Impossible ! En êtes-vous certain ?

Les fausses perspectives ont inspiré les créateurs des énigmatiques « figures impossibles ». Notre système visuel nous fait croire qu'elles sont absurdes alors qu'elles sont réalisables et suscitent un double plaisir, l'étonnement suivi de la compréhension.

Le bouton à quatre trous, procédé d'attache vestimentaire proposé en 1872 par Alexandre Massé, né en 1829 à Quimper, est un objet d'une extrême simplicité qui possède l'avantage sur son ancêtre, le bouton à deux trous, de ne pas glisser car il ne pivote pas. Après avoir rendu riche son génial inventeur, il est aujourd'hui présent sur plus d'un vêtement sur deux et il existe en plusieurs centaines de milliards d'exemplaires (vous en avez certainement quelques-uns sur vous). Il aurait pu être inventé un millénaire plus tôt et même dans l'Antiquité : il est amusant de penser que le grand Aristote ignorait l'existence de ce bouton qui lui aurait pourtant amélioré la vie.

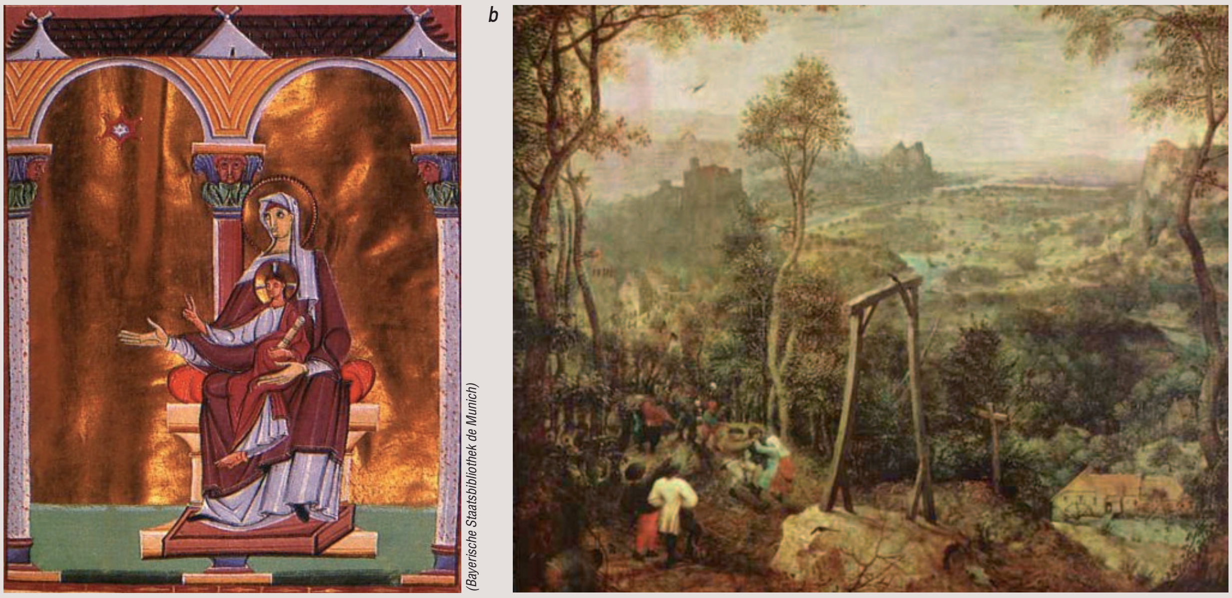
La bicyclette, l'énoncé du théorème des quatre couleurs, l'impossibilité d'une bijection entre les entiers et les points d'une droite, le jeu de la vie de Conway, les *Post-it* et les figures impossibles sont d'autres découvertes récentes d'une grande simplicité dont on s'explique mal qu'elles aient tant tardé à surgir dans l'esprit humain. Elles nous conduisent à nous demander si aujourd'hui nous ne passons pas à côté d'autres idées qu'un aveuglement – qui semblera incompréhensible à nos descendants – nous empêche de formuler.

Reutersvärd et personne d'autre !

Le cas des figures impossibles et leur inépuisable variété nous conduira du monde de la psychologie à celui de l'informatique graphique en passant bien sûr par celui de l'art fantastique et des mathématiques. Des résultats récents montrent à la fois les progrès réalisés dans la compréhension des figures impossibles et les insuffisances de notre réflexion.

En cherchant bien, nous retrouvons des traces – plutôt confuses – d'objets impossibles dans des peintures ou des gravures anciennes *(voir la figure 1)*. Il n'est pas bien certain

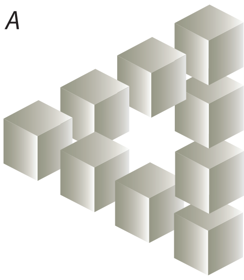
a b



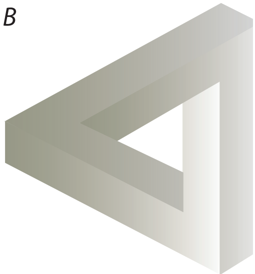
(Bayerische Staatsbibliothek de Munich)

1. Précurseurs des figures impossibles. Dans le livre des *Péricopes* d'Henri II, datant d'avant 1025, figure un portrait de la Vierge *(a)* où la position des colonnes du décor est paradoxale. On peut penser que l'erreur n'est pas voulue, mais un défaut dans la compréhension de la perspective. La peinture de Bruegel de 1568, *La pie sur le gibet (b)*, comporte en son centre une potence dont la forme géométrique est bizarre : l'artiste a-t-il intentionnellement placé cet étrange objet dans son œuvre ou s'agit-il d'une maladresse cependant que leurs auteurs aient opéré volontairement ces tracés, et on se demande s'il ne s'agit pas simplement d'ignorance, de négligence ou d'erreurs dans l'application des lois de la perspective. Dans le cas de la gravure de William Hogarth ou du lit impossible de Marcel Duchamp, le dessin est délibéré, mais on est loin d'une idée simple et aucune de ces prétendues figures impossibles anciennes n'est dégagée du monde concret qui semble, à tort, indispensable à leur pouvoir de tromperie.

A



B



L'inventeur des figures impossibles ne fait aucun doute : c'est le Suédois Oscar Reutersvärd (1915-2002). En 1934, durant un cours de latin, le jeune Oscar s'ennuie et se met à dessiner, sans bien comprendre ce qu'il fait, une série de neuf cubes *(A)* dont la disposition est paradoxale. En les reliant, on obtient le fameux « triangle impossible » *(B)*. L'invention des figures impossibles est faite ; conscient de ce qu'il dessine, Oscar Reutersvärd continuera de mener ses recherches sur les paradoxes de la perspective durant le reste de sa vie.

Ce triangle réinventé deux décennies plus tard par le mathématicien Roger Penrose et son père Lionel Penrose fut présenté en 1958 dans un article scientifique du *British Journal of Psychology*. Il est aujourd'hui injustement appelé tripoutre de Penrose ou tribarre de Penrose. D'innombrables déclinaisons en ont été proposées.

Oscar Reutersvärd, qui inventa et dessina des centaines de figures impossibles, a été honoré par son pays, la Suède, qui édita en 1982 une série de timbres poste reproduisant certaines de ses œuvres *(voir la vignette ci-dessus)*. Par ses magnifiques gravures, Maurits Cornelis Escher conféra une immense notoriété à ces objets géométriques troublants et, le premier, les mit au centre de créations graphiques complexes rayonnant d'une beauté magique.

Aujourd'hui, d'autres artistes poursuivent ce jeu des figures impossibles et des perspectives faussées. Ils créent des œuvres provocantes dont le pouvoir hypnotique amuse et émerveille ; parmi les plus habiles de ces artistes, citons Sandro Del Prete, pour nous le premier, R. Gonsalves, Jos De Mey, S. Burato, G. Moretti, B. Ernst, S. Fukuda, M. Hamaekers, R. Shepard, I. Orosz.

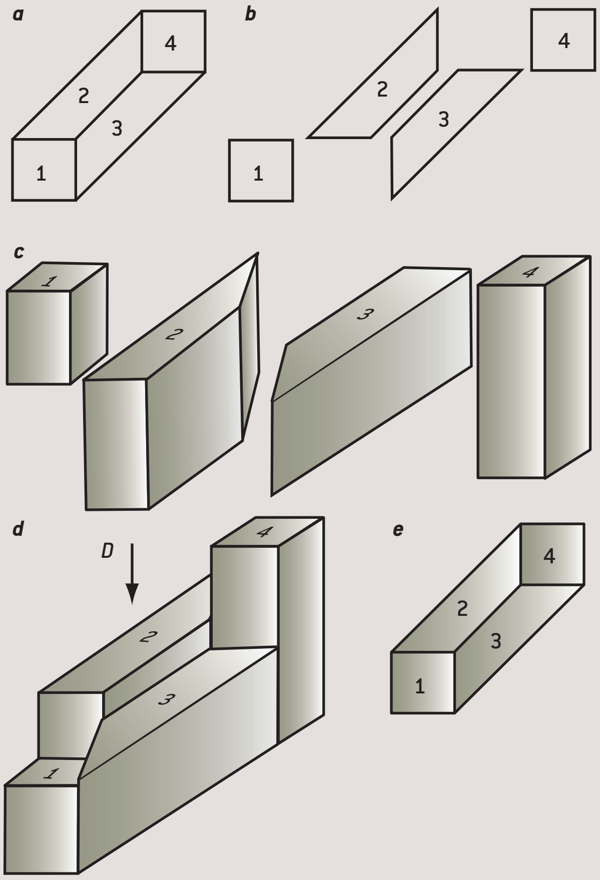
Outre l'incroyable variété des objets impossibles inventés depuis 1934 par les amateurs de paradoxes graphiques, de nombreuses questions à leur sujet ont été examinées dans les centaines d'articles qui leur ont été consacrés. Ces petits dessins prétendument absurdes posent de nombreuses énigmes et les recherches récentes à leur

c

d

dans le rendu en perspective de la potence ? La gravure de William Hogarth *(c)* de 1754 est un jeu sur la perspective comportant des fautes volontaires. Le personnage qui allume sa pipe est situé sur une colline loin derrière la maison où quelqu'un lui tend du feu. Similairement, dans le troupeau, la taille des animaux les plus éloignés est la plus grande ! De même pour les arbres. Marcel Duchamp, en 1917 *(d)*, reprend une affiche publicitaire et en fait un tableau comportant un lit paradoxal.

2. Comment les rendre possibles ?



« Peut-on rendre possible des figures paradoxales ?» Une réponse simple consiste à créer des structures en fil de fer : un fil pour chaque segment ! Des méthodes plus intéressantes existent et le théorème suivant montre qu'à de nombreux dessins au trait (même des figures impossibles) on peut associer des objets polyédriques qui en donnent l'image.

Théorème. *Pour toute figure F composée de segments de droites et décomposable en une réunion de polygones, il existe une série de polyèdres P_1, ..., P_n et une direction D, tels que la projection des polyèdres P_1,..., P_n parallèlement à la direction D sur un plan orthogonal à D donne la figure F.*

Autrement dit, un œil placé à l'infini dans la direction *D* voit la figure *F* en regardant P_1, ..., P_n. Ce théorème s'applique au triangle de Penrose et à la plupart des objets considérés. Il peut être généralisé pour englober des dessins contenant des courbes ou pour prendre en compte d'autres types de perspectives.

La démonstration de ce théorème est facile. Les hypothèses sur la figure *F (a)* permettent de la décomposer en un pavage *(b)* de polygones A_1, ..., A_n ne se coupant pas (certains segments peuvent être utilisés deux fois pour cette décomposition). On crée pour chaque polygone A_i de la décomposition *(c)* un polyèdre P_i ayant deux faces de forme A_i perpendiculaires à *D* et jointes entre elles, sommet par sommet (P_i est un cylindre de base A_i). Vu de loin *(d)* dans la direction *D*, le polyèdre P_i donne l'image A_i. En prenant des hauteurs différentes pour les polyèdres associés aux A_i (de façon à ce qu'aucun côté ne disparaisse quand on fusionne les polyèdres) on obtient l'ensemble recherché de polyèdres *(e)*. Remarquons que le théorème ne s'applique pas aux figures impossibles 3*g* et 3*j* dont le dessin au trait ne se décompose pas en une série de polygones.

sujet améliorent notre compréhension de la perception humaine de l'espace, laquelle reste pourtant toujours un défi.

Définition d'une figure impossible

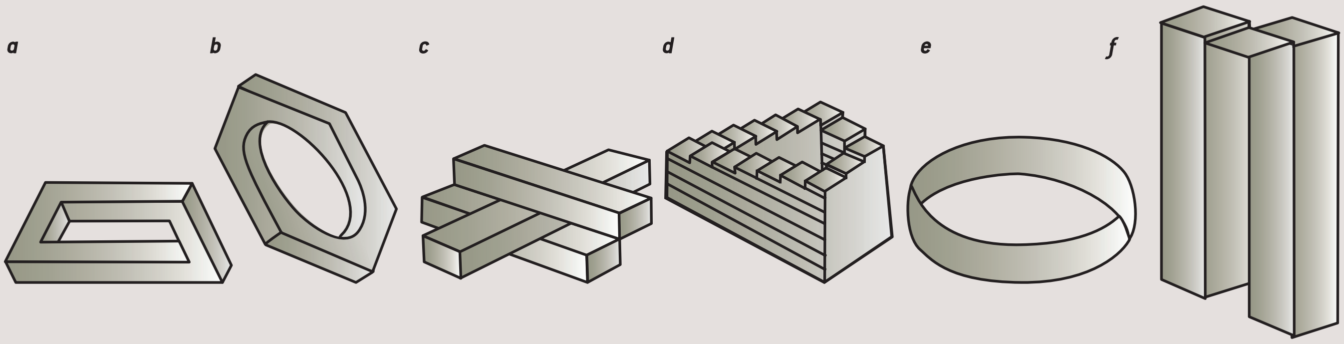
Au premier coup d'œil, une figure impossible semble représenter un objet tridimensionnel habituel, mais son examen détaillé révèle une impossibilité : aucune interprétation cohérente du dessin entier ne semble concevable. La figure impossible tend un piège à notre système visuel.

Le fonctionnement général du piège est le suivant : chaque partie de la figure est interprétée immédiatement par notre cerveau comme la représentation d'un objet de l'espace, et c'est seulement en passant d'une partie à l'autre et en tentant de concilier l'interprétation des différents morceaux, que le caractère paradoxal de la figure se manifeste. Selon les figures, il s'agit :

- de deux plans qui ne devraient pas se rejoindre, parce que l'un est plus éloigné que l'autre, et qui pourtant le font ;
- d'une face de l'objet représenté qui selon la façon dont on la regarde, est vue de dessus ou de dessous ;
- d'une zone dans le dessin qui, semble pleine ou vide selon qu'on la regarde avec une partie du dessin ou avec une autre ;
- d'un angle joignant deux plans, qui est « en creux » ou « en bosse » ; etc.

Aussi étonnant que cela paraisse, toutes les figures dites « impossibles » sont possibles. On le prouve en énonçant des théorèmes généraux *(voir la figure 2)* ou en réalisant des objets dans l'espace qui, lorsqu'on les photographie, produisent sur la photo les figures voulues. Une série d'exem-

3. Petite collection de figures impossibles



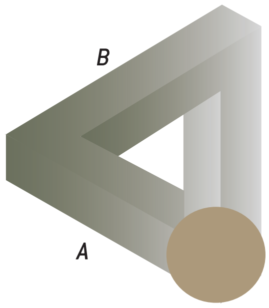
ples est présentée à la figure 3. La contradiction que l'observateur croit percevoir au sein même de ces figures provient des hypothèses simplificatrices que fait notre esprit et qui le conduisent dans des impasses interprétatives.

Dans la plupart des situations courantes, ces hypothèses – par exemple « les surfaces délimitant les objets sont des bouts de plan » ou « ce qui apparaît rectiligne sur le dessin est effectivement une droite de l'espace » – lui permettent de déchiffrer rapidement et correctement les images du monde réel. Dans le cas des figures impossibles, ces hypothèses conduisent à imaginer des agencements relatifs de surfaces et de volumes qui ne sont pas compatibles d'une partie du dessin à une autre. Le système visuel piégé ne trouve pas le moyen de revenir en arrière sur les interprétations partielles qu'il produit, alors que de telles remises en cause le conduiraient à une solution de l'apparent paradoxe. Il tourne alors en rond dans la recherche vaine d'une interprétation globale qui existe pourtant, mais qu'il ne découvre jamais.

De nombreux exemples de photos de figures paradoxales ont été proposés depuis longtemps. Ces matérialisations de l'impossible furent d'abord élémentaires, puis plus complexes comme celle de Shigeo Fukuda qui proposa dès 1982 une version en bois et plastique de la gravure *Le Belvédère* d'Escher.

Fukuda réalisa aussi en 1985 une version de la *Chute d'eau* de Escher dont Andrew Lipson, un passionné du Lego, a depuis proposé une version en Lego (http://www.andrewlipson.com/lego.htm), alors qu'un génial bricoleur, James Dyson, trouva une méthode pour réaliser une fontaine analogue avec de l'eau véritable semblant s'écouler indéfiniment (http://news.bbc.co.uk/1/hi/uk/3046791.stm).

L'exemple de la tripoutre impossible va illustrer le mécanisme de l'apparente contradiction et sa résolution par la fabrication d'objets qui, sous le bon angle, se présentent comme des figures impossibles. Considérons deux coins du triangle impossible et masquons le troisième, comme ci-dessous.

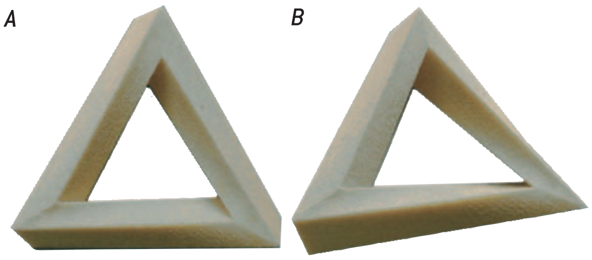


L'interprétation qui s'impose pour cette figure est celle de trois bâtons à section carrée *A, B* et *C*, collés orthogonalement deux à deux et formant une sorte de zigzag dans l'espace. Bien sûr, les extrémités des bâtons *A* et *C*, selon cette interprétation, ne se rejoignent pas, et donc, en découvrant la jonction entre *A* et *C* surgit un dessin complet que le système visuel juge alors impossible. Deux des coins du triangle sont toujours compatibles, mais pas trois – semble-t-il.

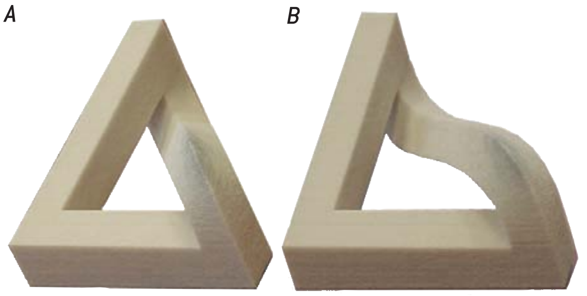
Matérialiser l'impossible

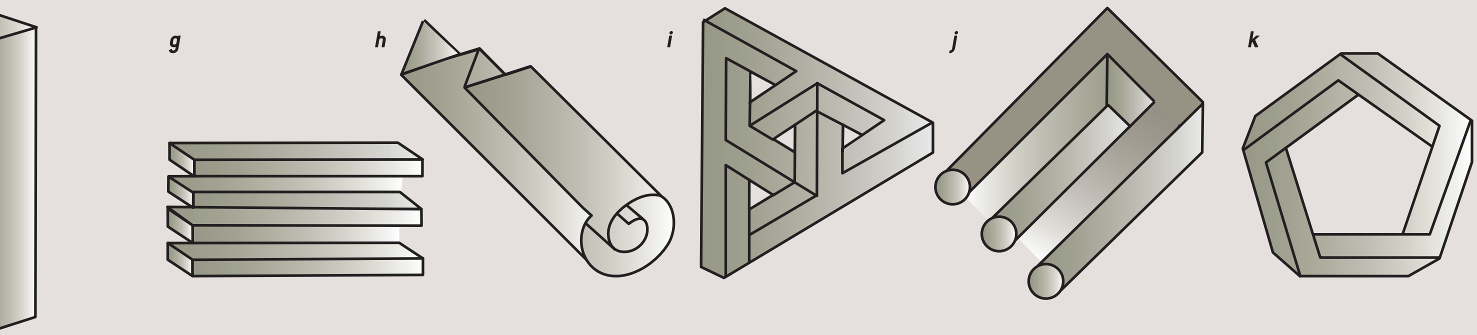
Pourtant, trois méthodes au moins permettent de construire un objet de l'espace qui produit l'image de la tripoutre.

(a) La première méthode consiste à ne pas respecter l'hypothèse implicite de notre système visuel selon laquelle « les surfaces délimitant les objets sont des bouts de plan ». Les photographies suivantes, de Gershon Elber (http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal/), montrent un objet géométrique réel qui, photographié sous le bon angle (*A*), correspond exactement à la tripoutre paradoxale. Bien sûr, vue sous un autre angle (*B*) on comprend l'arnaque : les faces de l'objet réel sont en en réalité des surfaces complexes et non pas des morceaux de plan.

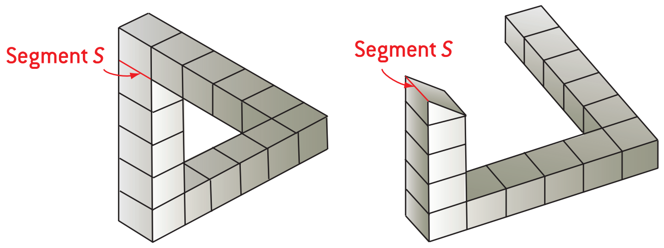


(b) La seconde méthode consiste à ne pas respecter l'hypothèse implicite que « ce qui apparaît rectiligne sur le dessin est effectivement une droite de l'espace ».





(c) Parmi les méthodes utilisées pour rendre possibles les figures paradoxales, l'une des plus efficaces consiste à faire coïncider deux segments distincts de l'objet réel. Notre système visuel, qui fait l'hypothèse qu'à chaque segment qu'il voit correspond un seul segment *S* de l'objet tridimensionnel, considère alors comme jointives des parties de l'objet qui ne le sont pas en réalité.



L'identification des hypothèses implicites que fait notre système visuel est essentielle pour la mise au point de systèmes de vision artificielle. L' algorithme de Waltz inventé en 1972, publié en 1975 et présenté aujourd'hui dans tous les cours d'Intelligence artificielle, a pour but de donner une interprétation tridimensionnelle à des dessins au trait composés uniquement de segments rectilignes.

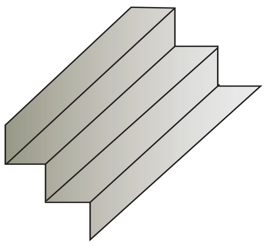
Cet algorithme fonctionne convenablement sous la réserve que l'objet représenté ne coupe pas le cadre du dessin, que jamais plus de trois traits ne se rejoignent en un même point, que les objets représentés soient des polyèdres (donc des objets à faces planes et à arêtes rectilignes).

Si on lui soumet un objet impossible, deux cas se présentent :

– l'algorithme de Waltz n'en trouve aucune interprétation tridimensionnelle, ce qui signifie en quelque sorte qu'il a repéré qu'il s'agit d'une figure impossible (sous les hypothèses qui sont les siennes) ;

– ou alors, comme un être humain, il se fait piéger, et propose une sorte d'interprétation, dont l'observation attentive montre qu'elle n'est pas globalement cohérente.

L'algorithme de Waltz détecte par exemple l'impossibilité de l'escalier ci-dessous, mais pas celle de la tripoutre.



Depuis 1972, une multitude de perfectionnements – et de complications ! – ont été proposés à cet algorithme pour améliorer ses capacités à interpréter les dessins au trait et affaiblir les hypothèses concernant les dessins qu'on lui soumet. Aujourd'hui cependant aucun programme informatique n'obtient de résultats totalement satisfaisants. Dans un article de synthèse sur le sujet faisant le bilan de 30 ans de recherche, P. Varley, R. Martin et H. Suzuki, trois spécialistes de la vision par ordinateur, formulaient la conclusion suivante :

«À la question : 'Les ordinateurs peuvent-ils comprendre les dessins au trait ?' la réponse est donc : 'Oui, jusqu'à un certain point, mais ils sont très loin d'avoir une compétence équivalente à celle de l'esprit humain'. Les améliorations progressives des méthodes utilisées permettent aux programmes d'interpréter convenablement un nombre de situations de plus en plus grand, cependant bien des aspects de la capacité humaine à analyser les figures au trait n'ont pas encore été intégrées dans les programmes, tout simplement parce qu'ils n'ont pas encore été compris et identifiés.»

Notons que certaines formes d'agnosie visuelle ont pour conséquence l'incapacité des patients qui en sont atteints à reconnaître les figures impossibles, lesquelles ne leur apparaissent pas paradoxales (non pas parce qu'ils en trouvent une interprétation complexe, mais parce que leur système visuel a perdu la capacité à percevoir l'incompatibilité des interprétations partielles). En quelque sorte, nos ordinateurs en sont arrivés au niveau de ces agnosiques, mais n'ont pas atteint le niveau humain complet.

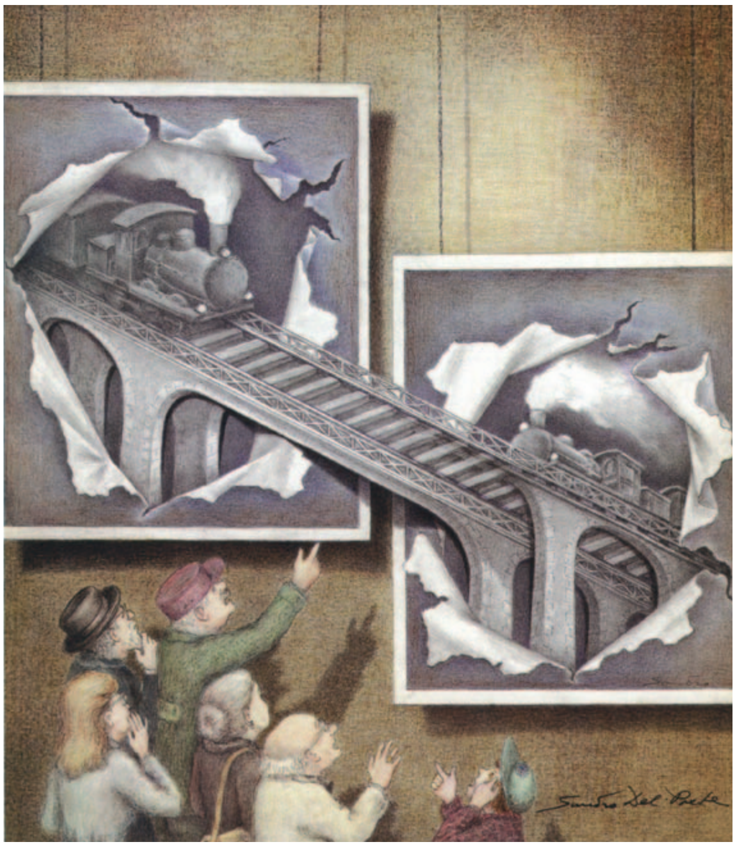
Certaines approches mathématiques ont tenté de caractériser les figures paradoxales : Roger Penrose propose d'utiliser les concepts de la cohomologie et Corine Cerf ceux de la théorie des tresses. Il semble cependant que ces méthodes sont plutôt moins puissantes que celles de l'algorithme de Waltz et de ses variantes,fondées sur l'énumération des divers types des jonctions possibles entre deux ou trois segments et leurs successions quand on suit les segments d'un dessin.

Concevoir les pièges tridimensionnels

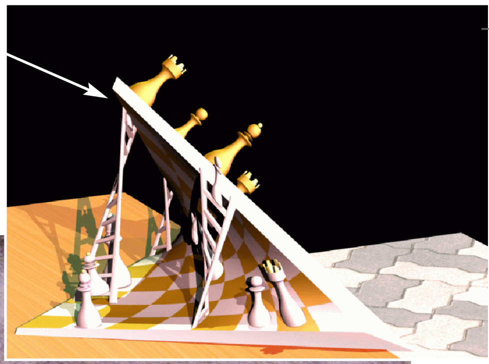
Les difficultés rencontrées en tentant de mettre au point des algorithmes qui égalent les capacités humaines d'analyse tridimensionnelle proviennent du subtil jeu d'hypothèses que notre cerveau adopte (parce qu'elles conduisent le plus souvent au bon résultat) et qu'il désactive lorsque cela devient nécessaire. Face à ce que nous appelons une figure impossible – et qui ne l'est jamais totalement, comme nous l'avons dit – l'ordinateur est mis en difficulté car il ne dispose pas d'un tel jeu d'hypothèses (encore mal identifié) ! Face à une image banale, l'ordinateur est aussi gêné, car plusieurs interprétations cohérentes en sont possibles. Ne retenir que la plus probable – ce que fait notre système visuel – est une tâche d'une extrême délicatesse.

L'ordinateur avec sa logique implacable est cependant d'une grande utilité pour concevoir les objets tridimensionnels qui, vus sous un certain angle, produisent une image bidimensionnelle donnée – appartenant éventuellement à la catégorie des figures impossibles.

Une théorie générale permettant de concevoir des objets tridimensionnels correspondant à des figures en apparence impossibles a été formulée en 1999 par Guillermo Savransky, Dan Dimerman et Graig Gotsman. En s'aidant de programmes informatiques, cette théorie a été appliquée systématiquement à une série de figures impossibles célèbres, produisant des modèles tridimensionnels des créations complexes de Maurits Escher, Sandro del Prete, Istvan Orosz et Jos De Mey.



Sandro Del Prete



4. « Tout ce que nous voyons ne correspond pas nécessairement à la réalité » dit Sandro del Prete, auteur de ces deux gravures. Les deux trains qui traversent l'image de gauche et en font partie vont-ils entrer en collision ? La gravure du jeu d'échecs à droite est « sens dessus dessous », figure impossible d'un échiquier dont G. Elber montre la possibilité en le photographiant selon la direction de la flèche.

À trois dimensions et en mouvement ?

Tous ces objets ont la propriété qu'ils ne produisent leur effet paradoxal que vus sous un angle particulier unique, et avec un seul œil. Se posent donc deux questions.

Peut-on imaginer des pièges visuels qui fonctionneraient en vision binoculaire, c'est-à-dire des couples d'images stéréoscopiques qui produiraient l'impression de voir en relief un objet paradoxal (par exemple la tripoutre impossible) ?

Peut-on imaginer un piège visuel qu'on pourrait faire pivoter et qui continuerait à produire une image paradoxale ?

La réponse à ces deux questions s'est révélée positive. D'une part, Donald Simanek a réussi dès 1998 à produire des images stéréoscopiques diverses correspondant à la tripoutre impossible. Quand vous regardez l'image, vous avez l'impression de voir en relief une image impossible.

De leur côté, Chih Khoh et Peter Kovesi ont réussi pour certains objets paradoxaux possédant un centre de symétrie à créer des animations graphiques où l'objet tourne sur lui-même (en restant paradoxal à chaque instant sous l'hypothèse que l'objet est un polyèdre). Cela se fait au prix d'une déformation continue de l'objet. Une image animée d'un tel objet peut être admirée en : http://www.csse.uwa.edu.au/~pk/Impossible/impossible.html

Comme en logique mathématique où les paradoxes jouent le rôle de stimulant, les paradoxes graphiques, outre le mystère qui semble les entourer et l'amusement qui résulte de leur observation, resteront encore longtemps un sujet de réflexion et d'étude pour ceux qui s'interrogent sur la perception du monde tridimensionnel par un système utilisant seulement deux yeux, c'est-à-dire deux images bidimensionnelles.

Auteur & Bibliographie

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

P. VARLEY, R. MARTIN et H. SUZUKI, *Can Machine Interpret Line Drawings ? Eurographics Workshop on Sketch-Based Interfaces and Modeling*, J. Hughes, J. Jorge Editors, 2004 , sketch.inesc.pt/sbm04/papers/12.pdf

G. SAVRANSKY, D. DIMERMAN et G. GOTSMAN, *Modeling and Rendering Escher-Like Impossible Scenes*, in *Computer Graphics*, vol. 18, n° 2, pp. 173, 179, 1999.

Donald SIMANEK, *Adding depth to illusion 1996* : www.lhup.edu/ffdsimanek/3d/illus2.htm

B. ERNST, *L'aventure des figures impossibles*, Taschen, Paris, 1990.

D.L. WALTZ, *Understanding line drawings of scenes with shadows*, in *The Psychology of Computer Vision*, 19, 91, 1975.

L. et R. PENROSE, *Impossible objects : A Special Type of Visual Illusion*, in *British Jour. of Psychology*, vol. 49, 1958.

Sur Massé, l'inventeur du bouton à quatre trous http://www.gwalarn.org/trinka/remarquable/bouton.html

G. ELBER, *Escher for Real and Beyond Escher for Real* : http://www.cs.technion.ac.il/ffgershon/EscherForReal/; http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/BeyondEscherForReal/

Chih KHOH et Peter KOVESI, *Animating impossible objects* http://www.csse.uwa.edu.au/ffpk/Impossible/impossible.html