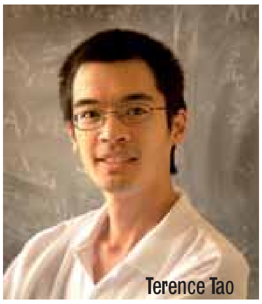
LOGIQUE & CALCUL

Tao : l'éducation réussie d'un surdoué

Qu'il s'occupe de nombres premiers ou de géométrie fractale, Terence Tao invente et produit des résultats mathématiques de première importance. Nombreux sont ceux qui le considèrent comme le meilleur mathématicien vivant.

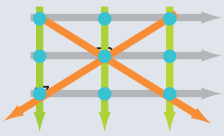
Jean-Paul DELAHAYE



Terence Tao

1. Carrés magiques

L'une des conséquences immédiates des résultats de Terence Tao est l'existence de carrés magiques de toutes tailles dont les éléments sont des nombres premiers, comme les carrés magiques d'ordres 3 et 4.



17	89	71
113	59	5
47	29	101

Somme 177

41	89	83
113	71	29
59	53	101

Somme 213

37	83	97	41
53	61	71	73
89	67	59	43
79	47	31	101

Somme 258

41	71	103	61
97	79	47	53
37	67	83	89
101	59	43	73

Somme 276

Terence Tao est un mathématicien sympathique, modeste, aimant travailler avec ses collègues. Il s'intéresse à l'enseignement et à la diffusion des mathématiques vers tous les publics, il est curieux et poursuit des travaux simultanément dans plusieurs domaines de recherche. Avec son épouse Laura, ingénieur à la NASA, ils élèvent leur fils et rien ne semble vraiment extraordinaire dans la vie de cet universitaire aujourd'hui professeur à Los Angeles.

Pourtant, T. Tao est considéré par de nombreux chercheurs comme le plus grand génie vivant des mathématiques. Il est devenu docteur de l'Université de Princeton à l'âge de 20 ans et, une décennie plus tard, ses travaux lui ont valu la plus importante distinction mathématique, la médaille Fields qui lui a été décernée au Congrès international de mathématiques de Madrid en 2006 conjointement avec les Russes Grigori Perelman et Andreï Okounkov, et le Français Wendelin Werner.

Ses parents Billy Tao, pédiatre, et sa mère, Grace Tao, professeur de mathématiques, sont des Chinois cantonais de Hong-Kong qui émigrèrent en Australie où Terence Tao naquit en 1975 à Adélaïde. Alors qu'il avait à peine deux ans, ses parents racontent qu'ils le surprirent en train d'apprendre à compter à un autre enfant... de cinq ans. Quand on lui demanda comment il connaissait les nombres et les lettres, il répondit qu'il les avait appris en regardant l'émission télévisée *Sesame Street*.

Son parcours d'enfant prodige est tout à fait étonnant, mais le plus remarquable dans son cas est l'intelligence qui a été déployée par ses parents et les différents éducateurs et professeurs autour de lui pour l'aider sans le contraindre, le soutenir sans l'enfermer, et lui offrir tout ce qui était nécessaire et utile à l'épanouissement de sa personnalité et de son talent.

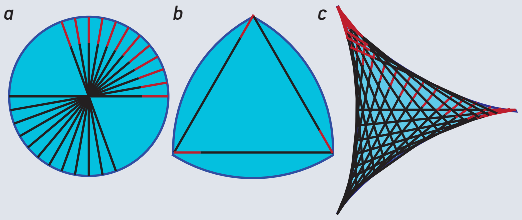
Il a suivi un système complexe de scolarité ajustée où, en fonction de sa progression différente selon les disciplines, il assistait à des cours dans plusieurs classes à la fois avec une avance d'un an, deux ans ou plus selon les matières. Ce soin minutieux de son entourage a permis un développement harmonieux de son intérêt pour les mathématiques, en même temps qu'un apprentissage accéléré, progressif et complet de la discipline. Cela lui a forgé une culture profonde et développé une capacité technique parfaite.

Arrivé à l'âge de mener ses propres travaux, ces qualités ont pleinement produit leurs effets, faisant de lui un être exceptionnellement imaginatif et compétent, d'une efficacité inégalable, qui adore son métier de mathématicien, semble heureux, ouvert au monde extérieur et doté d'une capacité de travail hors du commun.

Mentionnons quelques étapes de ce parcours ahurissant.

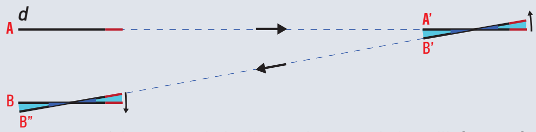
À huit ans, il obtient un total de 760 points sur 800 au test standardisé de mathématiques SAT *(Scholastic Assessment Test)* utilisé aux États-Unis pour mesurer le

2. L'aiguille de Kakeya

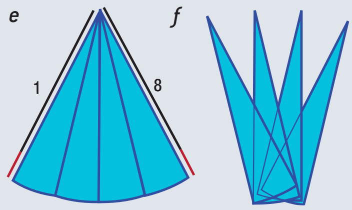


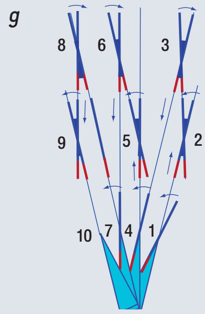
Parmi les sujets sur lesquels Terence Tao travaille, celui né du problème de Kakeya est des plus fascinants. Il s'agit de faire tourner une aiguille de 180 degrés de façon que l'aire balayée soit la plus petite possible. Il est évidemment possible de tourner l'aiguille dans un disque *(a)*, dans un triangle de Reuleaux *(b)* ou dans la surface qui a été longtemps considérée comme la plus petite possible, la deltoïde *(c)*. En 1928, à la surprise générale, Abram Besicovitch a démontré que l'aire balayée pouvait être réduite autant qu'on le voulait. La méthode se décompose en trois étapes.

I) Pour déplacer une aiguille de longueur 1 d'une position A à une position B parallèle à la position A, on peut réduire l'aire nécessaire autant qu'on veut. Tout tient dans le dessin *(d)* suivant, où l'aiguille est translatée de A à A', tourne vers B', est translatée vers B", puis est tournée vers B (lors des deux translations, l'aire balayée est nulle). En utilisant une oblique de plus en plus horizontale, on réduit autant qu'on le veut l'aire *(en bleu)* balayée par l'aiguille pour passer de A à B.



II) Pour faire tourner l'aiguille en diminuant l'aire utilisée, on découpe le secteur d'angle en secteurs plus petits. Sur le dessin *(e)*, on envisage un secteur de 30 degrés (qu'il faudrait prendre 6 fois pour obtenir une rotation de l'aiguille de 180 degrés) que l'on découpe en 4 morceaux. On rapproche par translation les 4 morceaux pour qu'ils se superposent le plus possible, ce qui diminue l'aire totale *(f)*. La figure obtenue permet de faire tourner l'aiguille de 30 degrés selon l'opération « en hachoir » (1-2-3-4-5-6-7-8-9-10) indiquée sur la figure *g*. Au total, on aura une surface d'aire inférieure à celle du secteur initial *(e)*, tout en pouvant toujours faire tourner l'aiguille de 30 degrés.





(III) On opère cette construction de manière répétitive en augmentant par étapes successives le nombre des secteurs, par exemple en le multipliant par 4 à chaque fois. On diminue ainsi autant qu'on le veut l'aire nécessaire à la rotation de l'aiguille. Les arbres obtenus se nomment arbres de Perron, car cette méthode a été décrite par le mathématicien O. Perron en 1928. Avec 24 117 248 pièces et 11 étapes de construction, l'aire obtenue est cinq fois plus petite que l'aire du secteur d'angle initial.

T. Tao a démontré que les constructions de ce type en dimension *n* conduisent à des ensembles qui, même s'ils sont très fins (à la limite, leur aire est nulle), ne le sont pas autant qu'on pourrait le souhaiter : leur dimension fractale est assez grande.

niveau des élèves à l'entrée au collège, alors que dans toute l'histoire de ce test seul un autre candidat a dépassé 700.

Tableau de chasse

Dès l'âge de neuf ans, il avait atteint le niveau de mathématiques permettant d'entrer à l'Université et commençait d'ailleurs à en étudier les programmes.

En 1986, à dix ans, il est le plus jeune compétiteur aux Olympiades internationales de mathématiques et il y reçoit la médaille de bronze. L'année suivante, il obtient la médaille d'argent avant, un an plus tard, d'emporter la médaille d'or qu'il se voit donc remettre avant ses 13 ans, performance qui ne s'était jamais produite.

Il écrit un livre de mathématiques à 15 ans, centré sur les méthodes qu'il utilise pour attaquer et résoudre les difficiles problèmes qu'on soumet aux concurrents des Olympiades mathématiques.

À 20 ans, il soutient une thèse de mathématiques à l'Université de Princeton dans le domaine de l'analyse harmonique sous la direction de Elias Stein... et depuis il a encadré à son tour quatre étudiants en doctorat.

Il reçoit le prix Salem en 2000, le prix Bôcher en 2002, le prix de l'Institut Clay en 2003, un prix de l'*American Mathematical Society* et la médaille de la Société australienne de mathématiques en 2005. En 2006, il se voit attribuer le prix Ramanujan et la médaille Fields qui couronne cette série inégalée de récompenses... que nous n'avons énumérée qu'incomplètement.

Le 18 mai 2007, il est élu *Fellow* de la *Royal Society* de Londres, puis, en 2009, il devient membre de l'*American Academy of Art and Science*.

Aujourd'hui, T. Tao a déjà publié plus de 150 articles dans les meilleures revues de mathématiques ainsi que six livres. Il tient aussi un blog extrêmement fourni où il expose et discute les nombreux sujets de recherche auxquels il s'intéresse. John Gardnett, professeur à l'Université de Californie, indique que « Terry est comme Mozart. Les mathématiques débordent et coulent de lui sans effort. La différence avec Mozart est qu'il n'a aucun problème de personnalité : tout le monde l'aime bien. Il n'y a qu'un mathématicien par génération possédant un tel talent. Le sien est inouï et il est probablement le meilleur mathématicien vivant aujourd'hui. Terry sait débrouiller les problèmes les plus compliqués et les réduit à des choses simples. »

3. Le théorème de Green-Tao

En 2004, Ben Green et Terence Tao démontrent un résultat attendu depuis longtemps : il existe des progressions arithmétiques de nombres premiers aussi longues qu'on le veut. Voici des progressions arithmétiques de toutes les longueurs jusqu'à 25. Pour chaque longueur k, on a indiqué la progression ayant cette longueur et dont le dernier terme est le plus petit possible.

La démonstration de Green et Tao ne se contente pas de prouver qu'il existe pour tout entier k une progression de nombres premiers de longueur k, elle établit qu'on peut trouver une suite arithmétique de nombres premiers de longueur k composée uniquement de nombres inférieurs à :

$$2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{100k}}}}}}}}$$

En théorie, pour un k donné, cela permet de trouver des progressions arithmétiques de longueur k de manière effective : on essaie toutes les progressions jusqu'à la borne donnée par B. Green et T. Tao ; comme elles sont en nombre fini, on en trouve nécessairement une composée uniquement de nombres premiers. En pratique, il devient très vite impossible de mener le calcul, quels que soient les moyens informatiques utilisés.

Les calculs menés pour les petites valeurs de k montrent que la borne donnée par le théorème de Green-Tao pourrait être remplacée par la borne bien plus petite : $k! + 1$.

k	Progression	Dernier terme
3	$3 + 2n$	7
4	$5 + 6n$	23
5	$5 + 6n$	29
6	$7 + 30n$	157
7	$7 + 150n$	907
8	$199 + 210n$	1669
9	$99 + 210n$	1879
10	$199 + 210n$	2089
11	$110437 + 13860n$	249037
12	$110437 + 13860n$	262897
13	$4943 + 60060n$	725663
14	$31385539 + 420420n$	36850999
15	$115453391 + 4144140n$	173471351
16	$53297929 + 9699690n$	198793279
17	$3430751869 + 87297210n$	4827507229
18	$4808316343 + 717777060n$	17010526363
19	$8297644387 + 4180566390n$	83547839407
20	$214861583621 + 18846497670n$	572945039351
21	$5749146449311 + 26004868890n$	6269243827111
22	$11410337850553 + 475180 \cdot 19n$	08201410428753
23	$403185216600637 + 9523 \cdot 23n$	449924511422857
24	$515486946529943 + 136831 \cdot 23n$	1217585417914253
25	$6171054912832631 + 366384 \cdot 23n$	8132758706802551

Il est impossible d'évoquer tous les sujets sur lesquels T. Tao a travaillé et les résultats remarquables qu'il a obtenus, car une large part d'entre eux appartient à des domaines spécialisés des mathématiques dont seuls quelques experts appréhendent le sens. Cependant, plusieurs résultats de T. Tao concernent des parties des mathématiques que tout le monde comprend. C'est bien sûr à ceux-là que nous allons nous intéresser.

Progressions arithmétiques de nombres premiers

Aujourd'hui, l'étude de la suite des nombres premiers avance lentement. Nous avons vu le mois dernier que plus d'un siècle avait été nécessaire pour élucider les constatations élémentaires faites par Tchebychev sur les courses de nombres premiers. L'un des sujets les plus délicats les concernant est l'étude des écarts qui les séparent. La conjecture des nombres premiers jumeaux énonce par exemple qu'il existe une infinité de couples de nombres premiers séparés de deux unités, comme le sont 11 et 13 ou 857 et 859. Cette conjecture résiste à tous les assauts, malgré les efforts considérables faits pour en venir à bout. Une autre conjecture du même type portait sur les nombres premiers en progression arithmétique ; elle est maintenant tombée.

Les nombres premiers 3, 7 et 11 forment une progression arithmétique de longueur 3 et de raison 4 :

$7 = 3 + 4$; $11 = 7 + 4$.

Les nombres premiers 5, 11, 17, 23, 29 forment une progression arithmétique de longueur 5 et de raison 6 :

$11 = 5 + 6$; $17 = 11 + 6$; $23 = 17 + 6$; $29 = 23 + 6$.

Plus on cherche de longues progressions arithmétiques de nombres premiers, plus il faut aller loin pour le premier terme et accepter que la raison soit grande. Le record de longueur est aujourd'hui de 25 termes ; cette progression a été découverte le 17 mai 2008 par Raanan Chermoni et Jaroslaw Wroblewski :

$6\,171\,054\,912\,832\,631 + 842\,683\,n$, avec $n = 0, 1, 2, ..., 24$.

On ne connaît pas aujourd'hui de progression arithmétique de nombres premiers de longueur 26. Précisons bien qu'il s'agit ici de progressions arithmétiques de nombres premiers non nécessairement consécutifs (par exemple, entre 3 et 7, il y a 5). La recherche de nombres premiers consécutifs en progression arithmétique est aussi intéressante, mais bien sûr plus difficile encore : la plus longue séquence de ce type connue aujourd'hui a pour longueur 10. Elle a pour raison 210 et commence au nombre colossal suivant :
1 009 969 72 469 714 247 637 786 655 587 969 840 329 509 325 689 190 041

803 603 417 758 904 341 703 348 882 159 067 229 719.

Sur ce sujet, toute avancée théorique était considérée comme d'une extrême difficulté. En l'absence de méthodes reconnues, on désespérait même d'obtenir le moindre résultat rapidement. En particulier, les spécialistes considéraient comme hors de portée la démonstration de la conjecture affirmant qu'il existe des progressions arithmétiques de nombres premiers de toute longueur. Pourtant, en 2004, T. Tao et Ben Green, de l'Université de Cambridge, ont réussi l'exploit de démontrer que pour tout entier *N* donné, il existe une infinité de progressions arithmétiques de nombres premiers de longueur *N*. Ce résultat est maintenant connu sous le nom de théorème de Green-Tao et il vaut à leurs auteurs l'admiration de tous les chercheurs en mathématiques.

Précisons deux points. *(a)* Le théorème de Green-Tao ne concerne pas les progressions arithmétiques de nombres premiers successifs ; même si on considère que le résultat est sans doute vrai avec la contrainte « successifs » ; il faudra encore attendre. *(b)* Le résultat n'a pas pour conséquence qu'il existe des suites de nombres premiers en progression arithmétique de longueur infinie : il y en a d'aussi longues qu'on le veut, mais pas de longueur infinie. On sait qu'il ne peut pas exister de progression arithmétique de nombres premiers de longueur infinie, car s'il en existait, ils ne se « raréfieraient pas » et cela contredirait le résultat démontré depuis longtemps que la densité des nombres premiers tend vers zéro.

Une stratégie... qui n'est pas utilisable par tous

Ce qui a beaucoup étonné la communauté des arithméticiens dans la méthode de preuve utilisée par B. Green et T. Tao est qu'elle est profondément novatrice et provient d'une attaque organisée du problème conçue comme une offensive militaire. T. Tao explique d'ailleurs :

« Beaucoup de gens, face à un problème de mathématiques, tentent de le résoudre frontalement. Même s'ils réussissent, ils ne comprennent pas toujours très bien ce qu'ils ont fait. De mon côté, avant de régler les détails, je travaille la stratégie. Une fois que vous avez la stratégie, même un problème très compliqué se trouve découpé en une série de petits problèmes. Je n'arrive pas à me satisfaire de la simple résolution d'un problème et je cherche toujours à voir ce qui se passe si on change un peu l'énoncé. C'est en expérimentant qu'on accède à la compréhension profonde des situations et qu'on finit par avoir une bonne idée de ce qui est important ou accessoire. »

Toutefois, s'ils aident T. Tao à créer des méthodes victorieuses pour affronter les problèmes que les autres mathématiciens ne savent pas résoudre, c'est avant tout parce que T. Tao possède un talent exceptionnel.

L'un des ingrédients principaux de la méthode de B. Green et T. Tao pour le théorème sur les progressions arithmétiques a été un théorème du mathématicien hongrois Endre Szemerédi qui indique :

Si un ensemble *E* de nombres entiers est tel que le rapport [nombre d'éléments de *E* inférieurs à *n*] / *n* ne tend pas vers zéro,

4. Changer un seul chiffre...

Le nombre premier 127 écrit en base 2 est 1111111. En modifiant l'un de ses chiffres, on a :
1111110 = 126 ; 1111101 = 125 ;
1111011 = 123 ; 1110111 = 119 ;
1101111 = 111 ; 1011111 = 95 ; 0111111 = 63.

Ce sont tous des nombres composés. Autrement dit, le nombre 127 est premier, mais dès qu'on change l'un de ses chiffres en base 2, il devient composé. Nous dirons que 127 est un nombre premier instable en base 2 *(weakly prime number in base* 2). C'est le cas aussi de 173, 191, 233.

Existe-t-il une infinité de tels nombres ?

Et en base 10, existe-t-il de tels nombres ?

Dans un article récent de 2008, T. Tao donne une solution complète du problème : dans toute base de numération B, il existe une infinité de nombres premiers instables. Le résultat précise même que dans toute base B, la proportion de ces nombres premiers parmi les *n* premiers nombres premiers est strictement supérieure à une constante positive (autrement dit, ces nombres ne se raréfient pas à l'infini).

En base 10, les premiers nombres premiers instables sont :
294 001 ; 505 447 ; 584 141 ; 604 171 ; 971 767 ; 1 062 599 ; 1 282 529 ; 1 524 181 ; 2 017 963 ; 2 474 431 ; 2 690 201 ; 30 855 533 326 489 ; 4 393 139 ; 5 152 507 ; 5 564 453 ; 5 575 259 ; 6 173 731 ; 6 191 371 ; 6 236 179 ; 6 463 267 ; 6 712 591 ; 7 204 777 ; 7 469 789.

Ce type de résultats a une certaine importance pour les tests de primalité (algorithme pour savoir si un nombre entier est un nombre premier ou non). En effet, si un nombre *n* est donné à un algorithme sous la forme de la suite de ses chiffres en base 10 par exemple, le résultat de Tao a pour conséquence que l'algorithme ne peut établir que le nombre est premier qu'après avoir pris connaissance de tous ses chiffres.

Pour un nombre donné, un test de primalité devra donc mener un calcul au moins proportionnel à sa longueur L : il ne peut pas exister de test très rapide de primalité comme il en existe pour déterminer si un nombre est divisible par 2 ou 5 (le dernier chiffre suffit), par 4 (les deux derniers chiffres suffisent).

Comme le fait remarquer T. Tao dans son blog, le résultat sur la fréquence de ces nombres, associé au résultat sur les suites arithmétiques de nombres premiers, permet d'affirmer qu'il existe des suites de nombres premiers instables en base B (B quelconque) de toute longueur.

Les nombreuses remarques que contient l'article où il démontre ce résultat illustrent la méthode de T. Tao : après avoir démontré le théorème principal, il en examine soigneusement les hypothèses une à une, envisage les généralisations possibles, recherche des contre-exemples, et commente les conséquences algorithmiques de son travail.

5. Un peu de magie

Ensembles magiques

Les ensembles magiques de nombres premiers sont des ensembles de nombres premiers tels qu'en faisant la moyenne deux à deux des éléments de l'ensemble, on ne trouve que des nombres premiers tous distincts. L'ensemble {3, 7, 19} est magique, car la moyenne entre 3 et 7 vaut 5 (qui est premier), entre 7 et 19 elle vaut 13 (qui est premier), entre 3 et 19 elle vaut 11 (qui est premier).

Voici un tableau des quelques ensembles magiques.

2 3, 7
3 3, 7, 19
4 3, 11, 23, 71
5 3, 11, 23, 71, 191
6 3, 11, 23, 71, 191, 443
7 5, 17, 41, 101, 257, 521, 881
8 257, 269, 509, 857, 1697, 2309, 2477, 2609
9 257, 269, 509, 857, 1697, 2309, 2477, 2609, 5417
10 11, 83, 251, 263, 1511, 2351, 2963, 7583, 8663, 10691
11 757, 1009, 1117, 2437, 2749, 4597, 6529, 10357, 11149, 15349, 21757
12 71, 1163, 1283, 2663, 4523, 5651, 9311, 13883, 13931, 14423, 25943, 27611.

Une des conséquences du théorème de Green-Tao est qu'il existe des ensembles magiques aussi grands que l'on veut.

Ensembles supermagiques

Pour construire les ensembles supermagiques de nombres premiers, on impose que *toutes* les moyennes (de deux nombres ou plus) soient des nombres premiers et que tous les nombres premiers ainsi obtenus soient différents.

Comme l'a montré Andrew Granville, le théorème de Green-Tao implique qu'on peut trouver de tels ensembles aussi grands que l'on veut. Pourtant, en pratique, on ne sait pas aller plus loin que ceux-ci :

2 3, 7
3 7, 19, 67
4 5, 17, 89, 1277
5 209173, 322573, 536773, 1217893, 2484733.

alors E contient des progressions arithmétiques de toute longueur.

Ce résultat ne s'applique pas directement aux nombres premiers, car justement le rapport mentionné tend vers 0 si E est l'ensemble de nombres premiers. Cependant, ce résultat délicat possède plusieurs démonstrations récemment élaborées et c'est en en extrayant les éléments importants et en les combinant que B. Green et T. Tao ont pu mener leur attaque stratégique et obtenir la conclusion recherchée pour l'ensemble E des nombres premiers. La démonstration est qualifiée d'élémentaire, car elle ne met pas en œuvre les méthodes de théorie analytique des nombres (faisant usage des fonctions à variables complexes) qu'on pensait pourtant essentielles à la réussite de ce type d'exploits.

Une chose remarquable à propos du théorème de Green-Tao est qu'il a de très nombreuses conséquences intéressantes conduisant en particulier à traiter d'autres conjectures, dont par exemple celle affirmant l'existence de carrés magiques de nombres premiers de toutes les tailles *(voir la figure 1)*. L'idée est de partir d'un carré magique classique (donc composé avec les nombres entiers 1, 2, ..., n^2) et de remplacer partout dans le carré magique le terme i par le i-ème terme d'une progression arithmétique de nombres premiers de longueur n^2. Comme on sait qu'il existe des carrés magiques de toutes tailles...

Faire tourner une aiguille ?

Parmi les thèmes auxquels T. Tao s'intéresse et qu'il contribue à faire progresser, l'un deux est particulièrement fascinant, car, bien que formulé au départ comme un problème géométrique élémentaire, il s'est révélé avoir des liens avec de nombreux autres sujets mathématiques. Il s'agit des diverses variantes et généralisations du problème de Kakeya.

Quel espace faut-il pour faire demi-tour ? En voiture, pour faire un demi-tour, il vous faut disposer d'une certaine aire autour de la voiture. Simplifié par les mathématiciens, le problème devient celui du demi-tour d'une aiguille ou problème de Soichi Kakeya, que celui-ci posa en 1917 : quelle est la plus petite surface permettant à une aiguille de longueur 1 de faire un demi-tour ?

Bien sûr, un cercle de diamètre 1 suffit et donc le nombre cherché est inférieur à $\pi/4 = 0{,}78539...$ (l'aire du cercle de diamètre 1). Un triangle équilatéral de hauteur 1 suffit encore et possède une aire un peu plus petite qui est $\sqrt{3}/3 = 0{,}57535...$ Cependant, à la surprise générale, le mathématicien russe Abram Besicovitch démontra en 1919 que quel que soit le nombre $\epsilon > 0$ qu'on se fixe, il est possible de trouver un morceau du plan d'aire inférieure à ϵ permettant le demi-tour d'une aiguille de longueur 1. La figure 2 donne l'idée de la démonstration de cet étonnant résultat.

Depuis, on s'intéresse au problème des sous-ensembles du plan possédant un segment de longueur 1 dans toutes les directions possibles, les « ensembles de Besicovitch ». On généralise bien sûr la définition à toutes les dimensions n.

Parmi les résultats démontrés, l'un d'eux, dû à Roy Davis en 1971, indique que même si un ensemble de Besicovitch du plan est d'aire nulle, il contient tellement de points que sa dimension fractale de Minkowski est nécessairement 2. La dimension fractale d'un ensemble est une sorte de mesure de sa densité : un point a bien sûr une dimension fractale égale à 0, et une courbe une dimension égale à 1. Cependant certains ensembles fractals sont de nature intermédiaire et ont alors des dimensions fractales non entières. Par exemple, le fameux flocon de von Koch est de dimension fractale 3/2 : c'est plus qu'une courbe et moins qu'un morceau de plan.

Le résultat de R. Davis signifie donc que les ensembles de Besicovitch du plan, bien qu'ayant une aire nulle, gardent quand même la propriété d'avoir une dimension fractale 2 et sont donc en quelque sorte « extrêmement épais ». Ce résultat est important et l'on pense qu'il s'étend à toutes les dimensions. Cette conjecture est toujours non démontrée, mais on progresse et il est étonnant de voir à quel point elle a intéressé de prestigieux mathématiciens dont Jean-Pierre Kahane (membre de l'Académie des sciences), Charles Fefferman (médaille Fields 1978), Jean Bourgain (médaille Fields 1994), Timothy Gowers (médaille Fields 1998) et T. Tao (médaille Fields 2006).

En 1999, J. Bourgain a établi que la dimension fractale d'un ensemble de Besicovitch était d'au moins 0,52 n + 0,48, ce qui donne par exemple : 3,08 pour n = 5 ; 5,68 pour n = 10 ; 52,48 pour n = 100. Ces résultats ont été améliorés par Nets Katz et T. Tao qui ont obtenu : 3,58 pour n = 5 ; 6,51 pour n = 10 ; 59,23 pour n = 100. Le problème a toutes sortes de variantes intéressantes et c'est l'un des domaines préférés de T. Tao qui, en plus du record qu'on vient de citer concernant la conjecture de Kakeya, a publié plusieurs articles importants sur le sujet.

Changement d'un chiffre

T. Tao a une sensibilité de mathématicien moderne. Outre qu'il sait programmer, il connaît bien les problèmes de l'informatique théorique et ne dédaigne pas de s'y intéresser. L'un de ses résultats sur les nombres premiers concerne la densité des nombres premiers qui deviennent composés dès qu'on en modifie un chiffre. Ce résultat a des conséquences pour les algorithmes qui testent si un nombre est premier ou non.

Contrairement à certains mathématiciens qui éprouvent une certaine hésitation, voire de la répugnance, à évoquer toute considération un peu vague à propos des mathématiques, T. Tao (en particulier dans son blog) n'hésite pas à s'adonner à des réflexions méthodologiques, philosophiques ou logiques sur les mathématiques. La recherche des principes généraux de raisonnement ou d'analyse des situations le préoccupe de manière continue et semble jouer un rôle central dans son approche stratégique des questions les plus difficiles.

Récemment, ses réflexions sur divers principes généraux comparables pour l'analyse au principe des tiroirs (évoqué dans cette rubrique il y a deux mois) ont conduit deux logiciens, Jaime Gaspar et Ulrich Kohlenbach, de l'Université de Darmstadt en Allemagne, à une série de résultats très fins sur les axiomatiques de l'analyse. Chose amusante à ce sujet, qui montre que T. Tao, tout aussi génial qu'il soit, est sujet comme tout le monde à l'erreur, la formulation d'un des principes généraux d'analyse par T. Tao s'est révélée fausse, et il a dû en proposer une version corrigée.

Réflexions sur les fondements, modernité, ouverture

Toujours dans le cadre des analyses stratégiques et méthodologiques générales, T. Tao aime bien mentionner le hasard et le pseudohasard qu'on trouve dans les objets mathématiques. Dans le cas de l'ensemble de nombres premiers, l'idée est d'évaluer leur importance relative et d'exploiter les deux composantes (structurée et aléatoire) de cet ensemble infini pour les contrôler simultanément, ce qui est important dans le cas des suites arithmétiques de nombres premiers. Il est clair en effet que, d'une part, les nombres premiers constituent un ensemble très structuré (à partir de 2, il n'y a plus aucun nombre premier pair ; la densité des nombres premiers est bien déterminée, etc.) et que, d'autre part, cet ensemble a aussi des traits qui le rapprochent des objets aléatoires : la conjecture de Riemann s'interprète d'ailleurs comme l'affirmation que la parité du nombre de facteurs premiers des entiers se comporte comme une suite aléatoire *(voir la rubrique du mois dernier)*.

On le voit, loin d'être seulement un technicien parfait à l'efficacité surhumaine, T. Tao construit sa conception des mathématiques sur des bases modernes et recherche autant que possible à prendre du recul pour apercevoir l'univers mathématique dans sa totalité, dont il est sans doute aujourd'hui celui qui en comprend le mieux les mystères et la beauté.

L'AUTEUR

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

✔ BIBLIOGRAPHIE

T. Tao, **Pages personnelles.** Consulté en janvier 2010 : http://www.math.ucla.edu/~tao/

T. Tao, **Poincaré's legacies : Pages from Year Two of a Mathematical Blog**, American Mathematical Society, 2009.

A. Granville, **Prime number patterns**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 115, pp. 279-296, 2008.

T. Tao, **Structure and Randomness : Pages from Year One of a Mathematical Blog**, American Mathematical Society, 2008.

B. Green et T. Tao, **The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions**, *Annals of Math.*, vol. 167, pp. 481-547, 2008.

T. Tao, **A remark on primality testing and decimal expansions**, *Journal of the Australian Mathematical Society*, 2008. Voir : http://arxiv.org/abs/0802.3361

T. Tao, **Solving Mathematical Problems : A Personal Perspective**, Oxford University, Press, 2006.

M. A. (Ken) Clements, **TerenceTao**, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 15, n° 3, pp. 213-238, août 1984.

B. Tao, **Parental involvement in gifted education**, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 17, n° 3, pp. 313-321, août 1986.