Le jeu des pousses

Un crayon et un papier permettent d'y jouer, mais pour gagner, mieux vaut être mathématicien et aimer la programmation. Les anciennes analyses de John Conway *(ci-contre)* ont été dépassées grâce aux nouvelles techniques interactives homme-ordinateur pratiquées par Simon Viennot et Julien Lemoine.

La topologie est la science des courbes et des espaces, ces termes étant entendus dans le sens abstrait que leur donnent les mathématiciens. C'est un domaine étudié à l'université, pourtant certains jeux reposent sur la variété des formes topologiques et les difficultés que nous avons à les maîtriser.

Le jeu des « pousses » (*Sprouts game* en anglais) entre dans cette catégorie. Il doit son nom au fait qu'en y jouant les adversaires dessinent des schémas dont les formes évoquent une plante à la croissance anarchique. Il a été inventé en 1967 – précisément l'après-midi du 21 février – par John Conway alors professeur à Cambridge et par Michael Paterson alors étudiant en informatique théorique. Conway précise que leurs parts dans l'invention du jeu sont proportionnelles à 3/5 pour Paterson, et 2/5 pour lui...

Avant même que Martin Gardner ne l'évoque dans sa chronique de *Scientific American* en juillet 1967, le jeu s'était déjà répandu comme une mauvaise herbe dans de nombreux départements de mathématiques où il détournait de leur travail professeurs et étudiants. Aujourd'hui encore on y joue et on l'étudie : loin de s'épuiser comme nombre de jeux mathématiques simples, les subtilités qu'il recèle restent indéchiffrables.

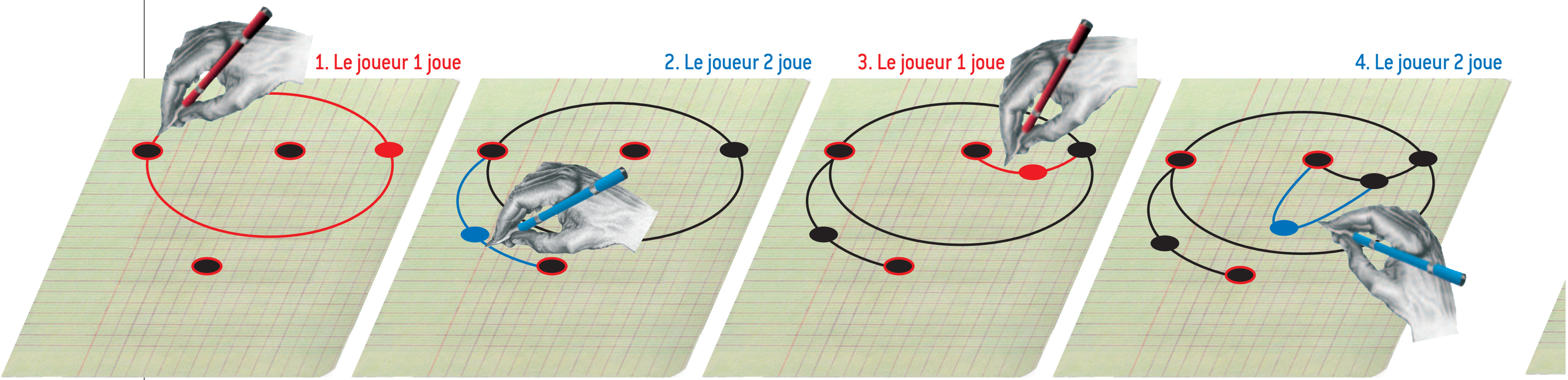
Le jeu tient un rôle important dans le roman *Macroscope* de Piers Anthony paru chez *Avon* en 1972 et il existe une association de joueurs, la *World Game of Sprouts Association*, qui organise régulièrement des concours et tente de réunir des informations sur le jeu. Le champion du monde est le mathématicien russe Roman Khorkov, qui détient le titre depuis 2004. On trouve des programmes pour y jouer sans papier, par exemple, voir : http://www.math.utah.edu/~alfeld/Sprouts/index.html

Règles du jeu et progrès

Le jeu est simple à expliquer et dès six ans, les enfants peuvent y jouer et certains y excellent. Pourtant son étude, comme nous allons le voir, ne progresse que lentement. Des avancées ont été obtenues ces dernières années, en particulier par deux Français acharnés et efficaces.

Au début du jeu, on place *n* points sur une feuille et les deux joueurs dessinent alors à tour de rôle un nouvel arc de courbe reliant deux points autorisés et un nouveau point est ajouté sur l'arc selon les règles de la figure 1 où est représenté un exemple de partie. En outre, d'un point ne peuvent jamais partir plus de trois arcs, et les arcs ne peuvent se croiser.

Une partie ne se poursuit pas indéfiniment, car en partant de *n* points, le raisonnement suivant montre que la partie est nécessairement terminée avant le coup 3*n*. Puisque chaque point peut être l'extrémité de 3 arcs au plus, il y a au



1. Les règles et un exemple. Le jeu des pousses est le plus simple des jeux complexes. Au début du jeu, on place *n* points sur une feuille, trois dans notre exemple. Les joueurs 1 et 2 dessinent à tour de rôle un nouvel arc de courbe et un nouveau point est placé sur l'arc départ $3n$ places possibles pour des arcs de courbes. À chaque coup, le joueur consomme 2 places possibles pour les extrémités d'arcs et en crée une nouvelle (le point qu'il ajoute est déjà l'extrémité de deux arcs). Chaque joueur consomme en jouant une place libre. Après $3n$ coups, on est certain qu'il n'y aura plus aucune place libre pour une nouvelle extrémité d'arc et que le jeu sera donc bloqué. En fait, c'est déjà le cas après $3n - 1$ coups, car pour jouer il faut disposer de deux places libres.

Les parties durent au plus $3n - 1$ coups, mais souvent moins, car certains points sont l'extrémité de deux arcs isolés et inutilisables : pour les joindre, il faudrait couper au moins un arc. Dans l'exemple de la figure 1, une partie avec 3 points de départ dure 7 coups. On démontre aussi qu'une partie ne peut pas durer moins de $2n$ coups *(voir la figure 2)*. Les parties minimales – celles qui durent $2n$ coups – ont une propriété particulière découverte par le mathématicien écossais Denis Mollison et John Conway : elles sont composées uniquement de 5 formes *(voir la figure 3)*, auxquelles on s'est amusé à donner des noms d'arthropodes : le pou *(louse)*, le coléoptère *(beetle)*, le cancrelat *(cockroach)*, le perce-oreille *(earwig)* et le scorpion *(scorpion)*.

Le jeu appartient à la catégorie des jeux à information complète et parfaite sans intervention du hasard. Les joueurs disposent à chaque instant du jeu de toutes les informations sur les configurations qui évoluent par les coups joués et jamais par le fait de tirages aléatoires. Pour un jeu de cette catégorie – le jeu de dames, le jeu d'échecs et le jeu de Go en font partie –, trois cas sont possibles.

(a) Soit une stratégie parfaite permet au joueur qui commence de gagner à tout coup, quels que soient les coups choisis par son adversaire.

(b) Soit une stratégie parfaite assure la victoire du joueur qui joue en second.

(c) Soit deux stratégies, une pour chaque joueur, conduisent toujours à une partie nulle.

Dans le cas du jeu des pousses, une partie n'est jamais nulle, et l'un des deux joueurs est certain de gagner s'il joue bien. Quel joueur gagne dépend du nombre n de points donnés au départ. Le problème est donc de savoir, en fonction de n, qui gagne et quelle stratégie de jeu il doit appliquer.

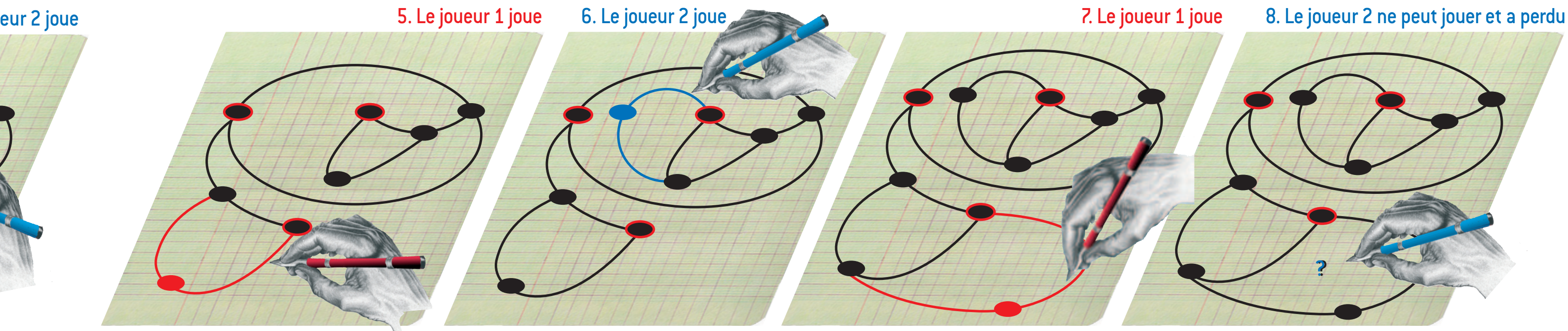
En partant d'un seul point ($n = 1$), le joueur 1 qui commence est certain de perdre. En effet, il n'a qu'une possibilité de jeu, faire une boucle liant le point de départ à lui-même, ce qui permet au second joueur de jouer – en liant le point initial avec le point ajouté sur la boucle par le premier joueur – et le joueur 1, qui ne peut plus jouer, a perdu.

En partant de deux points ($n = 2$), l'analyse du jeu est déjà moins évidente, mais on peut établir la liste de toutes les configurations et le joueur qui commence perdra toujours si son adversaire joue convenablement.

L'analyse complète du jeu oblige rapidement à des raisonnements subtils *(voir la figure 2 où quelques détails sur les méthodes de jeux sont précisés)* et surtout à l'étude d'un grand nombre de configurations dont la maîtrise est plus difficile qu'à un autre jeu à cause de la complexité topologique des diagrammes créés par les joueurs.

En 1967, quand M. Gardner publia son article, les seuls cas résolus étaient les cas $n = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6. Les cas 4 et 5 l'avaient été par D. Mollison qui gagna un pari de 10 shillings avec J. Conway en résolvant le cas $n = 6$ en moins d'un mois grâce à une démonstration de 49 pages ! Les résultats trouvés indiquaient que pour $n = 1$, 2 ou 6, le second joueur est gagnant et que pour $n = 3$, 4 ou 5, c'est le premier. Selon M. Gardner et J. Conway, le cas $n = 7$ exigeait un traitement informatique et même les plus puissants ordinateurs ne seraient pas en mesure de résoudre le cas $n = 8$.

Dans un premier temps, personne ne s'attaqua à la programmation du jeu qui est particulièrement délicate : la nature topologique, donc déformable, des pousses se prête mal aux représentations symboliques que nécessite un programme informatique. Il s'agit d'un défi de représentation des configurations.



ajouté (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Un nouvel arc doit joindre deux des points déjà placés sur la feuille, sans croiser un des arcs précédents, ni se croiser lui-même. Jamais plus de trois extrémités ne doivent se rejoindre en un point. Le joueur qui ne peut plus jouer, ici le joueur 2, a perdu.

En 1991, après une attente de 24 ans, un système de notations adaptées fut proposé par David Applegate, Guy Jacobson et Daniel Sleator de l'Université Carnegie Mellon, à Pittsburgh. Leur notation, à l'aide de mots codés, permet la représentation sous une forme unique d'un grand nombre de configurations différentes, mais équivalentes du point de vue du jeu. Cette efficacité de la représentation – qui limite l'explosion combinatoire – et l'utilisation de techniques spécialisées de programmation pour la recherche arborescente des stratégies optimales leur permirent de traiter les cas jusqu'à $n = 11$. Le joueur qui joue en second est gagnant pour $n = 7$ et 8. Le joueur qui commence gagne pour $n = 9$, 10 et 11. L'observation de ces résultats les conduisit à formuler une conjecture simple.

Conjecture du jeu des pousses : avec n points au départ, le jeu des pousses est gagnant pour le second joueur si le reste de la division par 6 de n est 0, 1 ou 2 et gagnant pour le premier joueur si ce reste est 3, 4 ou 5. Autrement dit, en énumérant dans l'ordre les cas $n = 1, 2, 3, 4, ...$ le joueur gagnant est le joueur 2, puis 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, ...

L'étude des propriétés mathématiques du jeu *(certaines sont présentées à la figure 2)* a permis en 2001 à Riccardo Focardi, de l'Université de Venise, et à Flaminia Luccio, de l'Université de Trieste, de traiter « à la main » (c'est-à-dire sans l'aide d'un ordinateur) le cas $n = 7$, ce qui avait été jugé impossible par J. Conway. Aller plus loin à la main apparaissait alors inconcevable, pourtant nous allons voir qu'on y est arrivé par un moyen détourné.

D'étonnants progrès récents par guidage des programmes

Les derniers progrès proviennent de deux Français, Simon Viennot, un ingénieur en informatique aujourd'hui à Tokyo, et Julien Lemoine, agrégé de mathématiques en poste dans le Cantal. Ils ont mené un travail méticuleux et remarquable qui les a conduits à battre tous les records y compris ceux réalisés à la main, grâce à des innovations intéressantes.

Leur méthode a d'abord consisté à perfectionner le système de notation des configurations du jeu et à programmer soigneusement la recherche des configurations perdantes (celles où un joueur est certain de perdre face à un joueur qui joue parfaitement) que leur système informatique mémorise. La mémorisation des configurations gagnantes (celles qui assurent de gagner à tout coup) occuperait trop d'espace. Que les configurations gagnantes soient plus nombreuses que les configurations perdantes résulte de la dissymétrie déjà présente dans leurs définitions respectives.

(a) Les configurations où plus aucun nouvel arc ne peut être ajouté sont perdantes (d'après les règles du jeu).

(b) Une configuration est gagnante si parmi les coups qu'on peut jouer à partir d'elle, il y en a un au moins qui conduit à une configuration perdante.

(c) Une configuration est perdante si tout coup joué à partir d'elle conduit à une configuration gagnante pour l'autre joueur.

Les points (b) et (c) permettent, de proche en proche, de marquer toute configuration comme gagnante ou perdante en remontant l'arbre du jeu à partir des situations bloquées qui sont marquées perdantes par convention (a).

L'introduction d'une méthode de décomposition de certaines configurations en configurations plus simples et indépendantes qu'on traite chacune de leur côté a joué un rôle important dans le succès de l'entreprise de J. Lemoine et S. Viennot. Ils espéraient que les nouvelles notations et l'exploitation des décompositions détermineraient de proche en proche un nombre de configurations perdantes de plus en plus grand ce qui, en les mémorisant, conduirait à dépasser les résultats du programme de 1991 proposés par Applegate, Jacobson et Sleator. Ils réussirent en effet à traiter de cette façon les cas $n = 12$ et $n = 13$ (qui confirmèrent la conjecture précédente). Cependant, au-delà, leur programme se perdait dans des calculs inutiles et maladroits et la limite $n = 13$ restait infranchissable. Pour aller plus loin encore, ils eurent recours à une idée simple : il fallait guider le programme.

Pour déterminer la nature perdante ou gagnante d'une configuration du jeu, il n'est pas nécessaire de maîtriser l'arborescence totale des configurations qu'on atteint à partir de la configuration étudiée. Seule une faible partie des configurations suffit, car une configuration est gagnante si une façon de jouer conduit à une configuration perdante, ce qui dispense de connaître le marquage des autres possibilités de jeu. La difficulté pour marquer gagnante une configuration est donc de savoir lequel des coups conduit à une situation perdante. L'expérience et une bonne perception du jeu aident ce travail. Remarquons que cette situation est la même que pour le jeu de dames que nous avons évoqué dans cette rubrique en janvier 2008.

J. Lemoine et S. Viennot ont donc développé une interface informatique qui permet de suivre finement, en temps réel, les essais du programme et de le guider dans ses choix en lui indiquant par exemple de renoncer à élucider une configuration et à dévouer sa puissance de calcul à une autre jugée plus prometteuse. Cette association symbiotique de l'ordinateur et de l'humain fut miraculeuse puisqu'elle a conduit à la résolution de tous les cas jusqu'à $n = 32$, auxquels s'ajoutent un certain nombre de cas dispersés $n = 34$, 35, 40, 41 et 47. Le progrès est considérable et totalement inespéré. On est très loin du $n = 8$ jugé inaccessible par M. Gardner et J. Conway !

J. Lemoine et S. Viennot ont malgré tout tenté de programmer leur système pour qu'il fasse de lui-même ce qu'ils lui suggèrent de faire lors de leurs séances de guidage. Cette automatisation du choix des branches à abandonner ou à explorer n'a pas bien fonctionné malgré une multitude d'essais. Il semble ici que l'intelligence humaine dans son travail de conseil utilise des idées variées et subtiles provenant de l'expérience passée ou de considérations stratégiques très délicates à programmer. Il s'agit d'un problème relevant de l'Intelligence artificielle et rien ne dit qu'on échouera toujours à mener cette automatisation... même si pour l'instant cela ne fonctionne pas.

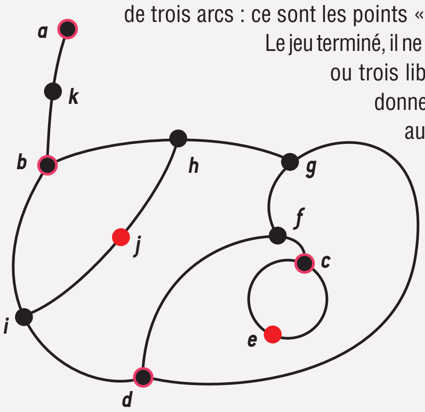
Les deux Français signalent que le pilotage du programme à la recherche des meilleurs coups est une occupation particulièrement amusante et addictive. Ils mettent en garde les utilisateurs de leur programme (disponible librement sur Internet) contre les dommages à la vie sociale que l'usage de leur système interactif est susceptible d'engendrer.

Les résultats obtenus sont le produit de nombreuses heures de « conduite » du programme. Les limites atteintes aujourd'hui

2. Informations sur le jeu

Lorsque nous jouons en partant de n points, nous avons vu que la partie dure un nombre de coups inférieur ou égal à $3n-1$. Si cette durée (en nombre de coups) est impaire, le joueur qui commence gagne, sinon le second joueur gagne. Bien jouer consiste à garder la maîtrise de la durée de la partie. Ces éléments d'analyse vous aideront à maîtriser cette durée.

Dans une configuration du jeu, il existe plusieurs catégories de points. Les points totalement libres qui peuvent servir d'extrémités à trois arcs nouveaux ; de tels points donnent trois libertés au jeu. Les points qui donnent deux libertés. Les points qui en donnent une. Enfin, ceux qui n'en donnent aucune, car ils sont déjà l'extrémité de trois arcs : ce sont les points « morts ».



$n = 4$
7 coups ont été joués :
a, b, c et *d* au départ
(cerclés de rouge),
puis *e, f, g, h, i, j, k* dans l'ordre

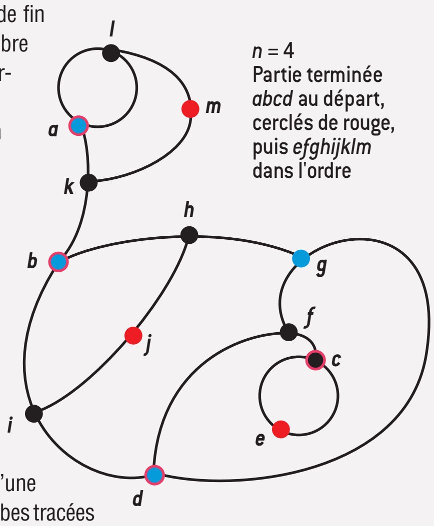
Le jeu terminé, il ne reste aucun point donnant deux ou trois libertés au jeu, car un point qui donne deux ou trois libertés permet, au moins, de tracer une boucle partant de lui et y revenant.

Il y a deux catégories de points donnant une liberté : ceux pour lesquels il est encore possible d'utiliser leur liberté pour construire un arc qui rejoindra un autre point ayant encore au moins une liberté et ceux qui sont isolés, comme *e* et *j* sur les schémas : leur liberté ne pourra jamais être utilisée, car plus rien ne peut évoluer dans la zone où ils se trouvent. Ces points (rouges) ayant une liberté inutilisable consomment une liberté pour rien et diminuent la durée de la partie d'un coup. Si à un moment du jeu, il y a r points rouges, la partie durera au plus $3n-r$ coups.

Dans le voisinage proche de chaque point rouge, il y a nécessairement deux points morts liés qui sont ses deux voisins (*i* et *h* sont ainsi voisins directs de *j*) ou qui sont ceux sur l'arc conduisant à la boucle qui les porte (les points *c* et *f* sont ainsi les deux voisins morts associés à *e*). Un point mort lié à un point rouge ne peut être en même temps le point mort lié à un autre point rouge (sinon un arc pourrait relier les deux points rouges).

Le dessin à la fin d'une partie commencée avec n points et dont m coups ont été joués comporte r points rouges et $r = 3n - m$ (le nombre de liberté est au départ de $3n$ et à chaque coup joué, il diminue d'une unité, pour être, à la fin, égal au nombre de points rouges). À chaque point rouge, nous avons vu que sont associés deux points morts (qui lui sont propres). Nous nommerons points bleus les autres points morts d'une figure finale. Leur nombre b vérifie $b = n + m - (r + 2r) = n + m - 3(3n - m) = 4m - 8n$, car il y a $n + m$ points en tout, r points rouges et 2 points morts associés à chaque point rouge.

À la fin d'une partie, on a donc $m = 2n + b/4$ (équation découverte par J. Conway). De cette équation, on déduit, d'une part, que b est un multiple de 4 (sur le schéma de fin de partie, $b = 4$). D'autre part, que le nombre m de coups joués quand une partie est terminée est au moins $2n$.



$n = 4$
Partie terminée
abcd au départ,
cerclés de rouge,
puis *efghijklm*
dans l'ordre

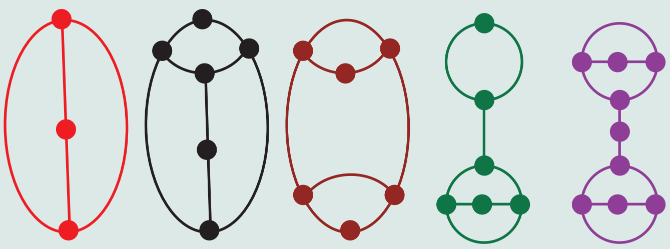
On déduit aussi de cette équation que si, en cours de partie, on connaît b points bleus, alors la durée de la partie sera d'au moins $2n + b/4$. Cette information permet un certain contrôle de la durée d'une partie. Le nombre de points rouges en donne une autre puisque la partie durera moins de $3n - r$ coups. À chaque instant du jeu, on dispose ainsi d'un encadrement de sa durée possible.

Une dernière remarque est encore utile pour avoir la maîtrise de la durée d'une partie. Si une zone délimitée par des courbes tracées par les joueurs contient à un moment du jeu un point (non situé sur sa frontière) ayant une liberté, alors cette zone en fin de partie contiendra encore un point ayant une liberté, c'est-à-dire un point rouge. Il est en effet impossible de consommer toutes les libertés intérieures à une zone qui en contient au moins une, car chaque nouveau coup qui pourrait la consommer en introduit une autre.

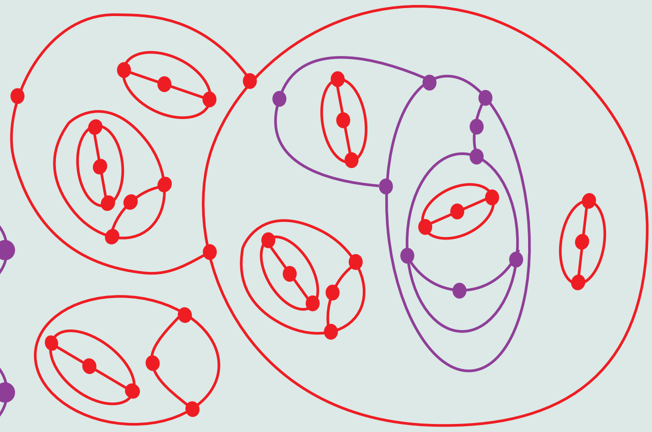
Dans notre exemple, après que les coups *e f g h i j* ont été joués, la zone extérieure contient un point ayant une liberté (le point *a*), la zone de frontière *bhgfdi* en contient aussi, *j*, et la zone *dfg* en contient un troisième, *e*. La partie durera donc au plus $3n - 3$ coups.

3. Les parties courtes

Une partie du jeu des pousses avec n points dure au plus $3n-1$ coups et s'arrête au plus tôt au coup $2n$. Les parties qui ne durent que $2n$ coups se terminent par une figure qui est composée de 5 motifs fixés quel que soit n. Les motifs peuvent être imbriqués et dessinés en inversant intérieur et extérieur comme dans l'exemple proposé.



Pou Coléoptère Cancrelat Perce-oreille Scorpion



Configuration de fin de partie pour une partie de durée $2n$ (ici $n = 16$).

ne sont pas dues au nombre d'heures qu'on peut demander à des machines de consacrer à la résolution d'un problème particulier, mais aux nombres d'heures que les pilotes humains du programme sont prêts à donner pour aller un pas plus loin.

Les succès de l'équipe de J. Lemoine et S. Viennot ne s'arrêtent pas là. Un résultat prouvé par ordinateur – même s'il est guidé par l'être humain – est sujet à doutes : n'y a-t-il pas une erreur ? Comment valider définitivement les résultats obtenus ? Pour répondre à cette question, nos deux héros ont utilisé plusieurs techniques. D'abord, ils ont développé un module qui vérifie les ensembles de configurations perdantes élaborées pendant les parcours guidés de l'ordinateur. La recherche de raccourcis dans les preuves (recherches d'ensembles de configurations perdantes plus petits, mais conduisant aux mêmes résultats globaux) est une façon de valider *a posteriori* les résultats et donc d'en améliorer la fiabilité. Cette optimisation des preuves est spectaculaire, puisque seules 499 configurations perdantes ont besoin d'être connues pour prouver que la position $n = 17$ est perdante, alors que pour le cas $n = 11$ il fallait 116 299 configurations en 1991 au programme de Pittsburgh.

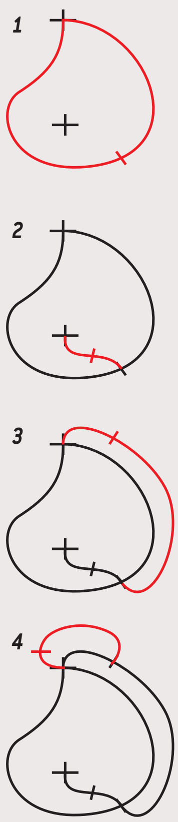
Il existe des mathématiciens intransigeants qui n'admetteront pas qu'un résultat obtenu avec une machine soit aussi sûr qu'un résultat dont la preuve est validée par un être humain. Aussi J. Lemoine et S. Viennot ont proposé d'engendrer des schémas résumant la preuve qu'une configuration est gagnante ou perdante. Ces schémas produits soigneusement par certains modules de leur programme qui les disposent en vue d'une lisibilité optimale sont parfois d'une taille assez petite pour qu'un être humain en vérifie les détails. Leur étude a été un moyen supplémentaire de contrôle que leur programme ne commettait pas d'erreur. Pas question bien sûr de vérifier à la main les preuves impliquant des milliers de configurations, en revanche J. Lemoine et S. Viennot ont pu valider le cas $n = 9$ et battre ainsi le record de $n = 7$ de R. Focardi et F. Luccio en 2004 pour une affirmation vérifiée sans ordinateur. Le théorème qui dit que pour $n = 9$ le jeu des pousses est gagnant pour le joueur qui commence est donc validé sans ordinateur, celui-ci n'ayant été qu'un intermédiaire congédié au moment du contrôle pour plus de sécurité dans le résultat final. Le cas $n = 17$, pour peu qu'on trouve un mathématicien assez patient et courageux, pourrait peut-être aussi être vérifié à la main !

Se débarrasser de l'ordinateur ?

Il est assez amusant de constater que même les plus exigeants des mathématiciens – ceux qui n'acceptent que des démonstrations humainement vérifiables – sont contraints de reconnaître l'utilité des ordinateurs pour ce jeu. La démonstration vérifiée à la main par l'être humain pour $n = 9$ a été écrite grâce à un ordinateur : sans la présentation qu'il propose aucune preuve humainement vérifiable n'aurait été possible.

Une situation analogue s'était déjà présentée en 1996 quand la conjecture de Robbins avait été démontrée par un programme qui en avait fourni une preuve courte et humainement vérifiable. Même ceux qui voudraient bien que l'ordinateur ne joue aucun rôle en mathématiques reconnaîtront qu'il est le seul aujourd'hui à pouvoir écrire une preuve

4. Le jeu des choux de Bruxelles



Les règles du jeu des choux de Bruxelles *(Brussel Sprouts)* sont les mêmes que celles du jeu des pousses, sauf qu'au lieu de points, on part de croix permettant chacune d'accrocher 4 arcs, et que sur chaque courbe, on trace un trait (au lieu d'un point), ce qui crée donc deux libertés de plus pour des extrémités d'arcs à chaque coup.

Le jeu semble proche et peut-être même plus difficile que le jeu des pousses, pourtant c'est une farce mathématique. En partant de n croix, la durée du jeu est nécessairement $5n - 2$. Si n est impair, celui qui commence gagne donc même si, à chaque coup, il fait n'importe quoi, si n est pair c'est le second qui gagnera sans même avoir à réfléchir (voir le déroulement d'une partie sur les côtés).

Voici les étapes du raisonnement qui démontre que la durée du jeu est $5n - 2$.

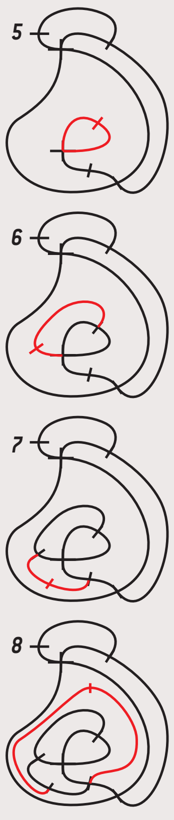
– Le nombre de libertés à chaque instant est exactement de $4n$, car au départ il y a $4n$ libertés et à chaque coup, on en consomme et on en crée deux.

– Chaque coup, sauf au plus $n - 1$, crée une nouvelle zone dans le dessin (au départ il y en a une seule). Lorsque m coups ont été joués et que les $n - 1$ possibilités de jeu sans création de zone ont été épuisées, il y a donc exactement $m - n + 2$ zones.

– Chaque zone contient une liberté au moins, quoi qu'on fasse. Tant qu'il y a deux libertés (ou plus) dans une zone, il est possible de jouer dedans. Quand il n'y en a plus qu'une, on ne peut plus jouer dans la zone, qui consomme donc une liberté pour rien.

– Quand m coups ont été joués, et que les $n - 1$ possibilités de jeu sans création de zone ont été épuisées, le nombre de zones est donc exactement $m - n + 2$. Le nombre de libertés est lui toujours de $4n$.

– Tant que $4n$ est supérieur à $m - n + 2$, on peut jouer, car il y a au moins deux libertés dans une même zone. En revanche, dès que $m - n + 2$, qui augmente d'une unité à chaque coup, est égal à $4n$, chaque zone contient au moins une liberté, et donc en contient exactement une (qui est inutilisable car seule) et donc la partie est bloquée. La partie se poursuit donc précisément jusqu'à ce que $m - n + 2 = 4n$, c'est-à-dire exactement jusqu'à ce que $m = 5n - 2$ et il n'y a jamais de coup suivant.



n	Défaite/victoire pour le 1er joueur	Positions	Défaite/victoire pour le 1er joueur	n	Défaite/victoire pour le 1er joueur	Positions	n	Défaite/victoire pour le 1er joueur	Positions
1	perte	2	gain	17	gain	499	33	?	
2	perte	3	perte	18	perte	4058	34	**gain**	26800
3	gain	6	perte	19	perte	4287	35	**gain**	22131
4	gain	16	perte	20	perte	4683	36	?	
5	gain	38	gain	21	gain	9781	37	?	
6	perte	64	gain	22	gain	6161	38	?	
7	perte	103	perte	23	gain	2139	39	?	
8	perte	205	perte	24	perte	9922	40	**gain**	48579
9	gain	66	perte	25	perte	9836	41	**gain**	48747
10	gain	142	gain	26	perte	19754	42	?	
11	gain	142	gain	27	gain	63224	43	?	
12	perte	498	gain	28	gain	17431	44	?	
13	perte	597	perte	29	gain	4017	45	?	
14	perte	1986	perte	30	perte	68712	46	?	
15	gain	3763	perte	31	perte	69219	47	**gain**	64740
16	gain	1095	?	32	perte	69644	48	?	

5. Les nouveaux résultats de J. Viennot et S. Lemoine. On a indiqué le nombre de configurations qu'il est nécessaire de mémoriser pour prouver le résultat. Ces résultats, obtenus récemment, surpassent tous les résultats obtenus précédemment : le résultat pour 47 points de départ est connu ! Ils ont été calculés en utilisant une méthode étonnante de guidage humain de l'ordinateur. On a aussi représenté en rouge le gain dans le jeu à «Qui perd, gagne» (celui qui se trouve bloqué a gagné). Ce jeu est plus difficile encore que le jeu des pousses normal. Aujourd'hui on n'en connaît le gagnant que pour un nombre de points de départ jusqu'à 15.

suffisamment courte et bien disposée du cas $n = 9$ pour qu'elle puisse être contrôlée sans ordinateur : pour se passer de l'ordinateur, il faut faire appel à lui !

Bien sûr, la base de données des configurations perdantes découvertes par le programme de J. Lemoine et S. Viennot, associées à un programme de jeu l'utilisant, constitue un joueur automatique invincible pour l'être humain. Le champion du monde ultime (c'est-à-dire dans un concours où humains et machines participent) du jeu des pousses est donc un programme... comme c'est le cas pour le jeu d'échecs, le jeu de dames et de nombreux autres jeux de plateau.

L'étude générale du jeu bénéficie aussi des avancées du programme français. Grâce à l'expérience acquise avec l'aide du programme, J. Lemoine et S. Viennot proposent une nouvelle conjecture plus générale que la conjecture de Carnegie Mellon : en ajoutant 6 points dans une même région d'une configuration, on ne change pas la nature gagnante ou perdante de cette configuration.

Au sens strict, cette conjecture a déjà été prouvée fausse (on en a trouvé quelques contre-exemples), mais l'exploration montre qu'elle est vraie dans plus de 90 pour cent des cas. Cette vérité approximative (peut-être ajustable en une vérité robuste) suggère qu'il ne faut pas trop se fier à la conjecture de Carnegie Mellon : en effet, la vieille conjecture pourrait avoir été vérifiée jusqu'à présent parce qu'elle serait comme la nouvelle conjecture (dont elle n'est en fait qu'une forme particulière) : vraie le plus souvent, mais fausse dans l'absolu, les contre-exemples rares ne s'étant pas encore présentés. Le mystère de ce qui se passe quand n tend vers l'infini persiste donc et s'obscurcit plutôt avec les nouveaux résultats !

« Qui perd gagne »

Le jeu des pousses se pratique à qui perd gagne (le joueur qui ne peut plus dessiner un nouvel arc a gagné). Son étude est plus complexe, car il se prête moins bien à la décomposition d'une configuration en sous-configurations. Diverses conjectures ont été formulées dont certaines sont fausses. La seule chose certaine est que pour $n = 1, 2, \ldots$ jusqu'à 15, le gagnant est le joueur 1, puis 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2.

Un autre jeu très proche du jeu des pousses mérite d'être mentionné, car c'est une bonne farce mathématique pas très facile à détecter. Il se nomme le jeu des choux de Bruxelles *(Brussels Sprouts)*. On part de n croix – au lieu de n points – et sur chaque nouvel arc que les joueurs ajoutent à tour de rôle, on trace une barre (au lieu d'un point) en travers de la courbe *(voir la figure 4)*. La barre indique qu'on crée deux extrémités nouvelles pour les arcs que les joueurs dessinent (au lieu d'une seule quand il s'agissait d'un point). L'analyse complète du jeu a montré qu'en partant de n croix initiales, une partie dure invariablement $5n - 2$ coups (le résultat est vrai sur toute surface orientable, et pour les surfaces non orientables un résultat du même type a été découvert en 2007). Le joueur qui commence gagne donc si n est impair et le second joueur gagne si n est pair. Quand vous en aurez assez de perdre contre votre petit-neveu de 6 ans au jeu des pousses, proposez-lui une partie du jeu des choux de Bruxelles, mais ne vous trompez pas dans le calcul de parité pour savoir qui doit commencer.

Auteur & Bibliographie

J.-P. DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

World Game of Sprouts Association : http://www.geocities.com/chessdp/

J. LEMOINE et S. VIENNOT, *Games of Sprouts* (informations sur les records), 2008 : http://sprouts.tuxfamily.org/wiki/doku.php?id=home

J. LEMOINE et S. VIENNOT, *A Further Computer Analysis of Sprouts*, 2007 : http://download.tuxfamily.org/sprouts/sprouts-lemoine-viennot-070407.pdf

G. CAIRNS et K. CHARTARRAYAWADEE, *Brussels sprouts and cloves*, in *Mathematics Magazine*, pp. 46-58, février 2007.

R. FOCARDI et F. L. LUCCIO, *A modular approach to sprouts*, in *Discrete Applied Mathematics*, vol. 144(3), pp. 303-319, 2004.

E.R. BERLEKAMP, J.H. CONWAY et R.K. GUY, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, vol. 2, Academic Press, New York, Nouvelle édition en 2003.

D. APPLEGATE, G. JACOBSON et D. SLEATOR, *Computer analysis of sprouts*, in *Tech. Report CMU-CS-91-144*, Carnegie Mellon University, 1991.

M. GARDNER, *Mathematical games : Sprouts and Brussels sprouts, games with a topological flavor*, in *Scientific American*, n° 217, juillet 1967.