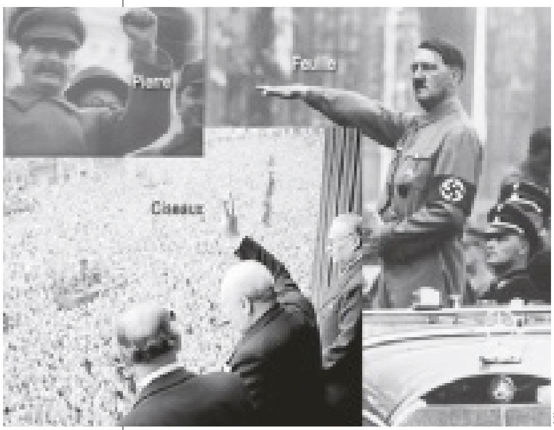
Jean-Paul Delahaye

Pierre, feuille, ciseaux...



kiliemo

Joué comme un jeu de conquête, l'ancien jeu chinois de la pierre, de la feuille et des ciseaux éclaire les phénomènes de synchronisation et de maintien de la diversité animale.

Les mathématiciens sont comme les Français : quoi que vous leur disiez, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent.
Goethe

Et de très intéressant... aurait dû ajouter Goethe : ainsi, les mathématiciens ont transformé un jeu d'enfants, *Pierre-feuille-ciseaux,* en un riche modèle des interactions animales. Qui n'a joué à ce jeu ? La pierre (P) casse les ciseaux, les ciseaux (C) découpent la feuille et la feuille (F) enveloppe la pierre. Deux joueurs placent chacun leur main droite dans le dos et choisissent l'un des trois symboles : le poing fermé pour la pierre, la main allongée pour la feuille, deux doigts en forme de ciseaux. Les deux joueurs dévoilent leur choix en avançant la main, parfois en proférant un cri. Si les deux choix sont identiques, ils recommencent, sinon le joueur qui détient le symbole le plus fort des deux a gagné le coup.

Le jeu est ancien et l'on en trouve des traces en Chine dès l'époque Ming (1368-1644). Il est connu dans le monde entier et ses variantes sont innombrables. On y joue avec un plus grand nombre de symboles, on ajoute le puits, le feu, l'eau, etc., ou alors avec d'autres triplets. Dans une version japonaise, les trois symboles sont le guerrier, le tigre et la mère du guerrier. Il y a aussi le feu, le serpent et l'eau, ou encore le serpent, la grenouille et la limace.

Parmi les stratégies du type « jouer P avec la probabilité x, jouer F avec la probabilité y, jouer C avec la probabilité z », nommées *stratégies mixtes*, la stratégie correspondant aux coefficients $x = y = z = 1/3$ est imbattable : si vous l'adoptez, tout joueur sera, à la longue, *ex aequo* avec vous ; il ne pourra ni vous battre... ni même perdre s'il le souhaitait. Cette stratégie ne résoudra pourtant pas toutes les questions que pose le jeu. D'une part, un être humain est incapable d'engendrer dans sa tête des choix vraiment aléatoires avec des probabilités fixées à l'avance : celui qui souhaite jouer la stratégie mixte 1/3-1/3-1/3 ne le peut pas ! D'autre part, les joueurs humains utilisent l'information sur les coups déjà joués : ils ne peuvent pas s'en empêcher même s'ils essayent. Le jeu est en partie psychologique et il y a parfois mieux à faire que la stratégie 1/3-1/3-1/3. Si, par exemple, vous remarquez que votre adversaire n'utilise pas P, alors en jouant invariablement C vous gagnerez toujours (s'il joue F, vous gagnez, s'il joue C, le coup est nul). Bien sûr, il risque de s'apercevoir de votre tactique et de se mettre à jouer P, ce qui vous perdra !

Certains logiciels jouent mieux que les êtres humains, car en repérant les régularités qu'ils adoptent (même quand ils font tout pour ne pas être réguliers), leur attitude donne un léger avantage à une machine attentive et bien programmée. Le programme *Sagace* de Christophe Meyer exploite ainsi les faiblesses humaines.

Comme nous allons le voir dans la suite de cet article, joué sur un graphe, le jeu en apparence simplet engendre des comportements collectifs inattendus et délicats à élucider. Certains mécanismes découverts lors de récentes études expliquent les phénomènes de synchronisation et d'uniformisation et éclairent le maintien de la diversité dans le monde biologique.

Les règles du combat

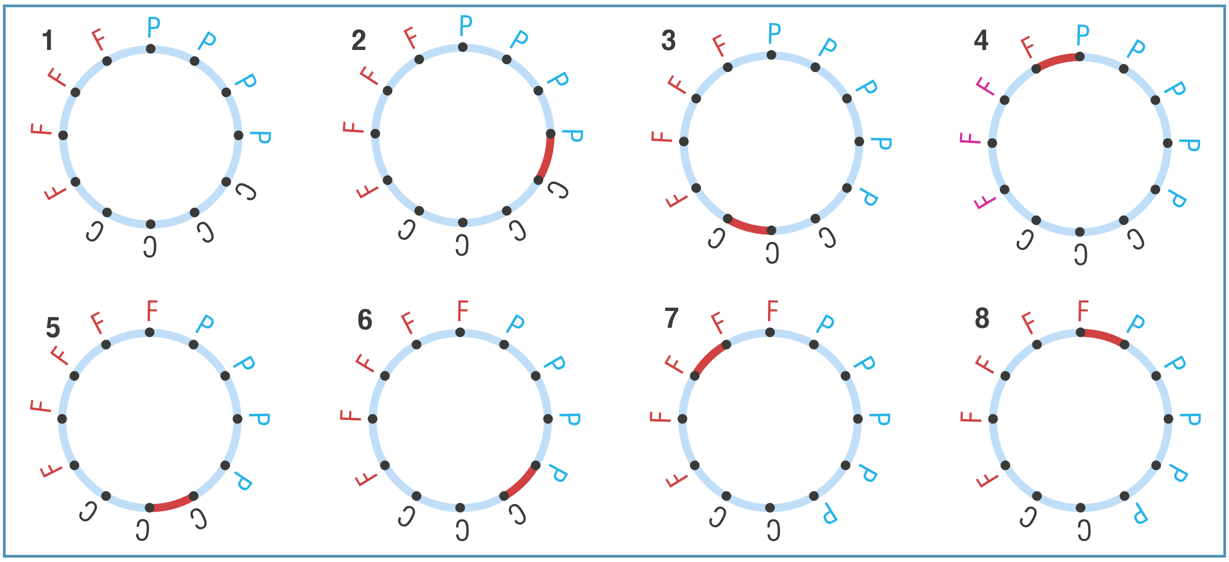
Dans le jeu sur un graphe, un ensemble de points est fixé, les nœuds du graphe. Sur chacun est placé un symbole de type P (pierre), F (feuille) ou C (ciseaux). Certains couples de points sont reliés par les *arcs* du graphe.

Cette disposition constitue la configuration initiale dont l'évolution se fait selon un processus aléatoire : un nœud N est choisi au hasard équitablement (chaque nœud a la même probabilité d'être choisi) parmi tous les nœuds et un nœud N' directement relié à N est choisi au hasard équitablement aussi. Si les deux symboles portés par N et N' sont de même force, rien ne se produit, sinon le plus faible des deux symboles est remplacé par le plus fort qui occupe alors les deux nœuds N et N'. On recommence, en choisissant un nouveau nœud au hasard, etc. Les combats successifs permettent au gagnant de chaque rencontre d'occuper le terrain de l'adversaire. Ce processus d'évolution est répété un très grand nombre de fois *(voir un exemple sur la figure 2)*.

RPS Championship

Christie's

1. Pierre-feuille-ciseaux est pratiqué sous divers noms : Janken ou Yakyuken au Japon, Kawi-Bawi-Bo en Corée, Jack-En-Poy ou Bato-Bato-Pick aux Philippines, Ko-papír-ollo en Hongrie, etc. Le vainqueur du championnat du monde en 2007 fut l'Américaine Andrea Farina *(à gauche)*. Le jeu, s'il n'est joué qu'une seule fois, est une forme de tirage au sort. Aussi, en 2005, le président de la *Maspro Denkoh Corporation* Takashi Hashiyama, qui ne réussissait pas à choisir si la collection d'œuvres de sa compagnie (comportant des tableaux de Cézanne, Van Gogh et, de Picasso, *Le boulevard de Clichy*, à droite) devait être vendue par *Christie's* ou *Sotheby's*, organisa une séance de jeu pour fixer sa décision. Les représentants à Tokyo des deux salles des ventes furent conviés à jouer à *Pierre-feuille-ciseaux*. *Christie's* gagna : il avait choisi les ciseaux alors que *Sotheby's* avait opté pour la feuille ! (Pour plus de détails voir le *New York Times* du 29 avril 2005 : http://www.nytimes.com/2005/04/29/arts/design/29scis.html). De toutes les parties de *Pierre-feuille-ciseaux*, c'est sans doute celle à l'enjeu le plus important : la vente portait sur une somme de plus de dix millions de dollars dont plus de 12 pour cent sont revenus à *Christie's*.



2. Le jeu sur un anneau. Un anneau est composé de 12 nœuds chacun lié à ses deux voisins. Au départ, on place quatre P, quatre C et quatre F. Le jeu consiste à tirer au hasard un arc liant deux nœuds, puis à faire jouer l'un contre l'autre les deux symboles (F l'emporte sur P, P l'emporte sur C et C l'emporte sur F). Le symbole qui gagne occupe alors les deux nœuds. Selon le hasard qui fait jouer ainsi les nœuds les uns contre les autres, soit le jeu préserve la variété, les trois symboles coexistant toujours, soit l'un des symboles finit par disparaître, ce qui entraîne la disparition d'un second symbole, tout l'anneau étant alors occupé par un symbole unique et inamovible (cette occupation unique devient quasi certaine quand le nombre de tirages d'arcs tend vers l'infini).

Dans cet exemple, le combat revient à choisir au hasard deux nœuds voisins de l'anneau, ce qui conduit soit au *statu quo* si les nœuds portent le même symbole, soit à un gain de territoire pour le plus fort. Si tout s'équilibrait, les zones ne feraient que se déplacer, chacune gardant en moyenne quatre éléments et tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. Cependant, les tirages au sort des combats ne donnent pas des résultats parfaitement réguliers : les tailles des zones tenues par les C, les P et les F fluctuent et ces fluctuations s'amplifient. Inévitablement, l'une des trois zones disparaît, ce qui entraîne la disparition d'une deuxième zone et il ne reste plus qu'un seul symbole sur tout le terrain. Si la zone qui disparaît en premier est celle des C, les F envahissent tout ; si la zone des P disparaît, les C envahissent l'anneau et si les F disparaissent, les P dominent totalement et définitivement.

Dans le cas d'une configuration initiale irrégulière de C, de F et de P sur un anneau (même beaucoup plus grand) qu'on remplit en tirant au hasard les emplacements des C, des F et des P, l'évolution est de même type. Les déplacements de frontières des différentes zones homogènes amènent assez rapidement une configuration uniforme.

Cette évolution à long terme vers un gagnant définitif (imprévisible) est bien plus générale et se produit pour tout graphe connexe (un graphe connexe est un graphe d'un seul tenant, c'est-à-dire tel que deux nœuds sont toujours reliés par au moins un chemin). Le résultat dont la démonstration est exposée page 94 est : « Pour tout graphe connexe et toute configuration initiale de *pierres,* de *feuilles* et de *ciseaux* sur le graphe, la probabilité pour que le système se retrouve au bout d'un temps fini dans un état uniforme (l'un des symboles occupant tous les nœuds) est de 100 pour cent. »

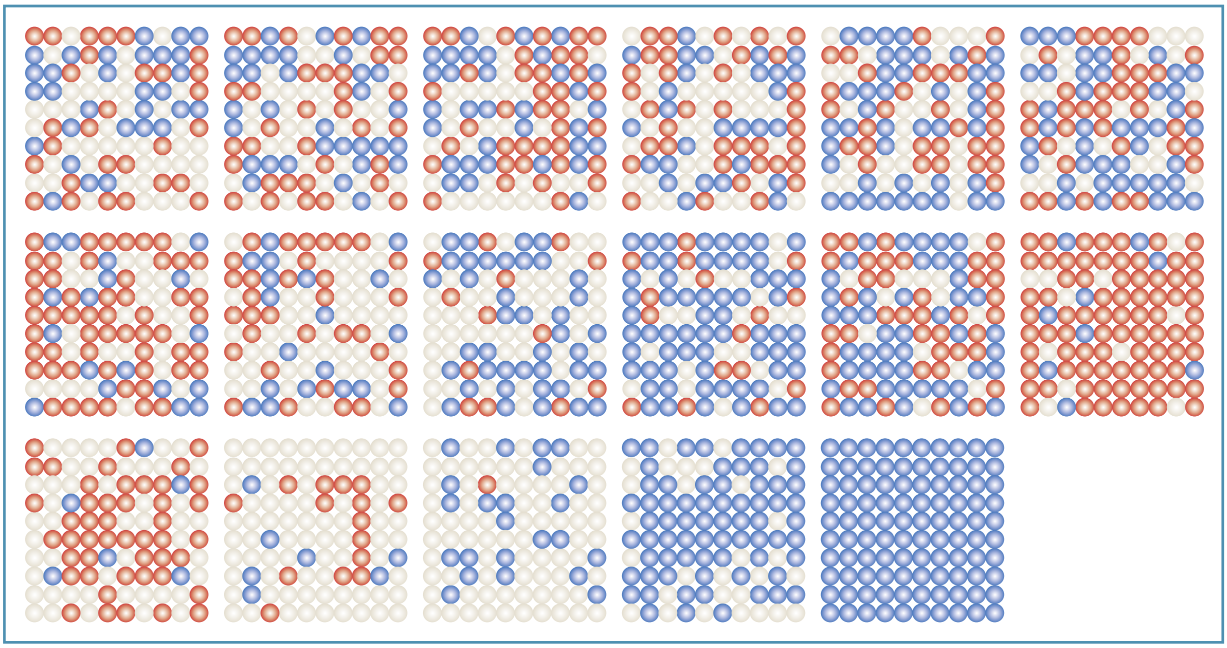
Notons que cela n'interdit pas qu'il existe des suites de tirages particuliers assurant le maintien indéfini des trois symboles sur le graphe (tout comme si vous lancez un dé, vous pouvez obtenir une série ne comportant que des 6). Si l'on considère le graphe circulaire envisagé plus haut et que les arcs sont tirés les uns après les autres en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, il restera toujours des exemplaires des trois symboles. Le sens du résultat d'évolution à long terme est que ce type de suites de tirages préservant la diversité possède une probabilité nulle de se poursuivre à l'infini.

Vérification expérimentale

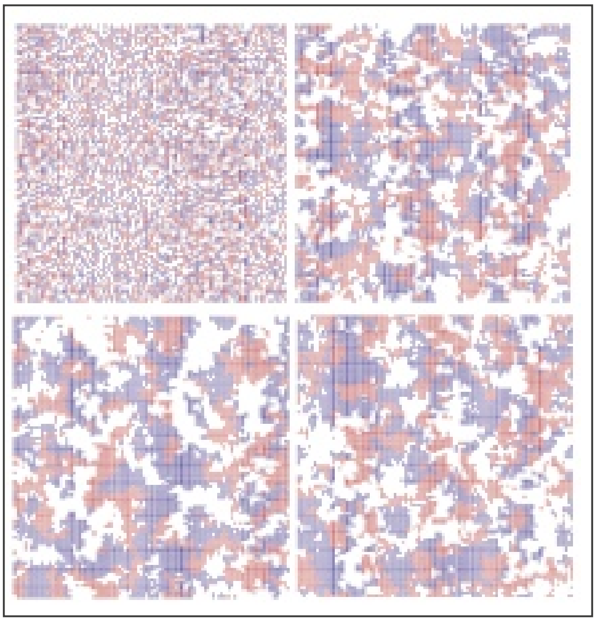
Nous allons voir que la réalité expérimentale est encore plus intéressante que la théorie mathématique qui indique un peu sèchement qu'au bout d'un certain temps, le système s'uniformise totalement *(voir l'encadré 5)*.

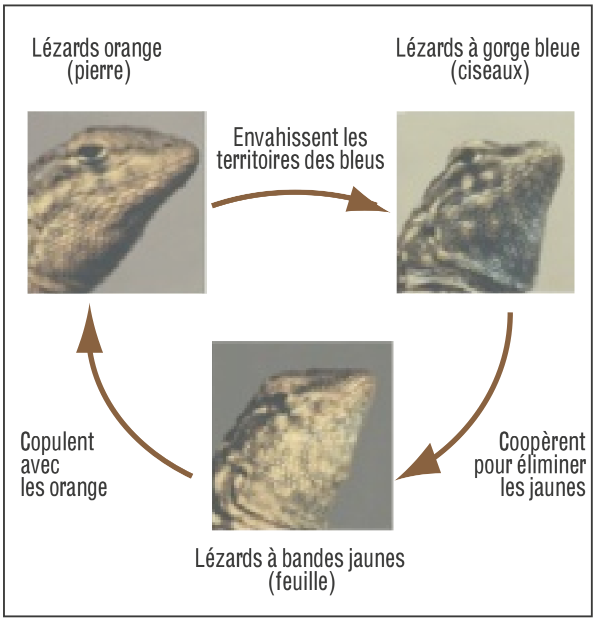
Nous allons d'abord observer l'évolution de graphes complets, c'est-à-dire de graphes dont chaque nœud est relié à chaque autre (graphes ayant donc $n(n-1)/2$ arcs pour n nœuds). De façon à visualiser les changements, nous utilisons une grille carrée où deux cases sont liées qu'elles soient côte à côte sur le dessin ou qu'elles ne le soient pas.

La figure 3 représente l'évolution d'un graphe complet de 100 nœuds. On part d'une configuration aléatoire : rouge pour le symbole *Pierre*, blanc pour *Feuille*, bleu pour *Ciseaux*. Puis on tire successivement 100 arcs du graphe où les combats correspondants sont joués, ce qui donne une nouvelle répartition. Au bout de 17 étapes de 100 combats aléatoires (donc 1 700 combats), le graphe est devenu uniformément bleu : les *Ciseaux* ont gagné. On voit cependant que l'évolution est pas-



3. Le jeu sur un graphe complet (où chaque nœud est relié à chaque autre). Pour visualiser l'évolution, on représente le graphe comme si les nœuds étaient disposés sur un damier. On part d'une configuration aléatoire des trois symboles *Pierre, feuille, ciseaux* (on utilise pour chacun une couleur, rouge, blanc ou bleu). On représente l'évolution en dessinant le graphe toutes les 100 étapes (100 combats). Dans un premier temps, le graphe reste à peu près homogène avec 33 pour cent de chacun des symboles. Au bout de dix étapes (donc 1 000 combats sur un arc), la couleur bleue domine. Deux cents combats plus tard, le rouge domine. Puis c'est le blanc, puis le bleu, cette fois définitivement. Dans le cas de graphes de taille plus grande, la phase d'uniformisation partielle avec domination cyclique d'un symbole dure plus longtemps avant la victoire définitive d'un des symboles. Les simulations de cette figure ont été réalisées par Rémi Dorat.





4. Le jeu sur un graphe-damier où chaque case du damier n'est liée qu'à ses huit voisines. Au départ, le damier est rempli aléatoirement par les trois symboles *Pierre, feuille, ciseaux*. L'évolution fait apparaître des zones homogènes, qui se déplacent tout en gardant une taille à peu près constante. Aucun symbole ne domine. En théorie, la domination totale et définitive d'un symbole se produit au bout d'un temps fini avec une probabilité de 100 pour cent. En pratique, ce moment vient si tardivement que l'on considère que les trois symboles coexistent. Les relations de domination cyclique entre souches ou espèces dans le monde vivant sont l'une des causes du maintien de la diversité biologique. Le cas du lézard californien *Uta stansburiana* est frappant, car trois variétés de lézards semblent y jouer à *Pierre-feuille-ciseaux*.

sée par une phase d'oscillation généralisée : sur le dixième dessin, les cases en bleu dominent largement, puis sur le dessin 12, c'est au tour des cases rouges d'être majoritaire, avant de laisser la place au dessin 14 aux cases blanches, avant enfin le retour de la domination bleue, cette fois définitive. Pour des graphes complets plus grands, le phénomène de synchronisation est encore plus net et le temps nécessaire avant son interruption par la domination totale d'un symbole devient long, car la phase de domination tournante possède un très grand nombre d'étapes.

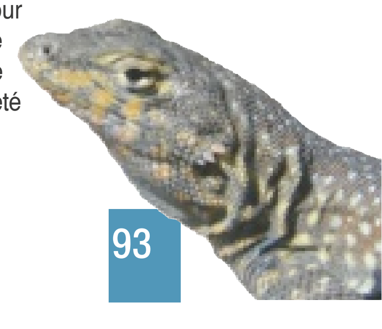
Ce mouvement tournant où chacun des trois symboles prend le dessus à tour de rôle s'explique partiellement : les *Feuilles* vivent en exploitant les *Pierres*, et si les *Feuilles* se mettent à dominer, elles éliminent presque totalement les *Pierres* ; la situation créée est alors favorable aux *Ciseaux* qui n'ont plus à craindre les *Pierres* et qui rencontrent avec une fréquence croissante les *Feuilles,* qu'ils éliminent ; les *Ciseaux* deviennent donc plus nombreux, se multipliant aux dépens des *Feuilles*. Cette domination des *Ciseaux* est favorable aux *Pierres* (plus fort que les *Ciseaux*) qui deviennent alors majoritaires un peu plus tard, etc.

Reste que cette explication est partielle, car si elle justifie que cela tourne dès que l'un des symboles domine, elle n'indique pas pourquoi l'un des symboles prend rapidement le dessus, engendrant l'oscillation synchronisée de tout le graphe : on pourrait imaginer que tout s'équilibre en gros et que les écarts s'effacent vite dès qu'ils se produisent. Nous allons d'ailleurs voir plus loin des graphes d'un autre type où l'équilibre des effectifs est préservé sur des longues périodes.

Dans la nature, un tel phénomène de domination cyclique a été plusieurs fois observé. Le lézard californien, *Uta stansburiana*, étudié par B. Siverno et C. Lively, présente ce comportement de domination cyclique, car il y a trois sortes de mâles qui semblent pris dans un jeu sans fin de *Pierre-feuille-ciseaux* sur un graphe. L'accouplement est à l'origine du cycle car, dans cette cruciale compétition, les mâles à gorge orange l'emportent sur les mâles à gorge bleue qui eux-mêmes dominent les mâles à bandes jaunes qui à leur tour sont plus efficaces sexuellement que les mâles à gorge orange.

Les lézards

Le détail de leur curieux jeu est le suivant. Les mâles à gorge bleue possèdent des harems composés de trois femelles environ et ne cherchent à défendre que de petits territoires. Quand ils sont les plus nombreux, les mâles à gorge orange, qui eux sont particulièrement agressifs, réussissent à s'imposer et font disparaître la quasi-totalité des mâles à gorge bleue. Les lézards orange ont un tempérament dominant à cause d'une forte concentration en testostérone. Cela les conduit d'ailleurs à constituer des harems ayant jusqu'à sept femelles et à exercer leur domination sur de vastes territoires. Ils se substituent donc aux mâles à gorge bleue dont le nombre faiblit rapidement sans toutefois s'annuler. Interviennent alors les mâles à bandes jaunes qui s'introduisent dans les camps des mâles à gorge orange en se faisant passer pour des femelles. Ces mâles à bandes jaunes deviennent de plus en plus nombreux et un moment arrive où ils sont majoritaires. Cela laisse réapparaître les mâles à gorge bleue, car ceux-ci savent reconnaître les mâles travestis et les chassent. Cela conduit au retour de la situation initiale avec une majorité de mâles à gorge bleue. Comme dans le cas de nos graphes complets, un cycle répété



de configurations, où dominent successivement chacune des trois catégories de mâles, se poursuit sans interruption sur les territoires étudiés.

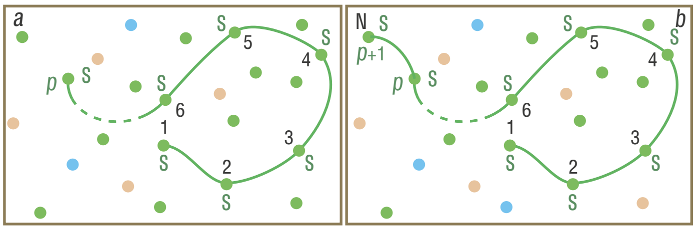
À une échelle bien plus petite, dans le domaine de la chimie, les réactions de Belousov-Zhabotinskii peuvent s'interpréter comme la manifestation d'un jeu de *Pierre-feuille-ciseaux* joué à l'échelle microscopique entre composants chimiques. Dans ce cas cependant, aucun composant ne devient globalement dominant et c'est plutôt à une coexistence des compétiteurs qu'on assiste ; ceux-ci se regroupent par zones homogènes mobiles et créent un jeu animé de dessins étonnants, qu'on a associé à l'idée même de phénomène complexe.

Il est simple d'obtenir l'équivalent de cette dynamique chimique dans le monde abstrait des graphes du jeu *Pierre-feuille-ciseaux* : il suffit de ne pas considérer des graphes complets, mais des graphes réguliers comme ceux correspondant aux cases d'un damier. Chaque case est reliée à ses huit voisines et non plus à toutes les cases comme précédemment.

La figure 4 montre des configurations typiques observées après un long moment d'évolution lorsque l'on considère des graphes-damiers de ce type. Cette fois, la représentation du graphe sur un damier prend tout son sens, puisque les nœuds du graphe ne sont reliés qu'aux huit nœuds correspondant aux huit cases voisines. Au début, le système est placé dans un état totalement mélangé (1/3-1/3-1/3). Rapidement, apparaissent des zones homogènes des trois couleurs et ces zones se déplacent et changent de forme de manière incessante tout en gardant des caractéristiques globales stables : la taille des zones homogènes est à peu près constante, ainsi que leur vitesse de déplacement et le type de motifs dessinés. Ici, aucun symbole ne domine les autres. L'évolution se traduit par des mou-

5. On peut toujours uniformiser

La démonstration du résultat que l'on aboutit toujours à l'uniformisation se fait en deux étapes. On établit d'abord que : « Pour tout graphe connexe et pour toute configuration initiale donnée, il existe un tirage d'arcs conduisant l'un des symboles à tout envahir. » Le raisonnement se fait par récurrence. Prenons un graphe connexe de taille n, et une configuration initiale donnée. Nous allons montrer que pour tout entier p inférieur ou égal à n, il existe une suite de tirages d'arcs conduisant (quand on effectue dans l'ordre tous les combats déterminés par les arcs) à un paquet de p nœuds rattachés (formant un sous-graphe connexe) portant le même symbole S.

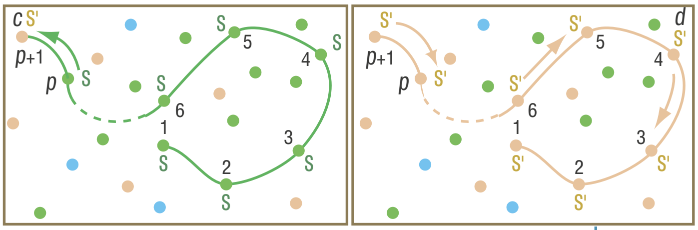


– Cela est évidemment vrai pour $p = 1$.

– Supposons cela vrai pour $p < n$ et considérons la séquence de choix d'arcs qui conduit à un paquet connexe de p symboles S identiques *(a)*. Montrons qu'on peut en déduire une suite de choix d'arcs qui conduit à un paquet connexe de $p + 1$ symboles identiques (d'après le principe du raisonnement par récurrence, cela nous donnera le résultat). Soit un nœud *N*, voisin de ce paquet : il y en a au moins un, car le graphe entier est connexe. Si ce nœud *N* porte le symbole S, nous avons un paquet connexe de $p + 1$ symboles S et le raisonnement est terminé *(b)*. Supposons alors que N porte un symbole S' différent de S.

Si S' est battu par S, on tire l'arc liant le nœud N au paquet de S et l'on a une suite de choix d'arcs *(c)* qui conduit à un paquet connexe de S de taille $p + 1$: le raisonnement est terminé.

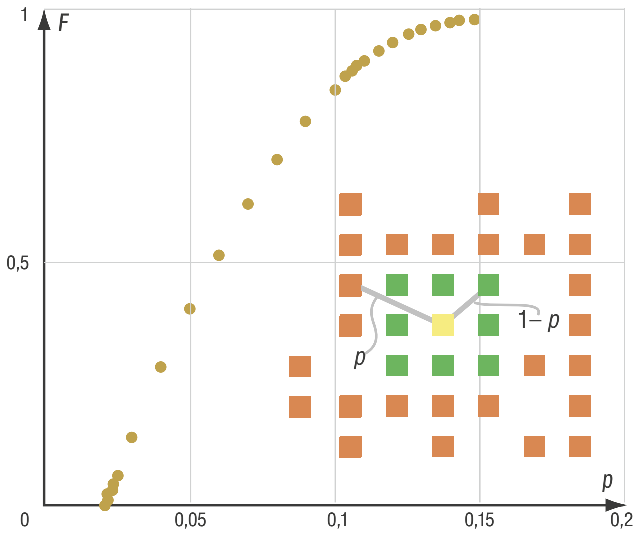
Si S est battu par S', on choisit la même séquence d'arcs que celle qui conduisait au paquet de p symboles S, suivie d'une suite de tirages progressifs *(d)* de ces arcs de proche en proche qui font que S' envahit tout le paquet de S, lequel devient donc un paquet connexe de $p + 1$ symboles S'. Cela est possible, car le paquet de p symboles S est connexe. On a alors un paquet de $p + 1$ symboles S'. Dans chaque cas possible, on dispose d'une suite des choix d'arcs conduisant à un paquet connexe de $p + 1$ symboles identiques. Le raisonnement par récurrence est terminé.



Notons (c'est important pour la seconde partie du raisonnement) que la longueur de la suite d'arcs qui fait passer d'un paquet de p nœuds identiques à un paquet de $p + 1$ nœuds identiques s'obtient en ajoutant au plus p arcs à celle nécessaire pour avoir un paquet de p nœuds identiques. Au total, si le graphe possède n nœuds, on sera certain d'avoir un graphe uniforme en utilisant une suite d'arcs déterminant les combats successifs de longueur au plus $1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n - 1) = n(n - 1)/2$.

Montrons maintenant que l'uniformisation survient avec une probabilité de 100 pour cent. Cette seconde partie du raisonnement utilise l'évidence probabiliste qu'en répétant un tirage au hasard dans l'attente d'un événement ayant une probabilité non nulle de se produire, il finit par se réaliser, ou plus exactement, il se réalise « à l'infini » avec une probabilité de 100 pour cent (en lançant un dé indéfiniment, vous finirez par tomber sur un 6 : s'il est possible, en théorie, de ne jamais avoir de 6, cet événement a une probabilité nulle : si l'on attend longtemps, on est certain d'avoir un 6).

Partant d'un graphe de n nœuds dans une configuration donnée, nous savons qu'il existe une suite d'arcs qui uniformise le graphe. Cette suite a une longueur inférieure à $n(n - 1)/2$. La probabilité qu'un arc donné soit choisi lors d'une étape du processus d'évolution aléatoire est plus grande que $1/(nk)$ (un nœud est choisi avec une probabilité $1/n$ et un voisin avec une probabilité $1/k$ au plus, où k est le nombre maximum de voisins que possède un nœud du graphe). La probabilité pour qu'une suite d'arcs qui uniformise le graphe soit choisie est donc supérieure à $(1/nk)^{n(n-1)/2}$, un nombre strictement positif. À l'infini, la probabilité pour qu'au moins une fois une séquence conduisant à l'uniformisation soit choisie est donc de 100 pour cent.



6. Jeux intermédiaires *Pierre-feuille-ciseaux*. On définit une famille continue entre le jeu sur un graphe complet et le jeu sur un graphe-damier. On se fixe un paramètre p entre 0 et 1. À chaque coup, on choisit un premier nœud N au hasard uniformément parmi tous les nœuds. Pour le second nœud N′, on choisit entre deux méthodes A et B, la méthode A choisie avec une probabilité p et la méthode B avec une probabilité $1 - p$. Si la méthode A est choisie on prend pour N′ un nœud quelconque du graphe. Si la méthode B est retenue, on choisit N′ parmi les huit voisins de N. Les nœuds N et N′ ainsi déterminés livrent alors combat. Pour $p = 0$, tout se passe comme quand on jouait au jeu sur un graphe-damier, pour $p = 1$, comme si on jouait sur un graphe complet. Pour p assez petit (jusqu'à 0,002), l'évolution du graphe se fait en préservant un bon mélange : les trois symboles restent présents en proportion équilibrée 1/3-1/3-1/3. Lorsque p se trouve entre 0,002 et 0,15, la proportion de chaque symbole fluctue dans le système, ce que l'on mesure par un paramètre de fluctuation F ($F = 0$, pas de fluctuation ; $F = 1$, variation maximale des effectifs). Au-delà de 0,15, le système devient violemment oscillant comme dans le cas d'un graphe complet : chacun des symboles domine à tour de rôle, le graphe passant par des états où un symbole occupe la quasi-totalité du graphe, toutes les cases du graphe sont synchronisées (ces simulations ont été menées par A. Szolnoki et G. Szabó).

vements ininterrompus des frontières interzones. La zone de séparation entre *Pierres* et *Feuilles* se déplace, car les *Pierres* reculent devant les *Feuilles* ; de même, les *Feuilles* reculent devant les *Ciseaux* et les *Ciseaux* devant les *Pierres*. L'examen détaillé des effectifs montre une oscillation limitée autour de 1/3 de la proportion de chacun des symboles. Cette fluctuation apparaît comme une variation statistique inévitable qui, ne prenant pas d'ampleur, ne conduira en pratique jamais à la domination d'un symbole.

Temps de convergence différents

Les deux cas rencontrés, oscillation synchronisée de tout le graphe ou formation de zones homogènes mobiles, correspondent à deux modes de la dynamique d'évolution des graphes de *Pierre-feuille-ciseaux*. Dans les deux types de graphes, nous savons qu'à long terme l'un des états envahit tout. Cependant, le temps nécessaire pour que se produise cette domination définitive est très différent dans les deux cas. Dans le cas des graphes complets, ce temps augmente lentement en fonction de la taille du graphe. Dans le cas des graphes-damiers, l'instant de la stabilisation est repoussé bien plus loin, si bien qu'en pratique, le système reste dans un état mixte où les trois symboles coexistent.

La théorie nous indique pourtant que l'un des états finit toujours par dominer ; la simulation nous montre qu'avec les graphes complets, cette domination arrive rapidement, alors qu'avec les graphes-damiers, sa venue est tellement éloignée dans le temps que c'est une stabilisation avec coexistence des trois états qu'il faut considérer comme l'évolution normale à moyen terme de la dynamique du graphe. Une étude détaillée des caractéristiques de ces dynamiques a été menée par Rémi Dorat à coup de simulations massives et prolongées. Il montre que le temps d'uniformisation croît exponentiellement dans le cas des graphes-damiers.

La situation de coexistence des trois symboles est sans doute une explication du maintien de la diversité dans certaines situations biologiques. Le terrain où trois espèces se rencontrent (les dominations se conformant à un schéma circulaire du type *Pierre-feuille-ciseaux*) est assimilable à un graphe de type graphe-damier. La dynamique de domination montre alors sur le terrain des motifs plus ou moins semblables à ceux vus lors des simulations.

Benjamin Kerr, Margaret Riley, Marcus Feldman et J. M. Bohannan, dans un article de la revue *Nature,* proposent une telle interprétation de leur expérience réalisée avec trois souches d'*Escherichia coli,* en relation non transitive comme les symboles *Pierre-feuille-ciseaux*. La conclusion de leur étude est conforme à ce qui est montré par les simulations. Lorsque l'espace où est réalisée l'expérience est petit et, plus généralement, lorsque les relations entre souches sont assimilables à celles décrites par un graphe complet, l'une des souches domine rapidement. En revanche, lorsque les interactions se déroulent sur un espace plus grand, cette fois assimilable à un graphe de type damier, les trois souches coexistent avec des mouvements des zones occupées par chacune d'elles, mouvements assez semblables à ceux vus lors des simulations.

Des études sur des graphes intermédiaires entre les graphes complets et les graphes damiers ont été réalisées par György Szabó, Attila Szolnoki et Rudolf Izsák. Divers phénomènes de transition de phases ont pu être mis en évidence, et ils permettent de mieux comprendre toutes ces dynamiques discrètes nées d'un jeu élémentaire *(voir la figure 6)*. La science n'a jamais fini d'étudier les jeux : même les plus simples suggèrent des modèles explicatifs utiles.

Auteur & Bibliographie

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

R. Dorat, *Étude de la domination cyclique sur les graphes*. Publication du Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, 2007.

C. Meyer, *Sagace* : http://ch.meyer.free.fr/favorite.htm

G. Szabó, A. Szolnoki, et R. Izsák, *Rock-scissors-paper game on regular small-world networks*, in *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37, pp. 2599-2609, 2004.

B. Siverno, C.M. Lively, *The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male reproduction strategies*, in *Nature*, vol. 380, pp. 240-243, 1996.

B. Kerr, M. Riley, M. Feldman et J. M. Bohannan, *Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock-paper-scissors*, in *Nature*, *vol. 418, pp. 171-174,* 11 juillet 2002.

A. Szolnoki, G. Szabó, *Phase transitions for rock-scissors-paper game on different networks*, in *Phys. Rev.* E 70, 2004 : http://www.mfa.kfki.hu/ szabo/szabopub.html