Jean-Michel Thiriet

Un jeu à épisodes pour l'été

JEAN-PAUL DELAHAYE

Les mathématiques naissent spontanément de l'étude de jeux aussi simples que Ping et Pong, et des conjectures restent à démontrer.

Dans cette chronique du mois d'août nous vous proposons un jeu remarquable – dénommé *Ping* – qui m'a été signalé par Nicolas Vaillant un lecteur de *Pour La Science*. Ce jeu m'a étonné par la simplicité de ses règles et l'infini méandre mathématique que son étude engendre. Durant vos vacances vous pourrez y jouer.

Des questions de difficultés variées naissent de la pratique de ce jeu que nous allons examiner en plusieurs épisodes. L'épisode 1 exigera de vous deux minutes mais vous permettra de jouer des heures. Vous pourrez éventuellement écrire des programmes qui vous assisteront dans vos recherches. L'épisode 2 vous obligera à une certaine abstraction et à quelques raisonnements, mais il vous procurera une vision enrichie du casse-tête. L'épisode 3 montrera comment une variante du jeu *Ping* – dénommée bien sûr *Pong* – résout avec efficacité la question de cas impossibles pour *Ping*.

Les épisodes suivants, s'ils vous tentent, vous feront pénétrer dans un monde de plus en plus complexe, que semble-t-il personne n'a su explorer complètement aujourd'hui, et que les beaux résultats de Nicolas Vaillant n'épuisent sans doute pas. Peut-être écrirez-vous vous-même un des derniers épisodes ?

1 : LES RÈGLES DU PING

L'origine de ce jeu, qui comme les patiences se joue seul, est incertaine. On en trouve la trace sous le nom *Gasp* dans le numéro 38 de la revue *Jeux et Stratégie* aujourd'hui disparue. Le jeu apparaît aussi sur certaines pages Internet sous le nom de *Ping*, que j'ai retenu. Les règles sont d'une grande simplicité.

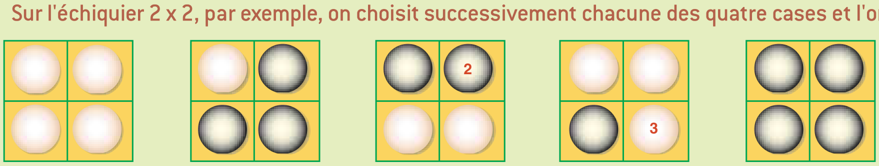
– Vous disposez sur un échiquier rectangulaire des pions ayant chacun une face blanche et une face noire (des pions de *Reversi* ou *Othello*, ou des pions que vous fabriquerez vous-même).

– Au départ, tous les pions montrent leur face blanche.

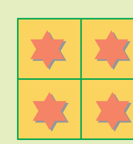
– Le but est de tous les retourner pour qu'ils montrent leur face noire en respectant la règle suivante : à chaque fois que vous choisissez une case vous retournez les pions qui l'entourent (il y en a huit si la case choisie est centrale, il y en a trois pour une case dans un coin et cinq

1. LES RÈGLES DU JEU DE PING

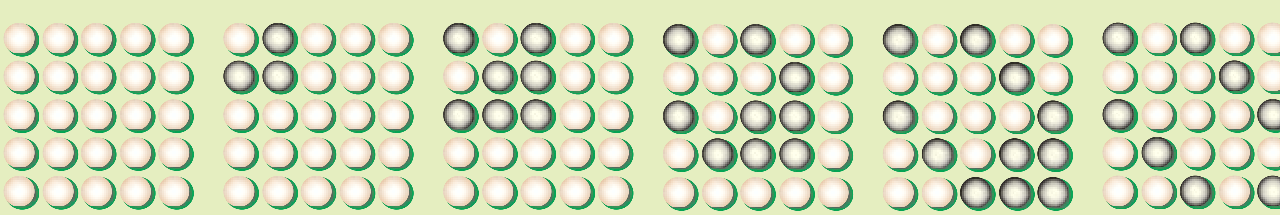
On dispose de pions à deux faces (noir/blanc) sur un échiquier rectangulaire. Au départ tous les pions sont blancs.
À chaque fois qu'on choisit une case, tous les pions sur les cases qui l'entourent sont retournés. Le but et de retourner tous les pions.
Sur l'échiquier 2 x 2, par exemple, on choisit successivement chacune des quatre cases et l'on gagne.



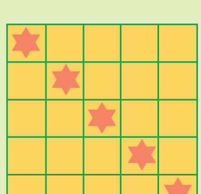
On représente la partie en plaçant une étoile sur chacune des cases choisies :



Sur l'échiquier 5 x 5, si l'on choisit les cases de la diagonale reliant la case en haut à gauche à la case en bas à droite, on n'arrive pas au but recherché.



Représentation de la partie (une étoile sur chacune des cases choisies).



Décompte, pour chaque case, du nombre de cases voisines étoilées. Il suffit qu'apparaisse un nombre pair dans une case pour que la partie n'atteigne pas le but recherché.

1	2	1	0	0
2	2	2	1	0
1	2	2	2	0
0	1	2	2	2
0	0	1	2	1

pour une case sur le bord de l'échiquier) ; vous désignez une autre case et on retourne les pions qui l'entourent ; etc.

Les cases successivement choisies lors d'une partie seront dénommées les étoiles (*) de la partie. Pour retourner tous les pions d'un échiquier de n cases, il faut utiliser au moins $n/8$ étoiles (car on retourne au plus huit pions pour chaque étoile). Des exemples de parties sont proposés dans la figure 1.

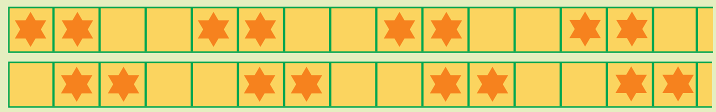
Selon la taille de l'échiquier il est plus ou moins facile de tout retourner. Peut-être même est-ce impossible dans certains cas? Essayez les échiquiers 2 x 2, 2 x 3, 2 x n, 3 x 3, 4 x 4 pour vous faire la main. Voyez aussi ce qui se passe pour les échiquiers d'une unité de hauteur : 1 x 2, 1 x 3, 1 x 4, etc. Pour ceux-là, nous savons énoncer une règle générale et la démontrer *(voir la figure 2)*.

Vous voilà entré dans l'aventure. Ne lisez pas la suite de l'article avant d'avoir vraiment essayé.

Si jouer avec des pions vous paraît pénible et que vous disposez d'un ordinateur, un programme, dû à Nicolas Vaillant, est disponible sur le site Internet de *Pour la Science* : il vous permettra de jouer à toute vitesse et donc de tester rapidement vos idées.

2. ÉTUDE DU CAS 1xn

La règle indiquant quels échiquiers de la forme 1 x n possèdent des solutions est facile à découvrir : si n s'écrit $1 + 4k$ (1, 5, 9, 13, 17, 21, ...) il n'y a pas de solution ; sinon il y en a. Démontrons-le. Nous numérotons les cases 1, 2, 3, etc. Nous noterons d'abord que nous sommes obligés de jouer une fois sur la case numéro 2 et une fois sur la case numéro $n-1$, sinon le pion en case numéro 1 (respectivement n) ne serait pas retourné. Remarquons ensuite que pour que le pion numéro q soit retourné une et une seule des cases $q-1$ et $q+1$ doit être jouée, ce qui à partir des deux premières cases détermine tout le reste.
Partant d'une extrémité nous avons l'un des deux schémas suivants et aucun autre :

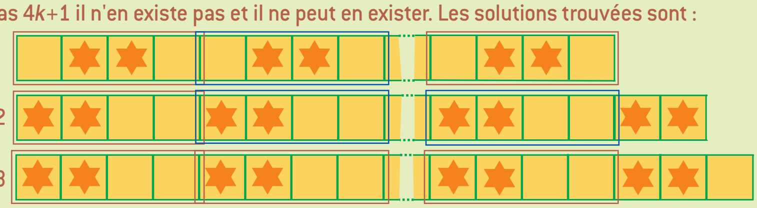


Si le nombre total de cases est de la forme $4k$ ou $4k+2$ ou $4k+3$ nous trouvons une solution. Dans le cas $4k+1$ il n'en existe pas et il ne peut en exister. Les solutions trouvées sont :

si $n=4k$

si $n=4k+2$

si $n=4k+3$



2 : LES DISPOSITIONS IMPAIRES D'ÉTOILES

Nous allons énumérer un certain nombre de faits assez simples que l'épisode 1 vous a sans doute fait découvrir seul.

L'ordre dans lequel vous choisissez les étoiles lors d'une partie est sans importance ; de plus, il ne sert à rien de désigner deux fois la même étoile, car retourner deux fois les pions qui l'entourent revient à ne rien faire. Une tentative de retournement de tous les pions – une partie – se ramène donc au choix d'un certain nombre de cases (les étoiles) de l'échiquier. Nous dessinerons donc une partie en représentant un échiquier avec des cases marquées à l'aide d'étoiles.

Si l'échiquier comporte n cases, comme chaque case peut comporter ou non une étoile, il y a 2^n parties possibles (car le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments est 2^n). Dès que le nombre n dépasse quelques unités, ce nombre de parties, 2^n, est énorme. Pour l'échiquier 5 x 5 il y a 2^{25} tentatives possibles soit 33 554 432 parties à envisager. La question de savoir si le défi de tout retourner peut être relevé est donc, sauf pour les cas les plus élémentaires, impossible à résoudre par essai au hasard ou une exploration systématique de toutes les parties. Il faut réfléchir!

Une autre remarque : pour connaître le résultat d'une partie de *Ping* (lorsqu'elle est représentée sous la forme d'un tableau d'étoiles) il suffit de compter, pour chaque case de l'échiquier, si le nombre d'étoiles voisines de la case est pair ou impair. Si ce nombre est impair, le pion (à face noire et blanche) passera – comme on le souhaite – du blanc au noir, sinon il restera blanc – ce qui ne convient pas. Examiner une partie représentée à l'aide d'un tableau d'étoiles consiste donc à vérifier que chacune des cases du tableau est entourée par un nombre impair d'étoiles.

Donc, résoudre le jeu de *Ping,* pour un échiquier donné, consiste à trouver une disposition d'étoiles telle que chaque case de l'échiquier soit entourée par un nombre impair d'étoiles. Nous dénommerons cette structure une «disposition impaire d'étoiles», et résoudre *Ping* c'est trouver des dispositions impaires d'étoiles. Similairement, une «disposition paire» est telle que chaque case est entourée d'un nombre pair d'étoiles.

Forts de ces remarques nous pouvons abandonner les pions en carton bicolore et les remplacer par des pions étoilés avec lesquels nous tenterons de créer des dispositions impaires d'étoiles. Essayez cette méthode avec les échiquiers carrés 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4, 5 x 5, 6 x 6, 7 x 7, 8 x 8, etc.

3 : LE PRINCIPE DE PING-PONG

La recherche de dispositions impaires d'étoiles vous a conduit à découvrir la seule solution pour l'échiquier 2 x 2, et vous a sans doute permis d'en trouver un bon nombre pour l'échiquier 4 x 4. Pour les échiquiers 6 x 6 et 8 x 8, vous avez découvert que les solutions sont rares. En fait, dans chacun de ces deux cas, elles sont uniques *(voir la figure 3)*.

Pour 3 x 3, 5 x 5, 7 x 7 vous n'avez rien trouvé. Pouvons-nous démontrer qu'il n'y a pas de solution, c'est-à-dire qu'aucune disposition impaire d'étoiles n'existe?

Oui bien sûr, car on peut énumérer toutes les parties possibles et découvrir qu'aucune ne convient. Une telle méthode ne sera cependant praticable que pour les petits échiquiers. Certains raisonnements minutieux réussissent à traiter les cas 3 x 3 et 5 x 5 et prouvent que ces tableaux ne possèdent pas de solution. Une méthode graphique remarquablement efficace a été découverte par Nicolas Vaillant permettant de montrer l'impossibilité de réussir le jeu de *Ping* pour certains échiquiers. Sa méthode consiste à trouver une disposition *paire* de + utilisant un nombre *impair* de +. Si vous réussissez à disposer des + de telle sorte que chaque case de l'échiquier soit voisine d'un nombre pair de +, et que le nombre total de + utilisés soit impair, alors il est prouvé que *Ping* n'a pas de solution.

Trouver de telles dispositions paires constitue un nouveau jeu que nous dénommerons *Pong* et qu'on peut définir par analogie avec *Ping* en donnant ses règles sous la forme suivante :

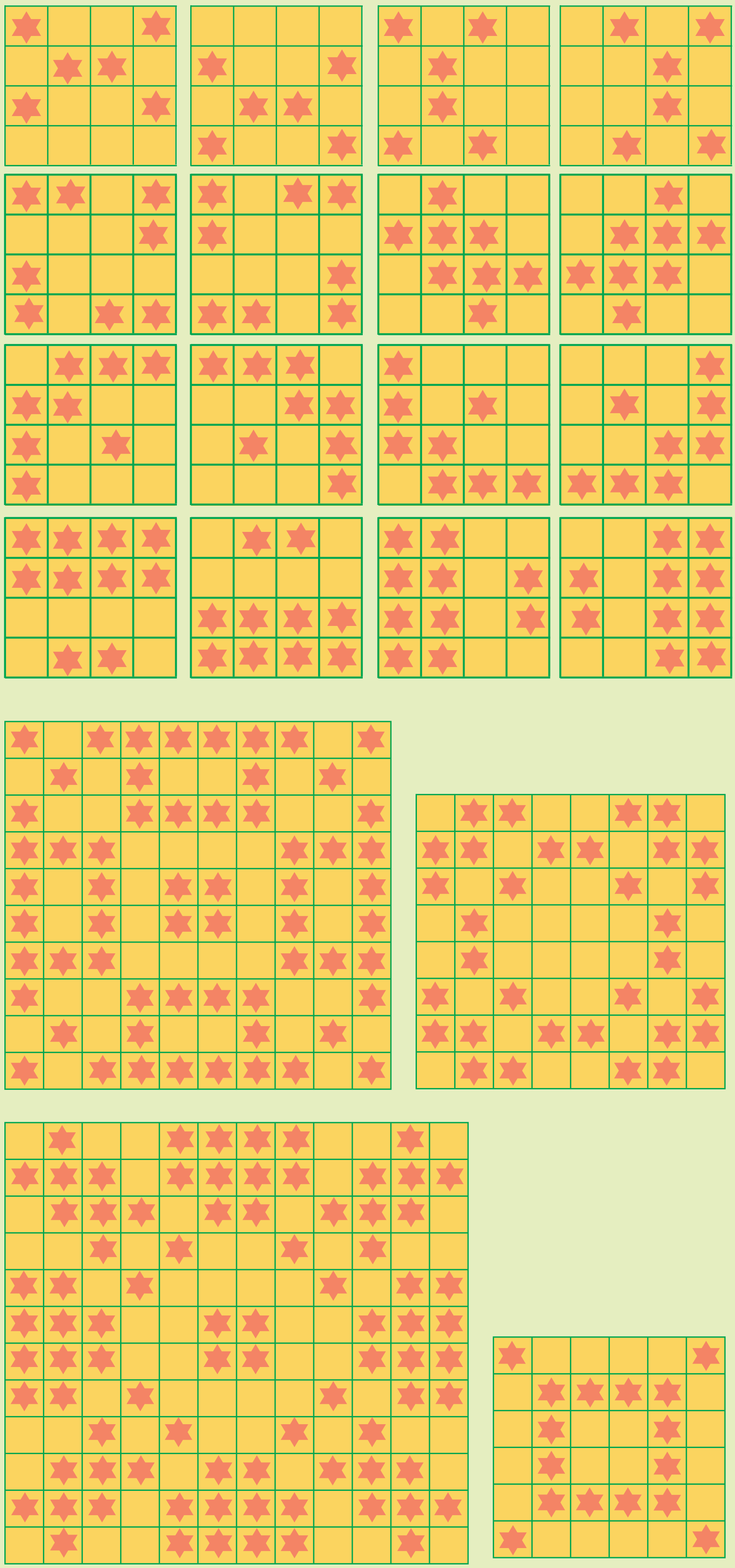
– Vous disposez sur un échiquier rectangulaire des pions ayant chacun une face blanche et une face noire.

– Au départ tous les pions montrent leur face blanche.

– Le but est de les remettre en position initiale en jouant un nombre impair de coups (donc au moins un), chaque coup consistant à désigner une case et à retourner les pions qui l'entourent.

Le résultat de N. Vaillant signifie que trouver une solution pour *Pong* sur un échiquier donné permet d'affirmer qu'il n'existe pas de solution pour *Ping* sur le même

3. PARTIES GAGNANTES DU *PING* SUR LES ÉCHIQUIERS 4 x 4, 6 x 6, 8 x 8, 10 x 10 et 12 x 12



échiquier. Autrement dit un échiquier ne peut avoir simultanément une solution pour *Ping* et pour *Pong*. Ce lien entre *Ping* et *Pong* – que l'on nommera bien sûr le principe de *Ping-Pong* – n'est pas évident. Le démontrer est un bel exercice de logique qu'il faut laisser aux plus courageux... En cas de nécessité et pour ne pas manquer l'après-midi programmée au Mont Saint-Michel aller voir la solution sur la figure 4.

Même si vous ne vous intéressez pas aux raisons profondes du principe de *Ping-Pong*, vous pouvez l'admettre, et, en l'utilisant, établir que les échiquiers 3 x 3, 5 x 5, 7 x 7, 9 x 9, 11 x 11 n'ont pas de solutions (à chaque fois il suffit de trouver une disposition paire de + utilisant un nombre impair de +). Toujours pour que vous ne manquiez pas les excursions magnifiques et les promenades en mer, les solutions sont données en figure 5.

4 : LES GRANDES CONJECTURES

Muni de ce bel outil qu'est le principe de *Ping-Pong* nous pouvons maintenant entrer dans le domaine des énoncés généraux. Les cas généraux 3 x *n* et 5 x *n* sont maintenant à votre portée. Nous vous laissons le plaisir de les traiter.

Un énoncé général intéressant vous est apparu : le problème de *Ping* n'a pas de solution sur les échiquiers carrés de côté impair (3 x 3, 5 x 5, 7 x 7, etc). Pour démontrer cela, le principe de *Ping-Pong* est bien sûr utile, mais même en l'utilisant la seule preuve connue aujourd'hui n'est pas simple et consiste en une construction par récurrence de configurations géométriques de plus en plus complexes (vous pouvez vous procurer cette démonstration auprès de N. Vaillant, dont l'adresse figure en fin d'article). L'énoncé du résultat est tellement simple que je soupçonne qu'il existe une démonstration rapide de cette propriété. Un lecteur saura-t-il la trouver?

Pour les échiquiers carrés l'expérience (éventuellement faite en s'aidant d'ordinateurs) montre que le problème de *Ping* possède des solutions lorsque le côté est pair. Aucune démonstration générale n'est pourtant connue. Là encore nous espérons bien qu'un lecteur saura nous faire avancer.

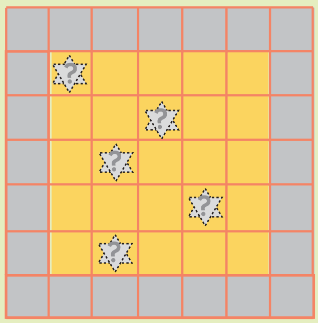
On sait (même si tout n'est pas prouvé) ce qui se passe pour les échiquiers carrés : si le côté est pair *Ping* a une solution, si le côté est impair *Pong* a une solution. Quelle est la règle générale pour les échiquiers rectangulaires? Essayez de la formuler vous-même. Cela vous prendra du temps (même sans rechercher de démonstration), mais vous procurera

4. LE PRINCIPE DE *PING-PONG*

Théorème : Si nous réussissons à disposer des signes + sur les cases d'un échiquier de sorte que chacune d'elles soit voisine d'un nombre pair de +, et que le nombre total de + utilisés soit impair, alors *Ping* n'a pas de solution.

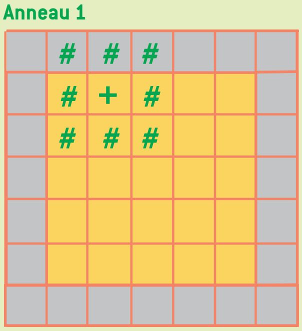
Pour le démontrer nous allons apprendre à calculer avec des «anneaux». Nous supposons que nous disposons d'une solution au problème *Ping* sur un échiquier *n* x *m* (nous illustrerons notre raisonnement avec un échiquier 5 x 5). Afin de mener notre raisonnement l'échiquier est complété par un pourtour de cases fictives.

Hypothèse : un certain nombre d'étoiles sont sur la partie centrale et constituent une solution du problème *Ping* (avec cette disposition d'étoiles, tous les pions des cases sont retournés, donc chaque case est adjacente à un nombre impair d'étoiles).

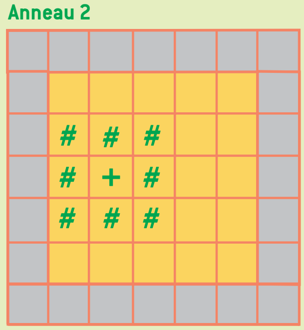


Ainsi, par hypothèse, les étoiles à l'intérieur de l'échiquier (aucune sur le pourtour) font que chaque case de l'échiquier 5 x 5 est adjacente à un nombre impair d'étoiles. Identifions une case (1). Le pion placé sur cette case marquée + est retourné, et le nombre d'étoiles, dans les cases notées par des # entourant le +, est impair.

Anneau 1

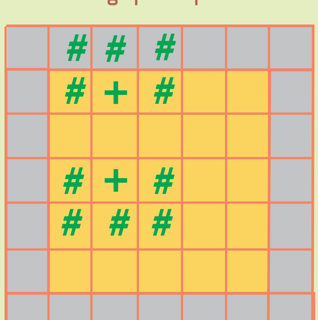


Anneau 2



C'est vrai aussi (2) pour le second anneau de # : en totalisant le nombre des cases marquées par une étoile dans l'anneau 1 et dans l'anneau 2 on obtient un nombre pair d'étoiles. Certaines des cases sont marquées deux fois (un # provenant de l'anneau 1 et un autre provenant de l'anneau 2). On peut les négliger dans la somme dont on ne s'intéresse qu'à la parité, car quand on additionne 0 ou 2, on ne change pas la parité.

Somme des deux anneaux

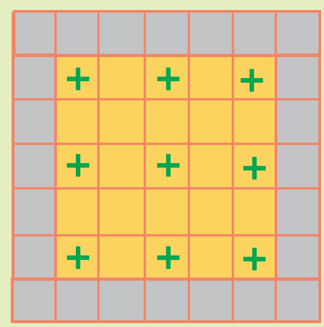


Donc, si on a affaire à une solution de *Ping* dans l'échiquier 5 x 5, les pions des cases + sont retournés et donc le nombre de cases marquées d'une étoile parmi les cases avec un # est pair.

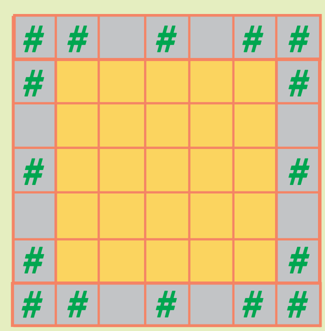
Nous avons fait une sorte d'addition d'anneaux : nous avons gardé les cases marquées une fois, et oublié celles qui l'étaient deux fois. Cette idée se généralise et nous pouvons faire une addition de plusieurs anneaux selon le même principe : nous gardons les cases marquées d'un nombre impair de # et oublions les autres.

Les cases marquées de # restantes constitueront un ensemble qui, si nous avons additionné un nombre pair d'anneaux devront au total contenir un nombre pair d'étoiles et qui, si nous avons additionné un nombre impair d'anneaux, devront au total porter un nombre impair d'étoiles. Il existe des millions (2^{25}) de telles configurations de # et *chacune* donne une condition nécessaire pour la répartition des étoiles dans la solution de *Ping*.

Nous sommes prêts à démontrer que l'échiquier 5x5 n'a pas de solution pour le problème Ping. Calculons ce que donne la somme de tous les anneaux déterminés par les 9 cases suivantes marquée par des + :



Cela donne :



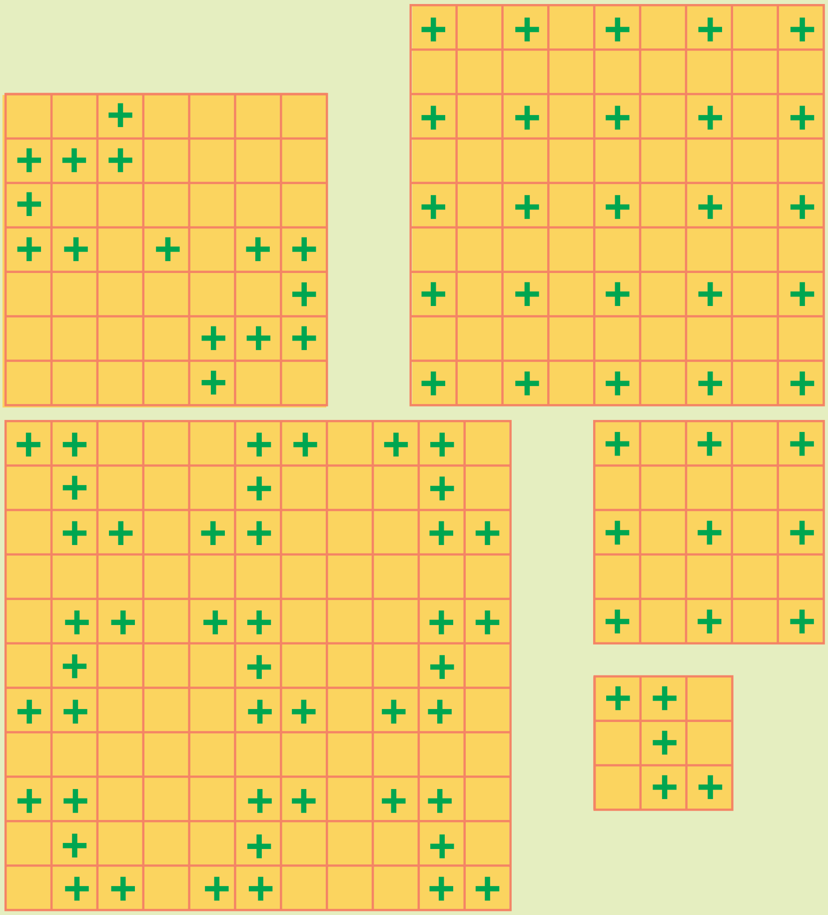
Dans la somme des 9 anneaux, aucune case intérieure ne porte de # car chacune est voisine d'un nombre pair de + : cela implique que l'ensemble des cases marquées par des # doit porter un nombre impair d'étoiles, donc au moins une. Mais dans une solution au problème de *Ping* sur l'échiquier 5x5 il n'y a, par définition, aucune étoile sur le bord. Nous avons donc une contradiction. Il ne peut donc pas exister de solution au problème de *Ping* sur l'échiquier 5 x 5.

Plus généralement, si nous réussissons à placer un nombre impair de + sur un échiquier de telle façon que chaque case de l'échiquier soit voisine d'un nombre pair de + (cela garantit que les # disparaissent à l'intérieur de l'échiquier lors de la somme des anneaux), alors l'échiquier considéré ne possédera pas de solutions pour le problème de *Ping*.

Si nous baptisons Problème de *Pong* le problème de placer un nombre impair de + dans un échiquier de sorte que chaque case touche un nombre pair de +, nous pouvons énoncer le Principe de *Ping-Pong* sous la forme : si le problème de *Pong* possède une solution celui du *Ping* n'en a pas et réciproquement.

5. LE *PING* N'A PAS DE SOLUTION POUR LES ÉCHIQUIERS CARRÉ DE CÔTÉ IMPAIR.

Les configurations suivantes sont des solutions du problème de *Pong :* chaque case est entourée par un nombre pair de +, lesquels sont en nombre impair. Donc les échiquiers 3 x 3, 5 x 5, 7 x 7, 9 x 9, 11 x 11, n'ont pas de solution pour le problème de *Ping* :



6. LA CONJECTURE GÉNÉRALE DES RECTANGLES

La structure mathématique qui organise les solutions semble assez complexe. À la suite de nombreux essais utilisant des programmes de plus en plus efficaces, Nicolas Vaillant a découvert la règle qui décrit les cas où des solutions au problème de *Ping* existent.

Pour décrire cette règle on commence par définir les ensembles suivants :

$C_1 = \{1, 5, 9, 13, ...\} = \{1 + 4k\ ; k \text{ entier}\}$

$C_2 = \{3, 11, 19, 27, ...\} = \{3 + 8k\ ; k \text{ entier}\}$

$C_3 = \{7, 23, 39, 55, ...\} = \{7 + 16k\ ; k \text{ entier}\}$ ...

$C_n = \{2^n - 1, 2^n - 1 + 2^{n+1}, 2^n - 1 + 2.2^{n+1}, ...\} = \{2^n - 1 + k.2^{n+1}; k \text{ entier}\}$

La conjecture de N. Vaillant est que : le rectangle $p \times m$ possède une solution si et seulement si p et m ne sont pas tous les deux dans un même ensemble C_i.

Autrement dit, il n'y aura pas de solution pour *Ping* si p et m sont tous les deux dans C_1 (donc pas de solution pour 5x5, 5x9, 9x9, 5x13, 9x13, 13x13, etc.) ou s'ils sont tous les deux dans C_2 (pas de solutions pour 3x3, 3x11, 11x11, 3x19, 11x19, 19x19, etc.), etc.

Dans tous les autres cas il y aura des solutions.

N. Vaillant a «à moitié» démontré la conjecture en établissant qu'il n'y a pas de solutions dans les cas indiqués (5x5, 5x9, etc). En revanche on cherche toujours la preuve qu'il y a des solutions dans les autres cas (fait expérimentalement constaté).

On remarquera que cette conjecture généralise celle concernant les carrés car la réunion des ensembles C_i est exactement l'ensemble des nombres impairs.

Concernant le principe de *Ping-Pong*, il semble pouvoir être renforcé : non seulement aucun échiquier rectangulaire n'a de solution pour *Ping* et pour *Pong* (c'est le principe de *Ping-Pong*), mais tout échiquier possède une solution pour l'un ou l'autre. Là encore les lecteurs sont invités à rechercher la preuve de cette généralisation du principe de *Ping-Pong* toutes affaires (de vacances) cessantes.

une véritable satisfaction, car un découpage étonnant des nombres entiers doit être utilisé pour cela.

La solution est donnée en figure 6. Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un échiquier $n \times m$ possède des solutions pour *Ping*. N. Vaillant a découvert cette condition par des tests expérimentaux et démontré qu'elle était nécessaire. Reste à montrer qu'elle est suffisante.

Un autre problème est celui de l'unicité des solutions, quand il y en a. Le décompte des solutions lui aussi est intéressant. Saurez-vous énoncer une condition nécessaire et suffisante d'unicité de la solution, au moins dans le cas des échiquiers carrés? Vous remarquerez que lorsque la solution de *Ping* est unique, alors elle est invariante par les symétries et rotations du carré : si elle ne l'était pas, les autres configurations seraient aussi solutions. Plus intéressant, quand un carré possède une solution invariante par les symétries et rotation du carré, alors cette solution est unique. Pourquoi?

La conjecture la plus étonnante concernant ce jeu concerne le principe de *Ping-Pong*. Il affirme (ce qui a été démontré en figure 4) que pour tout échiquier, au plus l'un des jeux *Ping* ou *Pong* possède une solution. Mais existe-t-il des échiquiers ne possédant de solution ni pour *Ping*, ni pour *Pong*. En menant des calculs systématiques N. Vaillant a vérifié que pour tout échiquier de taille rectangulaire $n \times m$ avec n et m inférieurs à 200 l'un des deux jeux a une solution. Cela laisse soupçonner que le principe de *Ping-Pong* peut être généralisé sous la forme : tout échiquier rectangulaire a une solution *Ping* ou *Pong*. Un lecteur saura-t-il prouver ce résultat?

Remarquez que si ces grandes questions vous effraient vous pouvez vous attaquer au problème de *Ping* et de *Pong* sur des échiquiers non rectangulaires. C'est là une terre vierge susceptible de vous faire passer agréablement les après-midi pluvieuses dans cet endroit si merveilleux où vous avez choisi de passer quelques semaines… de repos intensif.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille. e-mail : delahaye@lifl.fr

Nicolas Vaillant. Le jeu du *Ping*. Partie 1, novembre 2001. Partie 2, déc. 2001. e-mail : nicolas-vaillant@wanadoo.fr

Pour télécharger le programme permettant de jouer au *Ping* branchez-vous sur le site de *Pour la Science.*