t-il des stratégies rationnelles et des stratégies rationnelles équitables ?

Au dilemme du prisonnier, toute stratégie qui ne prend jamais l'initiative de trahir (*t*), et donc en particulier *Donnant-donnant*, est rationnelle équitable (car contre elle-même elle joue la partie optimale équitable *[c,c] [c,c]* ....). Au dilemme du prisonnier, toute stratégie rationnelle est d'ailleurs automatiquement équitable.

Le hasard est indispensable

Le dilemme du renvoi d'ascenseur est plus intéressant, car *Donnant-donnant* n'y est plus rationnelle. Ce résultat remarquable prouve la complexité intrinsèque du dilemme de l'ascenseur : pour qu'une stratégie soit rationnelle, il faut qu'elle soit non déterministe (c'est-à-dire qu'elle fasse intervenir le hasard dans ses méthodes de choix de coups).

La démonstration exploite l'idée qu'une stratégie déterministe, quand elle joue contre elle-même, ne joue que des coups *[c,c]* ou *[t,t]*, lesquels, au dilemme de l'ascenseur, sont moins bons que les coups *[c,t]* et *[t,c]*. Examinons des exemples de stratégies rationnelles au dilemme de l'ascenseur.

Raison-naïve-50 : tant qu'aucun coup du passé n'a été de type *[c,t]* ou *[t,c]*, je choisis au hasard *c* ou *t*, avec 50 pour cent de chances pour chacun ; ensuite, je joue toujours la même chose. La stratégie *Raison-naïve-50* contre elle-même jouera, par exemple, la partie : *[c,c] [t,t] [t,t] [c,c] [c,t] [c,t] [c,t] [c,t]*...

Après une période de recherche de déphasage (qui s'étend sur quatre échanges), les comportements ont été définitivement fixés (ce qui est évidemment désavantageux pour la première, qui se fait exploiter de façon éhontée par la seconde). Quand une *Raison-naïve-50* en rencontre une autre, celle qui perd en premier perd jusqu'à la fin. Si tous les individus d'une espèce animale adoptent une telle stratégie, alors, automatiquement, se mettra en place une hiérarchie stable, ce qui est collectivement intéressant et meilleur même que la coopération simple... même si c'est très injuste.

Raison-naïve-50 est rationnelle, mais n'est pas équitable. Existe-t-il des stratégies à la fois raisonnables et équitables ? Oui, en voici l'exemple le plus simple, que vous avez sans doute deviné.

Raison-50 : tant qu'aucun coup du passé n'a été de type *[c,t]* ou *[t,c]*, je choisis à pile ou face *c* ou *t* ; ensuite, je joue toujours l'inverse de mon coup précédent. *Raison-50* contre elle-même jouera des parties du type : *[c,c] [t,t] [t,t] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c] [c,t] [t,c]*...

Après une période de recherche de déphasage (qui dure ici trois échanges), les comportements sont fixés, mais sans qu'aucun des deux joueurs soit privilégié, car les deux stratégies *Raison-50* alternent leur choix en opposition de phase menant une parfaite métacoopération.

De telles stratégies jouent bien contre elles-mêmes, mais ne jouent pas nécessairement bien contre d'autres qui peuvent exploiter leur comportement trop simple et prévisible. Voici un exemple de stratégie qui mêle l'idée de *Donnant-donnant* et l'idée de la recherche d'un déphasage.

Donnant-donnant-50 : tant qu'aucun coup du passé n'a été de type *[c,t]* ou *[t,c]*, je choisis à pile ou face (50 pour cent) *c* ou *t* ; ensuite j'applique *Donnant-donnant*.

À la place de 50 pour cent, on peut bien sûr utiliser n'importe quelle autre probabilité. C'est ce que nous appellerons les stratégies *Donnant-donnant-X* (où *X* est la probabilité de jouer *c* dans la période de recherche de déphasage). La longueur moyenne de la recherche du déphasage est bien sûr la plus courte pour *X* égal à 50, mais, en choisissant cette valeur, on joue souvent des rencontres *[t,t]* qui sont coûteuses. Le calcul montre qu'il vaut mieux allonger la période de recherche d'un déphasage pour qu'il soit moins coûteux. Le coût moyen d'une recherche de déphasage est minimum pour la probabilité X égal à 56,69640 pour cent, nombre qu'on obtient en étudiant la fonction «coût du déphasage» et en recherchant la valeur pour laquelle cette fonction atteint son minimum.

Au jeu du dilemme du renvoi d'ascenseur, non seulement pour marquer des points il faut être non déterministe, mais de plus il faut savoir résoudre des problèmes de minimisation. Décidément, prendre l'ascenseur est devenu bien compliqué !

J.-P. Delahaye, P. Mathieu et B. Beaufils, *The Iterated Lift Dilemma*, in *Computational Conflicts* (R. Dieng et J. Müller ed.), Springer-Verlag, Berlin, 2000.

M. Nowak et K. Sigmund, *Phage-lift for Game Theory*, in *Nature*, pp. 367-368, avril 1999.

P. Turner et L. Chao, *Prisonner's Dilemma in RNA virus*, in *Nature*, pp. 441-443, avril 1999.

Sur le dilemme itéré du prisonnier et la théorie des jeux, on consultera le dossier *Pour la Science* : *Les mathématiques sociales*, juillet 1999.

On trouvera à l'URL www.lifl.fr / IPD / des logiciels et des articles sur les problèmes de dilemme.