Le hasard géométrique n'existe pas !

Le cerveau ne sait pas produire du hasard :
des expériences géométriques en donnent une preuve éclatante.

Le cerveau humain est bien trop apte à discerner des structures ; sans des outils statistiques rigoureux, nous sommes désarmés, tels des animistes attachant une signification au moindre souffle d'air.

Greg Egan, *Vif Argent,* 1995

L'esprit humain explore et analyse instantanément tout ce qui passe à sa portée. Rien n'est, pour lui, indifférent ou banal : il classe, trie, organise, hiérarchise. Cette efficacité dans la recherche de régularités ne cesse de surprendre les chercheurs en sciences cognitives qui découvrent les capacités de nos algorithmes internes. Ceux-ci nous permettent, par exemple, de repérer des corrélations complexes dans une figure *(voir la figure 1).*

Ce travail du cerveau, effectué sans relâche et sans que nous en ayons conscience sur toutes les informations que reçoivent et élaborent nos sens – lesquels ne sont jamais de simples récepteurs –, a quelques contreparties défavorables. L'une d'elle est l'étonnante infirmité que nous présentons tous face aux tâches de production d'aléas.

Nous avons évoqué dans l'article de décembre 2004 l'irrépressible biais d'alternances – quand nous tentons de produire une suite aléatoire de pile ou face, nous exagérons la proportion d'alternance PF ou FP par rapport aux répétitions PP ou FF – et l'étrange biais de positivité – si on demande à 100 personnes de choisir au hasard un des deux mots OUI ou NON, plus de 60 pour cent choisissent OUI.

Nous allons aujourd'hui constater, sur quelques situations géométriques, que, pour un humain, jamais rien n'est vraiment au hasard. Certains des résultats mentionnés ont été découverts dans le cadre d'activités de recherche financées par les militaires canadiens. Ceux-ci pensent que la connaissance des biais logiques et géométriques de fonctionnement de notre esprit, lorsque nous poursuivons un fugitif, améliorerait l'efficacité de nos stratégies de traque. Si par exemple, le fuyard se cache quelque part sur un terrain plat rectangulaire – une forêt, un marais, etc. –, on pourrait grâce aux résultats de ces travaux faire mieux que rechercher systématiquement quels sont les endroits qu'il est susceptible d'avoir choisis et, cela, même si on sait que le fugitif sait qu'il est poursuivi et que nous raisonnons sur ses choix. Cependant bien sûr, les travaux sur le hasard humain ont principalement pour objet d'améliorer notre connaissance de cette machine formidable et mystérieuse qu'est le cerveau.

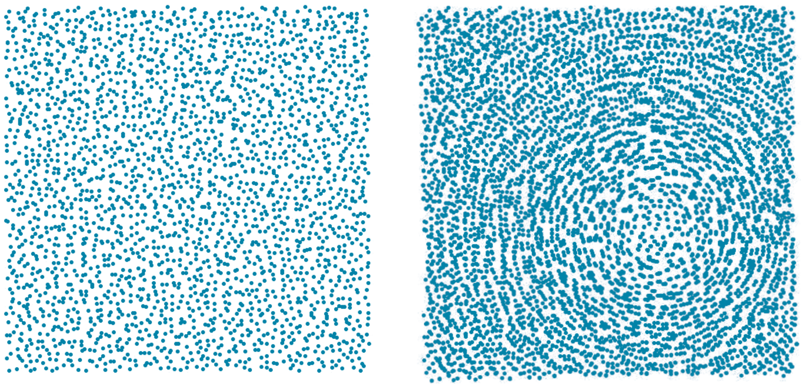
Tous les points ne se valent pas

John Christie, du Département de psychologie de l'Université de Dalhousie au Canada, place les sujets devant un carré blanc ou un disque, et leur demande de marquer par une croix dans la figure un point choisi au hasard. Les sujets doivent ensuite indiquer un deuxième point, puis un troisième.

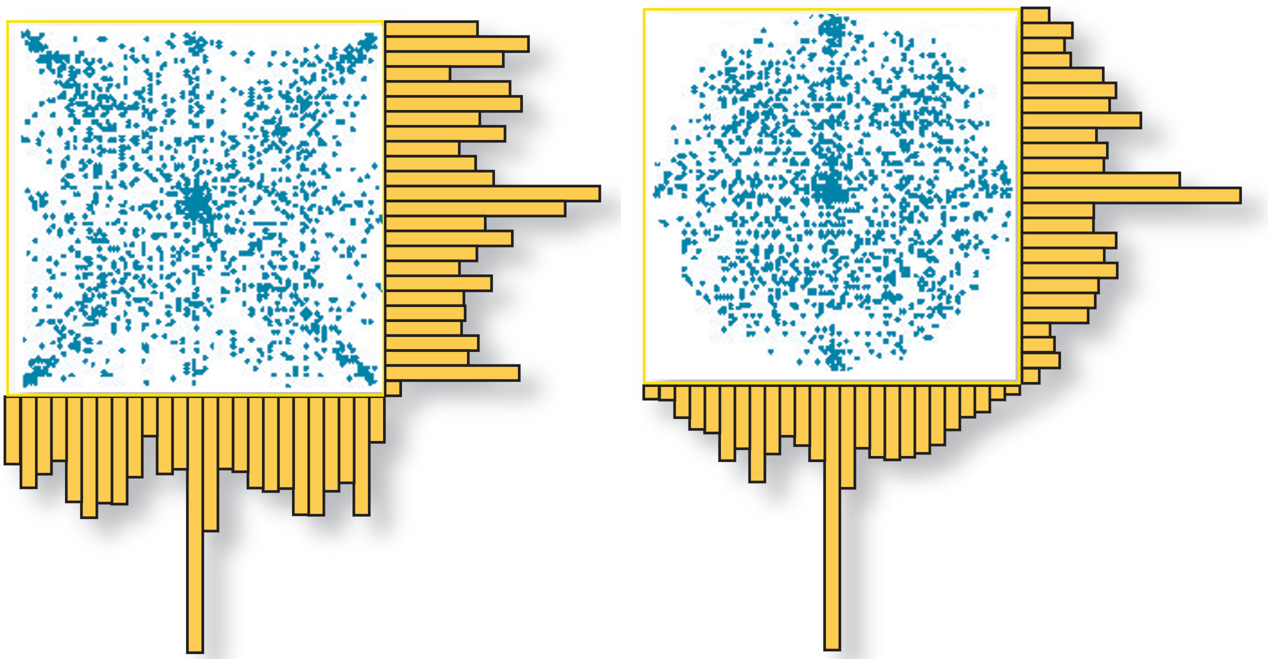
L'expérience réalisée avec des questionnaires imprimés et sur Internet a été effectuée avec 602 personnes résultant d'un échantillonnage rigoureux (même proportion de gauchers et de droitiers que dans la population). La superposition des points marqués par chaque participant produit des figures surprenantes qui ne ressemblent en rien à des points placés au hasard selon une loi uniforme : les humains ne peuvent exécuter la consigne et ne dessinent pas le nuage de densité uniforme recouvrant tout l'intérieur du carré ou du disque, qui seraient alors apparus légèrement grisés.

Pourquoi, alors que la consigne était explicitement de choisir « au hasard », les sujets favorisent-ils certaines zones et en évitent-ils d'autres ? L'écart à la densité uniforme espérée est très net et significatif : il ne peut être attribué à des fluctuations aléatoires ou à un nombre trop faible de sujets testés. Les emplacements proches du centre sont ceux qui attirent le plus et ils reçoivent plus de deux fois plus de points qu'ils ne le devraient ; à l'inverse, ceux proches du côté horizontal en bas au tiers ou aux deux tiers ne reçoivent pratiquement aucun point *(voir la figure 2).*

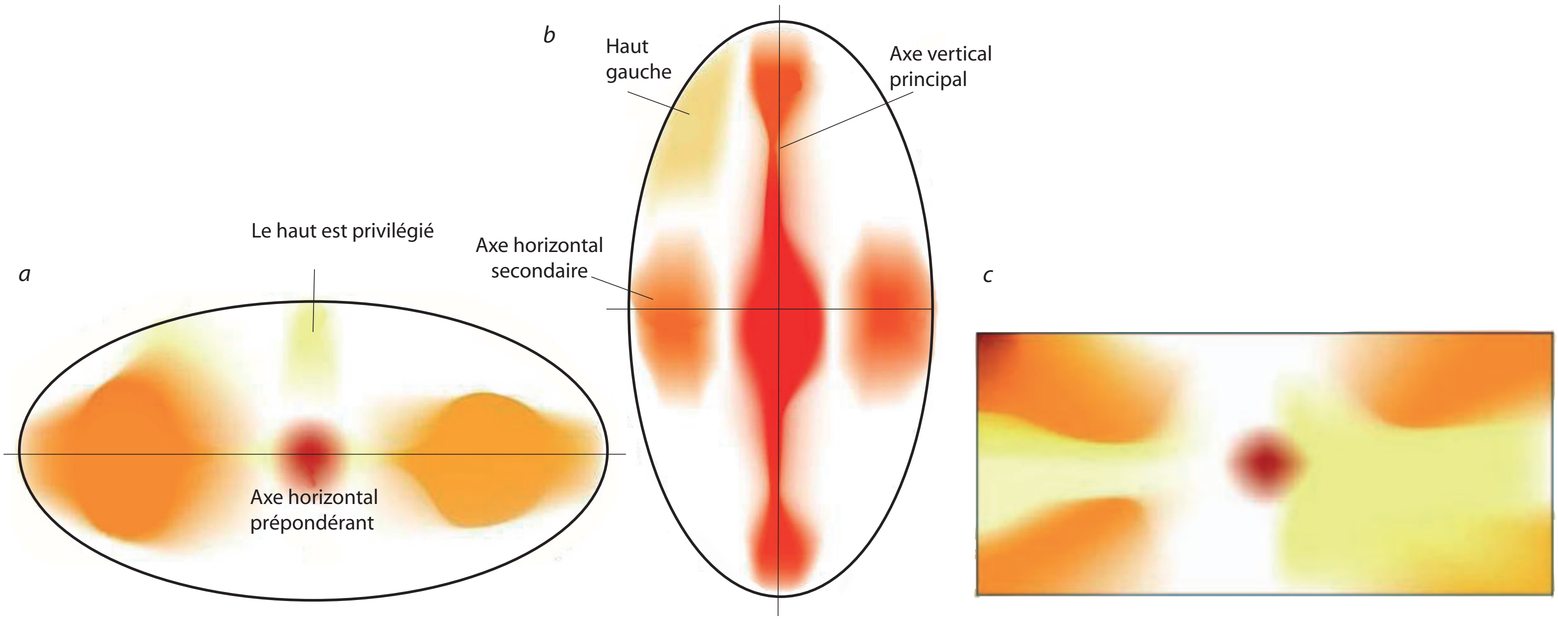
Dans le cas du carré, les points choisis sont agglomérés en grand nombre près du centre, le long des diagonales et sur les axes verticaux et horizontaux du carré. Une concentration particulière s'observe aussi vers les coins (mais jamais



1. Réseaux aléatoires de Léon Glass. Le cerveau humain analyse les images pour y repérer des régularités et des corrélations entre éléments qu'il interprète globalement. Les capacités de ces algorithmes internes sont remarquables et c'est sans doute leur action inconsciente et incontrôlée qui nous perturbe dans les tâches de production d'aléas décrites dans l'article. L'aptitude à voir du mouvement dans certaines figures de points découverte par Léon Glass en 1968, et redécouverte plusieurs fois depuis, est particulièrement étonnante. Si vous prenez une figure composée de points placés aléatoirement et que vous la superposez avec elle-même après l'avoir fait légèrement pivoter (ici de deux degrés), le réseau obtenu vous apparaît instantanément organisé circulairement autour du point de rotation. Une détection analogue instantanée se produit après une dilatation légère. Cette faculté permettant de voir que des points proviennent d'un mouvement d'ensemble d'une partie d'entre eux, est sans doute liée aux facultés d'analyse du mouvement de notre système visuel. Celui-ci, pour savoir dans quelle direction nous nous déplaçons par rapport à un repère, ou quel est le mouvement d'un objet placé devant nous, doit comparer des images proches, mais légèrement décalées, puis en tirer des informations globales sur la direction des mouvements.



2. Points d'attraction dans les formes géométriques. Les expériences menées par John Christie montrent que les points à l'intérieur d'un carré ou d'un disque ne sont pas, pour nous, équivalents. Chaque sujet est invité à marquer trois points au hasard dans une figure ; ensuite toutes les réponses sont superposées. Pour le carré, les points géométriques particuliers (centre, sommets, milieux des côtés) et zones particulières (axes de symétrie et diagonales) agissent comme des attracteurs : ils sont choisis plus qu'ils ne le devraient. Dans le cas du cercle, un biais semblable se produit. Les histogrammes montrent aussi une légère préférence (statistiquement significative) en faveur de la partie supérieure de la figure, un peu plus souvent choisie que la partie inférieure.



3. Ellipses, triangles, anneaux et courbes. Les biais constatés pour le cercle et le carré ont été confirmés par l'étude d'autres figures. Pour le triangle, l'axe vertical est nettement privilégié. Le centre du triangle qui comme dans toutes les figures est un attracteur puissant semble être le centre de gravité (point de concours de médianes). La préférence en faveur de la partie haute de la figure (plutôt que la partie basse) est assez nette dans plusieurs figures, de même qu'une certaine préférence pour la partie droite (plutôt que la gauche).

exactement sur les coins, pourquoi ?) et, à un moindre degré, près du milieu des côtés. Un léger biais favorise la partie supérieure qui reçoit plus de points que la partie inférieure. Pour le cercle, les axes horizontaux et verticaux sont encore favorisés. De même, plus légèrement, les obliques à 45° et – 45° : même lorsqu'une figure comme le cercle ne présente pas d'axes de symétrie horizontaux, verticaux ou obliques particuliers, l'esprit humain « brise la symétrie » et plaque de telles directions sur la figure, comme pour s'y repérer. Dans cette partie des tests, aucune différence significative n'a été observée entre hommes et femmes ou entre droitiers et gauchers.

Les points et zones privilégiées correspondent aux points et lieux géométriques que tout mathématicien considère comme présentant de l'intérêt dans une figure (centre, sommets, côtés, axes). Pour le cercle, ils correspondent aux lieux qu'on sera tenté de construire lorsqu'on voudra étudier la figure en la dessinant sur une feuille couverte d'un quadrillage qui fera apparaître le diamètre vertical, le diamètre horizontal, et suggérera les diamètres obliques. Ces points géométriques particuliers, qu'on nommera points structuraux, agissent irrésistiblement sur notre vision du disque aléatoire, ou du carré aléatoire, et en déterminent l'organisation.

Opposition avec le hasard mental arithmétique

Ces résultats évoquent ceux qu'on obtient quand on demande à un sujet humain de choisir un chiffre au hasard entre 1 et 9 (« hasard mental arithmétique »). Dans un tel cas, la réponse obtenue est 7 dans plus de 30 pour cent des cas. Le détail des probabilités est :

1 : 3% ; 2 : 5% ; 3 : 12% ;
4 : 9% ; 5 : 12% ; 6 : 11% ;
7 : 32% ; 8 : 12% ; 9 : 4%

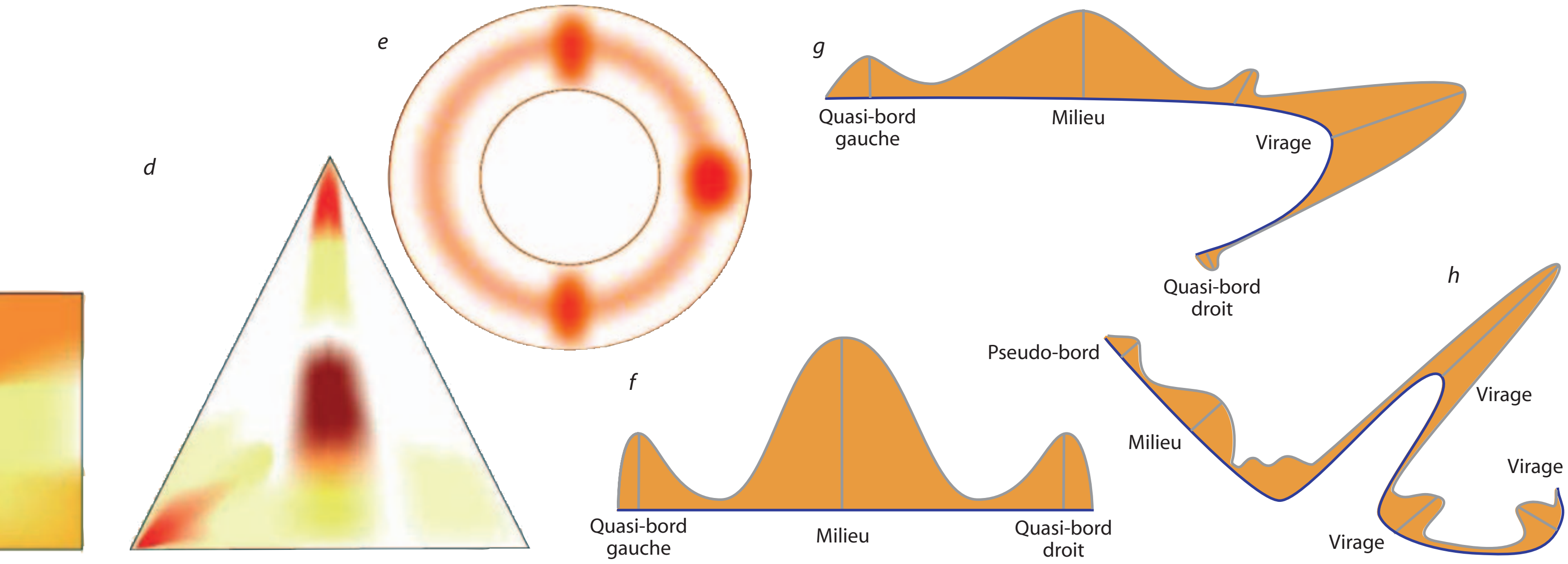
Soumis à une consigne de production d'un nombre ou d'un point au hasard dans un domaine fixé, l'être humain en est incapable et effectue un choix selon une distribution de probabilités « humaine » qui rend perplexe.

En y regardant de près, les résultats obtenus avec les points du carré ou du disque possèdent des propriétés inverses de ceux obtenus avec les chiffres de 1 à 9. En effet, l'interprétation acceptée du biais en faveur du 7 est qu'il provient de ce que le chiffre 7 est le seul qui ne possède aucune propriété particulière immédiate, ou qui en a moins que les autres. Le chiffre 1 est la première des possibilités, il est donc très particulier ; le 9 est la dernière des possibilités ; 2, 4, 6, 8 sont des nombres pairs ; 3, 6, 9 sont multiples de 3 ; 5 est un nombre très particulier pour nous qui calculons en base 10. Seul 7 échappe à cette liste.

C'est donc le caractère « prototypique » du 7 – il apparaît « plus banal » que n'importe quel autre – qui le favorise, car le sujet à qui on demande de choisir un chiffre au hasard essaierait sans en avoir conscience de retenir un chiffre aussi quelconque que possible et par un processus d'élimination mentale rejetterait le 1 très souvent, le 2 assez souvent, etc. Le 7 étant moins souvent rejeté se trouverait alors proposé dans une plus grande proportion de cas, produisant la répartition indiquée ci-dessus. (Rappelons ici, en clin d'œil, le petit paradoxe : être le plus banal transforme le 7 en un nombre remarquable, qui devrait être évité...)

Dans le cas géométrique, les points privilégiés du hasard mental humain sont les points structuraux de la figure ou plus exactement les zones proches des points structuraux. Ces attracteurs de la figure à l'inverse du cas des chiffres sont particuliers et ne sont donc pas prototypiques. Les points que le sujet humain choisit de manière privilégiée dans le cas géométrique sont les points géométriques saillants de la figure, qui, s'ils se comportaient comme pour les chiffres, seraient au contraire systématiquement évités ! Les psychologues s'interrogent sur ce paradoxe nouveau.

Pour lever ce paradoxe, une première remarque a été faite. Les expériences sur les mouvements oculaires de sujets à qui on présente une figure géométrique ont mis en évidence que l'œil s'arrête sur les points structuraux de la figure – dont en priorité le centre –, points qui sont justement les attracteurs géométriques des expériences sur les points aléatoires. Tout se passe donc comme si lorsque l'on demandait à un sujet de



Dans les deux cas, on interprète cela comme une forme géométrique du biais de positivité : le haut étant jugé plus positif que le bas (« sa santé est au plus bas », « il est au sommet de sa forme »), la droite que la gauche (« il est très gauche », « il est adroit »). Pour les lignes (segments et courbes), les zones choisies semblent liées à la fois à la position relativement à l'ensemble de la ligne (les zones proches du centre et des extrémités sont attractives) et à la courbure (les zones de forte courbure, quand il y en a, sont attractives).

choisir un point au hasard, il analysait la figure en s'arrêtant sur les points que son système visuel le force inconsciemment à privilégier, et choisissait alors le point à produire en conformité avec cette « densité d'attention » dont il n'a pas le contrôle. Un fonctionnement inconscient et irrépressible lié aux algorithmes d'analyse d'images du cerveau perturberait le choix des points aléatoires.

Un complément assez subtil à cette analyse a été proposé qui éclairerait l'opposition paradoxale entre hasard mental géométrique et hasard mental arithmétique. L'idée est de s'appuyer sur la différence de nature entre l'ensemble discret des entiers et l'ensemble continu des points d'une surface. S. Wiegersma, en 1982, a décrit un modèle de production des suites aléatoires (nommé « forçage et correction ») qui explique assez bien les biais observés. Ce modèle suppose que, lors des expériences de choix aléatoires, le processus mental se déroule en deux étapes. La première étape est influencée par l'accessibilité des réponses possibles et là, bien sûr dans les expériences géométriques les points attracteurs sont privilégiés (il y a « forçage » par le système visuel d'exploration d'images).

Une seconde étape dite de « correction » efface certains biais de la première phase en modifiant le choix qu'on s'apprête à effectuer. On peut alors formuler une double hypothèse : *(a)* Dans le monde discret des 9 alternatives 1, 2, ..., 9, il n'y a pas de moyens simples de corriger des erreurs par de petites variations et, en conséquence, les sujets rejettent purement les alternatives non souhaitables (possédant des propriétés particulières évidentes). *(b)* Dans un monde géométrique continu, au contraire, le sujet peut modifier la réponse produite par la première étape en faisant légèrement varier son choix, mais en restant quand même proche des réponses produites par la première étape.

Cette explication qui résout le paradoxe de la différence entre le hasard géométrique et le hasard arithmétique, présente deux avantages : d'une part, elle permet de comprendre pourquoi les points choisis sont souvent proches des points structuraux sans être exactement les points structuraux (très rarement choisis). D'autre part, elle explique pourquoi les points structuraux apparaissent globalement comme attracteurs.

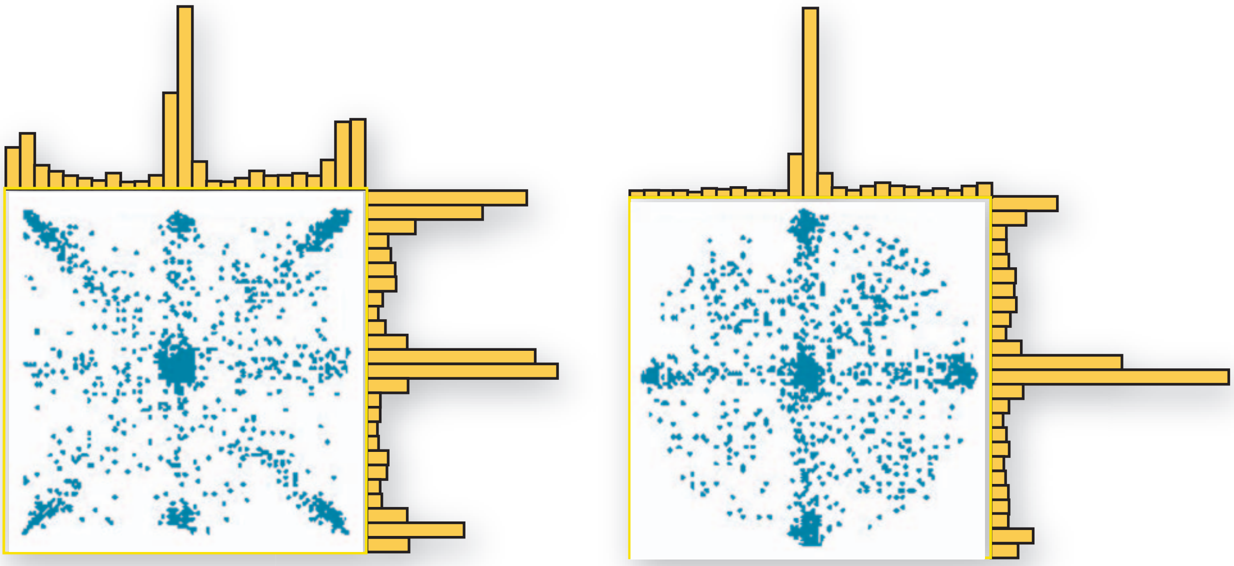
Le biais en faveur de la partie supérieure du dessin échappe à cette explication et semble d'une autre nature. Il est vraisemblable qu'il correspond à un biais de positivité géométrique : tout mouvement et tout point vers le haut étant considérés positivement alors que tout point et tout mouvement vers le bas sont perçus négativement. Cette positivité du haut, symétrique à la négativité du bas, est attestée par de nombreuses expressions du langage courant : « Avoir le moral au plus bas », « Ascension sociale », « Chute de popularité », « Des hauts et des bas », « Être au sommet », etc. De même que nous choisissons plus souvent OUI que NON quand on nous demande de choisir entre OUI et NON au hasard, nous choisirions un peu plus souvent un point dans la partie supérieure du dessin – considérée « positive » – que dans la partie inférieure.

D'autres figures ?

Les expériences de J. Christie ont été complétées en 2004 par des expériences analogues, réalisées à l'Université de Metz, concernant d'autres figures. Deux sortes d'ellipses (l'une aplatie, l'autre allongée selon la verticale), un rectangle beaucoup plus large que haut, un triangle isocèle, un anneau et des courbes ont été proposés à des sujets qui devaient comme précédemment y placer un point au hasard (un seul cette fois).

Les résultats confirment ceux obtenus pour le cercle et le carré : un privilège est conféré au centre et plus généralement aux points structuraux (définis comme pour le carré et le cercle). Le léger biais en faveur de la partie supérieure confirme le biais de positivité observé dans le cas du carré et du cercle et en atteste la nature générale. Un biais en faveur de la droite, assez net dans plusieurs expériences, semble aussi une forme géométrique du biais de positivité (la partie droite d'une figure, associée à la direction du mouvement d'écriture dans notre civilisation européenne,est perçue plus positivement que la partie gauche).

Le cas du triangle est intéressant, car la notion de centre pour un triangle n'est pas unique. Il y a quatre candidats possibles : le point de concours des hauteurs (orthocentre) ; le point de concours des médianes (centre de gravité) ; le point de



4. Consigne : « deviner ». Dans ces deux séries d'expériences, les sujets sont invités à placer trois points, chacun à l'intérieur du carré ou du disque, à l'emplacement qu'ils pensent être le plus souvent choisi par un sujet à qui l'on demande de placer un point au hasard. Les figures obtenues par superposition de toutes les réponses donnent une version contrastée de celles obtenues avec la consigne « placer au hasard » : les sujets humains ont une certaine connaissance du biais en faveur des points structuraux.

concours des médiatrices (centre du cercle circonscrit au triangle) ; le point de concours des bissectrices (centre du cercle inscrit dans le triangle) ? Auquel de ces quatre points, le cerveau soumit à une consigne de production de points au hasard, va-t-il donner l'importance la plus grande ? Sans trancher définitivement à cause d'un nombre de points global un peu faible, il semble que, pour un cerveau humain, le centre du triangle soit le centre de gravité.

Remarquons aussi que les différents sommets d'un triangle ne sont pas choisis avec la même fréquence. Comme dans le cas du cercle, le cerveau plaque sur la figure elle-même un système d'axes et considère que la médiatrice verticale est plus importante (plus attrayante) que les deux médiatrices obliques. Le sommet en haut est nettement plus attracteur que les deux autres, ceci résultant sans doute de l'attraction de l'axe vertical du triangle (favorisé parce qu'il est vertical) et du biais de positivité géométrique observé, de manière générale, pour toutes les figures.

Dans le cas de l'anneau, outre les habituels axes horizontaux et verticaux, on note que les points se placent majoritairement à une distance du centre proche de la moyenne $r = (r_1 + r_2)/2$ entre les valeurs des rayons r_1 et r_2 du petit et du grand cercles définissant l'anneau. Dans une telle figure où le centre ne peut pas être choisi (puisqu'il est à l'extérieur de l'anneau), le « cercle central » de rayon r se substitue à lui et attire fortement les points choisis « au hasard » par les sujets.

Connaître et s'affranchir des biais

Lors de ses expériences, J. Christie s'est interrogé sur un autre aspect du hasard géométrique mental : sommes-nous conscients de cette répartition de probabilité non uniforme que nous plaquons sur toute figure géométrique ?

Pour le savoir, il a demandé aux sujets de son expérience de placer un point dans le carré et le cercle placé devant eux à l'endroit qu'ils pensaient être choisi avec la plus grande probabilité par une personne à qui on demande de placer un point au hasard dans le cercle ou le carré. Il a demandé aussi de placer un deuxième et un troisième points en suivant la même consigne. Ces expériences de type « deviner » ont été encore complétées par des expériences de type « se cacher ».

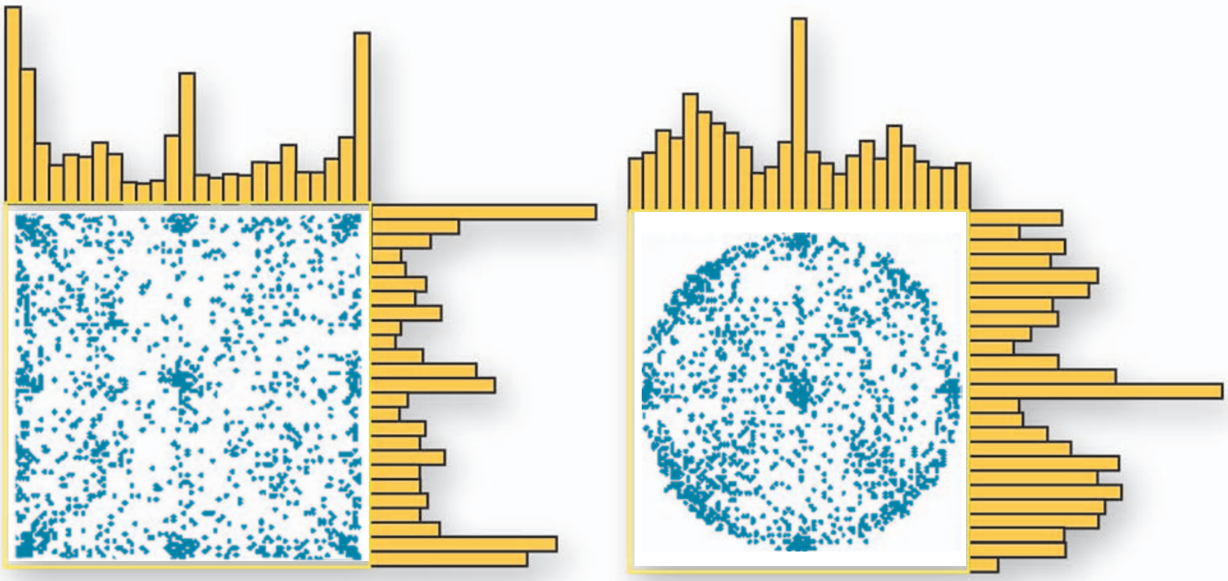
La consigne était cette fois : placer un point (puis un second, puis un troisième) à l'endroit que vous pensez avoir le moins de chances d'être choisi par quelqu'un à qui on demande de placer un point au hasard (c'est la question que se pose un fugitif qui cherche un endroit imprévisible où aller dans un espace carré ou circulaire).

Au total, chaque sujet avait 18 points à placer sur les figures qui lui étaient présentées : trois pour les expériences « choisir au hasard » à propos du cercle, trois pour les expériences « deviner » à propos du cercle, trois pour les expériences « se cacher » à propos du cercle, et neuf autres pour le carré. Pour chaque sujet, l'ordre des expériences était déterminé au hasard de manière à gommer les effets d'influence de l'une à l'autre.

Les comparaisons entre les figures obtenues pour les trois types de consignes « placer au hasard, « deviner » et « se cacher » sont particulièrement intéressantes. Les figures pour la consigne « deviner » montrent une répartition de probabilités assez proche de celle produite par la consigne de base (consigne « placer au hasard »), mais elle est plus nette, c'est-à-dire plus contrastée. Le centre est encore plus fréquemment choisi, de même pour les sommets et les axes. L'interprétation de ce résultat est immédiate : les sujets humains ont une certaine connaissance du biais de choix dont ils sont victimes. Ils savent, plus ou moins confusément, qu'un sujet humain favorisera les points structuraux.

Puisqu'ils connaissent ces biais, les sujets devraient avoir l'aptitude d'en annuler les effets : c'est partiellement le cas, comme les figures produites par les expériences « se cacher » le démontrent *(voir la figure 5)*. Ces figures sont moins contrastées que celles provenant des deux précédentes expériences, c'est-à-dire correspondent à des distributions de densité plus proches de la densité uniforme. Remarquons cependant que la densité obtenue n'est pas parfaitement uniforme car le centre, les sommets et les milieux des côtés sont encore privilégiés pour le carré.

La vague connaissance que possèdent les sujets humains des biais de choix est donc au total imparfaite : une connaissance précise (celle que vous tirerez de la lecture de cet article !) conduirait dans le troisième type d'expérience à une répartition de probabilité « complémentaire » (en négatif) de



5. Consigne : « se cacher ». Les sujets placent trois points chacun, là où ils jugent le moins probable qu'un sujet humain placerait des points « au hasard ». Les distributions observées privilégient toujours les points structuraux. Ce sont cependant des distributions plus proches d'une distribution uniforme. Même si les sujets semblent collectivement avoir une certaine compréhension des biais humains en faveur des points structuraux, le pouvoir attractif de ces points continue de s'exercer sur eux, mêmes quand ils tentent d'y échapper.

celle de la première expérience. Or ce n'est pas le cas. Tout se passe comme si la force des attracteurs géométriques, même connue, ne pouvait pas être totalement annulée, et continuait à s'exercer y compris quand on cherche à en éviter les effets.

Lors de ces expériences, les points placés pour la consigne « se cacher » étaient légèrement plus souvent dans la partie basse de la figure que dans la partie haute. Cela démontre une connaissance collective du biais de positivité géométrique des sujets participant à l'expérience.

Gauchers, droitiers et Turing...

Un autre effet remarquable a été noté et prouvé statistiquement significatif par J. Christie. Il concerne la différence entre gauchers et droitiers. Dans l'expérience « se cacher » avec le carré, les gauchers choisissent plus souvent le coin en bas à gauche et le coin en haut à droite, alors que les droitiers privilégient légèrement le coin en haut à gauche et le coin en bas à droite. L'interprétation définitive ne semble pas facile à formuler, tout juste peut-on remarquer qu'un gaucher qui place sa main à côté de la figure accède plus facilement aux coins en haut à gauche et en bas à droite (il n'a pas besoin de plier ou d'étendre les doigts) et qu'il est donc plus facile pour lui de marquer son choix dans ces coins que les autres. Lorsqu'on lui demande de marquer un point ayant moins de chances d'être choisi, l'effort un peu particulier qu'il doit faire pour accéder aux coins en bas à gauche ou en haut à droite lui fait croire (peut-être) que ce seront des zones moins choisies et il les sélectionne donc plus facilement quand il est soumis à la consigne « se cacher ». Pour un droitier, la situation étant inverse lorsqu'il répond à la consigne « se cacher », il favorisera légèrement les coins en haut à gauche et en bas à droite.

Un biais un peu renforcé en faveur du centre chez les sujets ayant réalisé les expériences avec un ordinateur a aussi été noté. Il pourrait s'expliquer par des considérations du même type : la place naturelle du pointeur avec la souris de l'ordinateur est le centre de l'écran, alors que la place au repos d'un crayon quand on travaille sur une feuille est sur le côté (droit ou gauche selon qu'on est droitier ou gaucher) pour ne pas masquer la figure avec la main. Il en résulterait que le centre dans le cas de tests effectués avec l'ordinateur serait légèrement plus favorisé que dans le cas de tests effectués avec crayon et papier. Seules d'autres expériences pourront confirmer ou infirmer de telles hypothèses.

La carte mentale de l'esprit humain, soumis à une consigne de production d'aléas, est complexe et marquée par toutes sortes de contraintes et de biais qui s'additionnent. Décidement, le fonctionnement logique et les calculs des cerveaux ne ressemblent en rien à ceux des ordinateurs.

Robert French proposait pour passer le test de Turing – destiné à distinguer un comportement humain d'un comportement programmé d'ordinateur – d'exploiter les capacités linguistiques des humains. Les capacités humaines sont si particulières (déterminées par des traits mentaux sub-linguistiques complexes) qu'elles sont sans doute extrêmement difficiles à copier dans une machine. En conséquence, d'après R. French, elles permettent et permettront encore longtemps de distinguer l'homme de la machine. On peut aussi suggérer, pour établir cette distinction, de demander à la machine et à l'humain d'engendrer des nombres au hasard ou des points au hasard sur une figure : le cerveau humain est si particulier, et les densités de probabilités qu'il produit sont si caractéristiques, qu'il se distinguera facilement de toute machine, laquelle produira des densités de probabilités uniformes qui la trahiront.

Auteurs & Bibliographie

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille. **Nicolas GAUVRIT** est maître de conférences en mathématiques à l'IUFL Nord-Pas-de-Calais.

J.-P. DELAHAYE, *Les inattendus mathématiques*. Chapitre 11 : *Notre vision du hasard est bien hasardeuse*, Ed. Belin/Pour la science, 2004.

J.-P. DELAHAYE, *Les dés pipés du cerveau*, Pour la science, décembre 2004.

J. CHRISTIE, *Exploring the Nonrandomness of Human Spacial Choice Behaviour : The Cause of Selection, Defense and Civil Institute of Environmental Medicine Technical Report,* 2001, 49 pages.

N. GAUVRIT. *Les irrémédiables structures du hasard humain*. Dans "Le hasard :une idée, un concept, un outils" sous la direction de J.-P. Delahaye, L'Harmattan, 2005.

NICOLAS GAUVRIT, *Aléas Géométriques*, Rapport de recherche du Laboratoire ETIC, département de psychologie, Université de Metz, 2003, 23 pages.

NICOLAS GAUVRIT, JEAN-PAUL DELAHAYE, *Gini's Generalized Index and Perceived Scatter. International Meeting of the Psychometric Society,* 2005), p.70.

L. GLASS, *Looking at Dots*, *in The Math. Intelligencer*, 2002, n° 4, pp. 37-43.