J.-M. Thiriet

Nombres amiables et suites aliquotes

JEAN-PAUL DELAHAYE

Les suites aliquotes occupent les mathématiciens depuis des millénaires, et les ordinateurs depuis cinquante ans.

J'ai toujours pensé que la théorie des nombres était une science expérimentale et d'ailleurs avant l'existence des ordinateurs Gauss, Ramanujan et bien d'autres la considérèrent ainsi.
Richard Guy

Les nombres parfaits, les paires amiables, les chaînes sociables et les suites aliquotes que nous allons examiner intriguent les mathématiciens et passionnent les amateurs depuis plus de deux millénaires. Cet engouement s'explique : l'entrée dans cette discipline mathématique est permise à tous et pourtant si les questions sont faciles à formuler, les réponses sont difficiles à trouver. En visitant ce domaine, chacun éprouve le sentiment d'être en contact direct avec les plus profonds mystères mathématiques. Le raisonnement et le calcul, même appliqués avec obstination, ne font qu'écorner légèrement cette forteresse de l'infini arithmétique.

Tout part de la simple considération de la somme des diviseurs d'un nombre. Prenons par exemple 10. Ses diviseurs à l'exclusion de 10 lui-même (on les dénomme les parties aliquotes de 10) sont 1, 2 et 5 et leur somme est 8. On dit que les parties aliquotes de 10 ont pour somme 8 et on écrit $s(10) = 8$. Pour vous entraîner, vérifiez que : $s(1)=0$, $s(2)=1$, $s(3)=1$, $s(4)=3$, $s(5)=1$, $s(6)=6$, $s(7)=1$, $s(8)=7$, $s(9)=4$.

En passant, vous avez remarqué que $s(6) = 6$. Existe-t-il d'autres nombres égaux à la somme de leurs parties aliquotes ? Si vous cherchez un peu, vous trouverez $28=1+2+4+7+14$. Cette propriété qu'un nombre soit égal à la somme de ses parties aliquotes semblait si merveilleuse qu'on appela *parfaits* les nombres qui la vérifiaient.

Les pythagoriciens, semble-t-il, s'intéressèrent les premiers à ces nombres. Saint Augustin (354-430), dans le chapitre 30 de *La cité de Dieu,* défend l'idée que Dieu aurait pu créer le monde en un

1. LES PARTIES ALIQUOTES

A. Une formule pour calculer *s(n)*

Si n est un nombre entier, la somme des diviseurs de n autres que n (que l'on dénomme les parties aliquotes de n) est notée $s(n)$. Exemple : $s(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.
Les nombres parfaits sont ceux tels que $s(n)=n$. Si l'on connaît la décomposition en facteurs premiers du nombre $n = p_1^{a_1}\, p_2^{a_2} \ldots\, p_k^{a_k}$ (ainsi $3400 = 2^3.5^2.17$), alors $s(n) = (1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{a_1})(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{a_2})\ldots(1+p_k+p_k^2+\ldots+p_k^{a_k}) - n$, soit, avec la formule de la somme d'une série géométrique, $s(n)=[(p_1^{a_1+1}-1)/(p_1-1)]\,[(p_2^{a_2+1}-1)/(p_2-1)]\ldots[(p_k^{a_k+1}-1)/(p_k-1)] - n$ (exemple : $s(3400)=(2^4-1)/1.(5^3-1)/4.(17^2-1)/16 - 3400 = 4970$)
Cette formule est utilisée en pratique pour calculer $s(n)$ et mener les recherches sur les parties aliquotes. On en déduit la caractérisation suivante des nombres parfaits : ce sont les nombres n qui vérifient l'égalité suivante (où les a_i sont les exposants de la décomposition en facteurs premiers de n) $n=[(p_1^{a_1+1}-1)/(p_1-1)].[(p_2^{a_2+1}-1)/(p_2-1)]\ldots[(p_k^{a_k+1}-1)/(p_k-1)]-n$.
Ainsi, $28=2^2.7$ est un nombre parfait car $(2^3-1)/1.(7^2-1)/6-28=28$

B. Le nombre parfait impair de René Descartes ?

Voilà deux millénaires que les mathématiciens cherchent des nombres parfaits impairs et qu'ils n'en trouvent aucun. Ils ne réussissent pas non plus à démontrer que de tels nombres n'existent pas. La conjecture «il n'existe aucun nombre parfait impair» est sans doute la plus ancienne conjecture mathématique irrésolue. En 1989 R.P. Brent et G.L. Cohen ont prétendu avoir démontré que s'il existe un nombre parfait impair alors il possède au moins 300 chiffres. Pourtant dans des notes de René Descartes écrites vers 1638 était inscrit un résultat étonnant : $n = 198585576189 = 3^2.7^2.11^2.13^2.22021$
L'égalité ne contient pas d'erreur et un calcul montre que :
$(3^3-1)/2.(7^3-1)/6.(11^3-1)/10.(13^3-1)/12.(22021^2-1)/22020-n=n$
D'après la formule donnée au-dessus le nombre 198585576189 semble donc être un nombre parfait impair. Non seulement la conjecture millénaire qu'il n'existe pas de nombre parfait impair aurait été résolue il y a plus de trois siècles par Descartes (et elle serait fausse !), mais le résultat de Brent et Cohen serait lui aussi erroné. Qu'en pensez-vous ?

Solution : Tous les calculs présentés sont exacts, mais le nombre 22 021 n'est pas premier (il est égal à 361 par 61). L'égalité 198 585 576 189 = $3^2.7^2.11^2.13^2.22\,021$, tout en étant juste n'est donc pas une décomposition en facteurs premiers et on ne peut donc pas appliquer la formule donnée pour le calcul de $s(n)$. En clair, si 22 021 était un nombre premier, le nombre de Descartes serait bien un nombre parfait impair, mais... 22 021 n'est pas premier. L'existence de tels nombres impairs et «parfaits à un poil près» suggère que la conjecture des nombres premiers parfaits impairs pourrait bien être fausse. On n'a pas de raison de penser que le résultat de Brent et Cohen est faux et donc on doit rechercher des nombres parfaits impairs parmi ceux qui possèdent plus de 300 chiffres,,ce qui est très difficile.

instant, mais qu'il préféra le créer en 6 jours, car 6 signifie la perfection. On connaît aujourd'hui 39 nombres parfaits dont le dernier a été découvert il y a quelques semaines à la suite d'un effort considérable de calcul associant des milliers d'ordinateurs *(voir la figure 2)*.

On sait que tous les nombres parfaits pairs sont de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$ où $(2^n - 1)$ est un nombre premier. Comme on connaît par ailleurs des méthodes efficaces de recherche des nombres premiers de la forme $(2^n - 1)$ – dénommés nombres premiers de Mersenne –, les nombres premiers record sont tous de cette forme et, en conséquence, chaque nouveau nombre premier record donne naissance à un nouveau nombre parfait record. Le record précédent datait de 1999 et avait été découvert par le même groupe de passionnés réunis autour du projet GIMPS *(Great Internet Mersenne Prime Search)*. Les mathématiciens pensent qu'il existe une infinité de nombres parfaits pairs et le graphique indiquant l'exposant n des nombres premiers de Mersenne connus suggère qu'il en est bien ainsi, ce que pourtant personne n'a, jusqu'à présent, su démontrer.

Plus étrange et plus agaçant encore, on n'a jamais trouvé aucun nombre parfait impair, alors qu'en même temps on n'a jamais réussi à démontrer qu'il n'en existait pas, malgré quelques résultats intéressants dont l'un est dû à Descartes.

PAIRES AMIABLES

Un peu de persévérance dans l'étude de la fonction *s(n)* qui donne la somme des parties aliquotes de n vous montrera que $s(220) = 284$ et que $s(284) = 220$. Cela provient de ce que 284 est divisible par 1, 2, 4, 71, 142, dont la somme est 220, le nombre 220 étant lui divisible par 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 dont la somme est 284. Notons qu'en pratique, pour calculer *s(n)*, on utilise la formule présentée sur la figure 1, fondée sur la décomposition de n en facteurs premiers. Un couple comme 220, 284 est dénommé paire de nombres amiables : chacun est lié à l'autre d'une manière secrète et profonde comme deux anciens amis.

On trouve mention des nombres amiables dès 320 avant J.-C. chez Iamblicus de Chalcis qui en situe l'origine, comme pour les nombres parfaits, dans les travaux de l'École pythagoricienne. On a attribué à ces paires amiables des rôles magiques et on les a utilisées en astrologie. Le savant arabe Ibn Khaldun (1332-1406) écrivait : «La pratique de l'art des talismans a conduit à reconnaître les merveilleuses vertus des nombres amiables que sont 220 et 284. On les appelle ainsi car si on additionne les parties aliquotes de l'un on retrouve l'autre. Les personnes s'occupant de l'art des talismans assurent que ces nombres sont utiles pour établir des relations d'amitié et provoquer des unions.»

Une méthode pour vous attirer les faveurs de l'être convoité consiste à l'inviter à partager avec vous un repas où vous lui ferez déguster un plat de riz. Vous préparez deux parts, l'une avec 220 grains, l'autre avec 284 grains. Il faut bien sûr s'assurer que chacun absorbe tous les grains sans en oublier un seul. Pour les plus gros appétits utilisez des haricots ou exploitez une autre paire de nombres amiables.

Au IXe siècle de notre ère, le mathématicien arabe Abu-l-Hasan Thabit ibn Querra à Bagdad découvrit la première formule algébrique pour engendrer des nombres amiables : si $p = 3.2^{n-1} - 1$, $q = 3.2^n - 1$, $r = 9.2^{2n-1} - 1$ sont tous trois des nombres premiers, alors $M = 2^n.p.q$ et $N = 2^n.r$ sont des nombres amiables.

En prenant n égal à 2, on retrouve la fameuse paire attribuée à Pythagore. Avec n égal à 4, on tombe sur la paire $N = 17296 = 2^4.23.47$, $M = 18416 = 2^4.1151$ découverte au XIVe siècle à Marrakech par Ibn al-Banna. Avec $n = 7$, on obtient la paire $N = 9363584 = 2^7.191.383$ et $M = 9437056 = 2^7.73727$ découverte au XVIIe siècle par Muhammad Baquir Yazdi. Pierre de Fermat en 1636 retrouve la règle et le cas $n = 4$; en 1638, Descartes redécouvre de son côté le cas $n = 7$.

Avant Leonhard Euler, c'étaient les trois seules paires de nombres amiables connues, mais le grand savant consacra une part de son ardent génie à faire

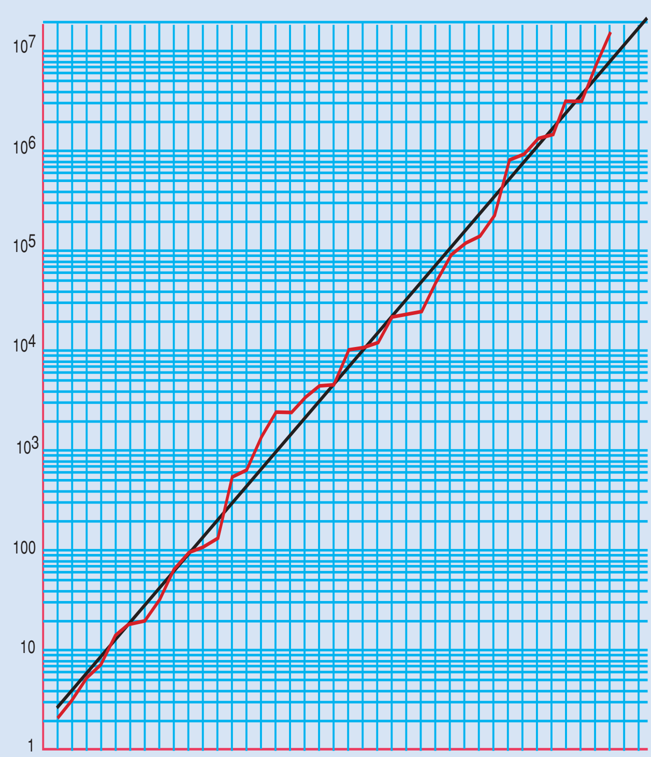
2. LE 39 IÈME NOMBRE PARFAIT PAIR EST ARRIVÉ

On connaissait 38 nombres parfaits (égaux à la somme de leurs diviseurs propres dénommés parties aliquotes). Ce sont tous des nombres de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$ où $2^n - 1$ est un nombre premier (les nombres premiers de cette forme sont les nombres de Mersenne).

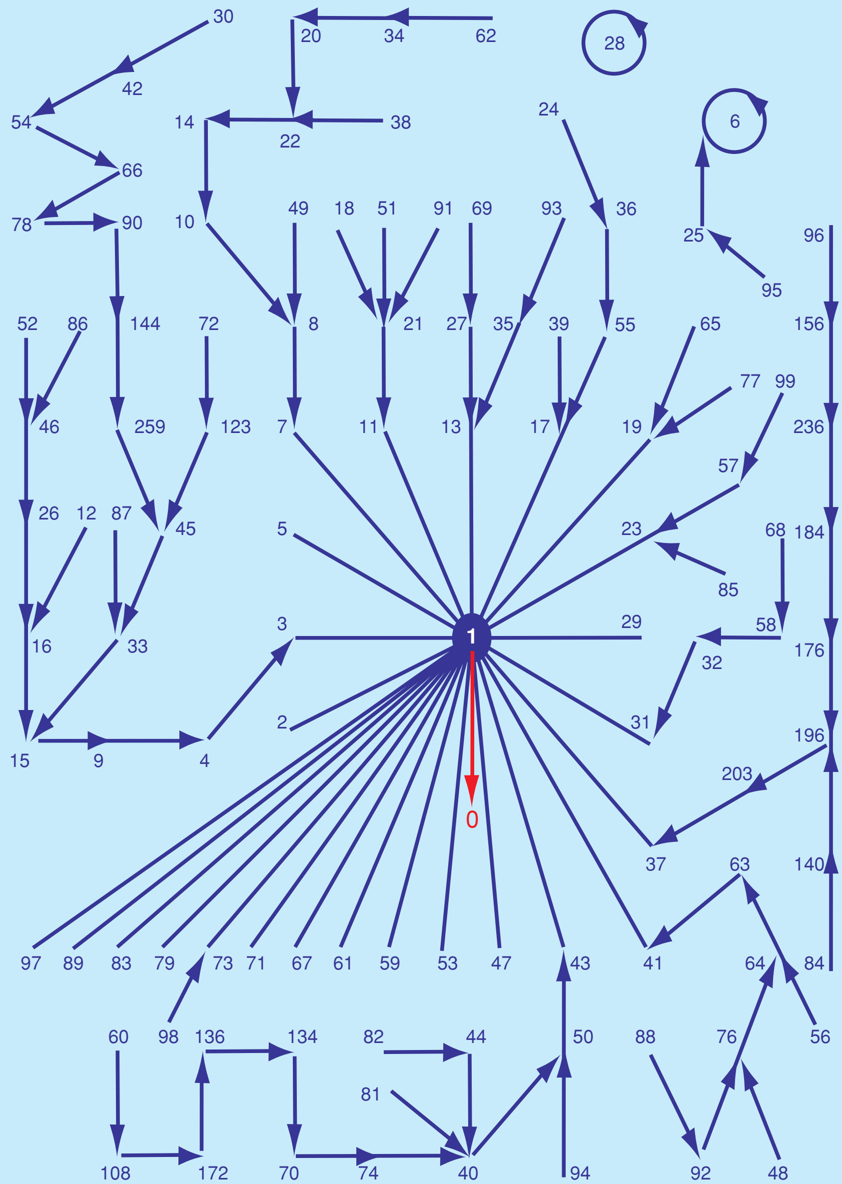
Les plus petits nombres parfaits sont : $6 = 2^{2-1}(2^2 - 1)$; $28 = 2^{3-1}(2^3 - 1)$; $496 = 2^{5-1}(2^5 - 1)$; $8128 = 2^{7-1}(2^7 - 1)$; $33550336 = 2^{13-1}(2^{13} - 1)$.

Dans la deuxième quinzaine de novembre dernier, en même temps que le Beaujolais nouveau 2001, un nouveau nombre parfait a été proposé aux amateurs. Ce nombre, découvert par le projet GIMPS (*Great Internet Mersenne Prime Search*), à qui on doit déjà les trois derniers nombres premiers record, est : $2^{13\,466\,916}(2^{13\,466\,917} - 1)$. Il comporte plus de huit millions de chiffres et il est construit à partir du nombre premier de Mersenne $2^{13\,466\,917} - 1$ qui comporte 4 053 946 chiffres. Ce nouveau nombre premier record n'est pas quatre fois plus grand que le nombre premier record précédent $(2^{6\,972\,593} - 1)$ comme l'a annoncé faussement CNN mais $2^{6\,494\,324}$ fois plus grand, soit plus de $10^{1000000}$ fois plus grand, ce qui est plus impressionnant.

Ci-contre, on a représenté l'exposant n du nombre de Mersenne pour les 39 nombres de Mersenne connus. Cette courbe semble montrer que les nombres de Mersenne se présentent assez régulièrement et qu'il y en a donc une infinité, mais il faudrait le démontrer…



3. SUITES ALIQUOTES DE TOUS LES ENTIERS JUSQU'À 100



Sur ce schéma, on a représenté toutes les suites aliquotes des nombres jusqu'à 100. Certaines suites passent par des valeurs plus grandes que 100. Toutes les suites aboutissent à 0 sauf celles qui aboutissent à 6 et 28, les deux nombres parfaits inférieurs à 100. La suite partant de 30 est la plus longue suite aliquote de ce graphe.

4. LES PAIRES DE NOMBRES AMIABLES

Les paires amiables sont les paires de nombres comme 220 et 284, vérifiant que la somme des parties aliquotes de l'un est égale au second et réciproquement.

• $s(220)=284$, car les diviseurs de 220 sont 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 dont la somme est 284.

• $s(284)=220$, car les diviseurs de 284 sont 1, 2, 4, 71, 142, dont la somme est 220.

De nombreux savants n'ont pas considéré vain de passer beaucoup de temps à rechercher de telles paires. Aujourd'hui, de même qu'on consacre des millions d'heures de calcul d'ordinateur pour découvrir de nouveaux nombres parfaits, on en consacre aussi pour découvrir de nouvelles paires de nombres amiables. En septembre 2001, grâce aux calculs de Jan Pedersen, on connaissait 2 185 621 paires amiables, la plupart avec des entiers de moins de 300 chiffres, mais avec quelques exemples de paires possédant plusieurs milliers de chiffres. Pour les nombres de 12 chiffres ou moins, la liste est exhaustive. Les listes se trouvent à l'adresse Internet : http://www.vejlehs.dk/staff/jmp/aliquot/knwnap.htm

progresser le problème, et durant sa vie il proposa en tout cinq méthodes nouvelles pour construire des paires de nombres amiables. Grâce à elles, il en découvrit un total de 59 (en vérité, il en proposa 61, mais deux étaient fausses, ce dont on ne s'aperçut qu'au XXe siècle). Adrien Legendre proposa lui aussi sa paire de nombres amiables en 1830. Le plus étonnant fut cependant la découverte en 1866 d'une paire de nombres amiables assez petite et passée bizarrement inaperçue jusqu'alors. Un amateur de 16 ans, Nicolo Paganini, surprit le monde des savants en exhibant la paire classée numéro 2 en taille : $N = 1184=2^5.37$, $M = 1210 = 2.5.11^2$.

Le mathématicien français P. Poulet fut le premier à utiliser des tests de primalité qu'avait inventés son compatriote Édouard Lucas et cela le conduisit à la découverte de 104 nouvelles paires de nombres amiables. Bien sûr les ordinateurs ont permis d'aller bien plus loin et on connaît aujourd'hui plus de deux millions de paires de nombres amiables.

Chaînes sociables

La généralisation du concept de paire de nombres amiables est le concept de chaînes sociables. On dénomme chaîne sociable d'ordre n une suite de n nombres $a_1, a_2,\dots a_n$ tels que $s(a_1)=a_2$, $s(a_2)=a_3,\dots$, $s(a_{n-1})=a_n$, $s(a_n)=a_1$. Les chaînes sociables d'ordre 1 sont les nombres parfaits. Les chaînes sociables d'ordre 2 sont les paires de nombres amiables.

La recherche des chaînes sociables d'ordre n pour n supérieur à 2 est une discipline récente qui n'a vraiment débuté qu'au XXe siècle, quoiqu'il est certain qu'elle eut passionné Pythagore, Euler, Descartes et bien d'autres, s'ils avaient disposé des moyens théoriques et informatiques de partir à leur chasse.

P. Poulet fut le premier à découvrir (à la main) l'existence de chaînes sociables d'ordre supérieur à 2. En 1918 il exhibe une chaîne sociable d'ordre 5 (12496, 14288, 15472, 14536, 14264) et une autre d'ordre 28 qui commence en 14316 *(voir la figure 5)*. Il fallut ensuite attendre 1970 et l'utilisation d'ordinateurs puissants (du moins les considérait-on ainsi) pour découvrir de nouvelles chaînes sociables, cette fois d'ordre 4. Henri Cohen en découvrit 9 dont celle-ci : 1264460, 1547860, 1727636, 1305184. La chasse s'est poursuivie et aujourd'hui on connaît 103 chaînes d'ordre 4 ; 1 d'ordre 5 ; 2 d'ordre 6 ; 2 d'ordre 8 ; 1 d'ordre 9 et 1 d'ordre 28 (celle de P. Poulet). Notons que malgré des recherches intensives aucune chaîne sociable d'ordre supérieur à 28 n'a été trouvée depuis 1918.

LES SUITES ALIQUOTES AU DEVENIR MYSTÉRIEUX

Il est possible que, partant d'un nombre *n,* et calculant la suite *n, s(n), s(s(n)), s(s(s(n))), s(s(s(s(n))))* etc., on tombe sur le nombre 1 qui conduit à 0, où tout s'arrête. Il se peut aussi qu'on tombe à un moment sur un nombre parfait, auquel cas la suite devient stationnaire. Il se peut encore qu'on arrive sur une paire de nombres amiables auquel cas la suite se met à osciller indéfiniment entre deux valeurs. Cas assez proche : on peut aboutir sur une chaîne sociable provoquant un passage cyclique de la suite par les mêmes valeurs. La suite *n, s(n), s(s(n)), s(s(s(n)))*, etc. s'appelle la suite aliquote de *n* et son étude qui généralise celle des nombres parfaits, des nombres amiables et des chaînes sociables, est pleine de surprises et d'inconnues.

Il se pourrait que la suite aliquote se poursuive indéfiniment sans jamais s'arrêter ni tourner en rond. Le plus petit nombre candidat pour engendrer une telle suite aliquote infinie est 276, mais il ne s'agit que d'un candidat, car nul n'a réussi à proposer une démonstration que la suite partant de 276 se poursuit indéfiniment.

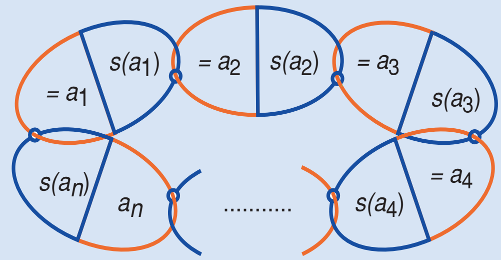
Cinq nombres inférieurs à 1000 sont dans la même situation d'indétermination. Ce sont 276, 552, 564, 660 et 966. On les appelle «Les cinq de Lehmer», car le mathématicien D. H. Lehmer fut le premier à réaliser qu'il ne pouvait pas déterminer le devenir des suites aliquotes issues de ces nombres. Des calculs colossaux sont menés pour résoudre ces énigmes et on progresse pas à pas (les sites Internet cités à la fin de l'article permettent de suivre cette recherche).

Pour l'instant cependant, les cinq de Lehmer restent mystérieux. Les progrès des algorithmes de factorisation sont assez lents et ce sont eux qui constituent le goulet d'étranglement, car pour avancer dans le calcul d'une suite aliquote, il faut calculer *s(n)* pour des nombres *n* parfois très grands, ce qui ne peut se faire qu'en factorisant ces nombres.

Aujourd'hui on est certain d'arriver à factoriser tout nombre de moins de 100 chiffres. Avec de gros moyens les spécialistes peuvent pousser jusqu'à 155 chiffres, mais au-delà certains entiers résistent à toutes les méthodes de factorisation et donc nous sommes dans l'impossibilité de calculer *s(n).* Parmi les amateurs acharnés qui tentent d'élucider le mystère des cinq de Lehmer, citons Paul Zimmerman, Wolfgang Creyaufmueller, Sam Wagstaff et Arjen Lenstra. Leurs explorations donnent :

5. LES CHAÎNES SOCIABLES

Une chaîne sociable d'ordre n est une suite de n nombres a_1, a_2,… a_n tels que $s(a_1) = a_2$, $s(a_2) = a_3$,…, $s(a_{n-1}) = a_n$, $s(a_n) = a_1$. On connaît 103 chaînes d'ordre 4, 1 d'ordre 5, 2 d'ordre 6, 2 d'ordre 8, 1 d'ordre 9 et une d'ordre 28. Aucune chaîne sociable d'ordre supérieur à 28 n'a été trouvée.



Chaîne d'ordre 5 découverte par Poulet en 1918

$12496 = 2^4.11.71$ $14288 = 2^4.19.47$ $15472 = 2^4.967$ $14536 = 2^3.23.79$ $14264 = 2^3.1783$

Chaîne d'ordre 6 découverte par Moews & Moews en 1992

$21548919483 = 3^5.7^2.13.19.17.431$ — $23625285957= 3^5.7^2.13.19.29.277$
$24825443643 = 3^2.7^2.13.19.11.20719$ — $26762383557= 3^4.7^2.13.19.27299$
$25958284443 = 3^2.7^2.13.19.167.1427$ — $23816997477= 3^2.7^2.13.19.218651$

Chaîne d'ordre 6 découverte par Moews & Moews en 1995

$90632826380 = 2^2.5.109.431.96461$ — $101889891700 = 2^2.5^2.31.193.170299$
$127527369100 = 2^2.5^2.31.181.227281$ — $159713440756 = 2^2.31.991.1299709$
$129092518924 = 2^2.31.109.9551089$ — $106246338676 = 2^2.17.25411.61487$

Chaîne d'ordre 8 découverte par Flammenkamp en 1990

$1095447416 = 2^3.7.313.62497$ — $1259477224 = 2^3.43.3661271$
$1156962296 = 2^3.7.311.66431$ — $1330251784 = 2^3.43.3867011$
$1221976136 = 2^3.41.1399.2663$ — $1127671864 = 2^3.11.61.83.2531$
$1245926216 = 2^3.19.8196883$ — $1213138984 = 2^3.67.2263319$

Chaîne d'ordre 8 découverte par Flammenkamp en 1990

$1276254780 = 2^2.3.5.1973.10781$ — $2299401444 = 2^2.3.991.193357$
$3071310364 = 2^2.767827591$ — $2303482780 = 2^2.5.67.211.8147$
$2629903076 = 2^2.23.131.218213$ — $2209210588 = 2^2.13^2.17.192239$
$2223459332 = 2^2.131.4243243$ — $1697298124 = 2^2.907.467833$

Chaîne d'ordre 9 découverte par Flammenkamp en 1990

$805984760 = 2^3.5.7.1579.1823$ — $1268997640 = 2^3.5.17.61.30593$
$1803863720 = 2^3.5.103.367.1193$ — $2308845400 = 2^3.5^2.11544227$
$3059220620 = 2^2.5.2347.65173$ — $3367978564 = 2^2.841994641$
$2525983930 = 2.5.17.367.40487$ — $2301481286 = 2.13.19.4658869$
$1611969514 = 2.805984757$

Chaîne d'ordre 28 découverte par Poulet en 1918

$14316=2^2.3.1193$	$19116=2^2.3^4.59$	$31704=2^3.3.1321$	$47616=2^9.3.3$
$83328=2^7.3.7.31$	$177792=2^7.3.463$	$295488=2^6.3^5.19$	$629072=2^4.39317$
$589786=2.294893$	$294896=2^4.7.2633$	$358336=2^6.11.509$	$418904=2^3.52363$
$366556=2^2.91639$	$274924=2^2.13.17.311$	$275444=2^2.13.5297$	$243760=2^4.5.11.277$
$376736=2^5.61.193$	$381028=2^2.95257$	$285778=2.43.3323$	$152990=2.5.15299$
$122410=2.5.12241$	$97946=2.48973$	$48976=2^4.3061$	$45946=2.22973$
$22976=2^6.359$	$22744=2^3.2843$	$19916=2^2.13.383$	$17716=2^2.43.103.$

LES CINQ DE LEHMER

Point de départ de la suite aliquote	Calcul mené jusqu'au terme:	Longueur du nombre arrêt
276	1283	116
552	818	118
564	3048	115
660	465	111
966	496	110

Parmi les nombres entre 1000 et 2000 les nombres au devenir inconnu sont 1074, 1134, 1464, 1476, 1488, 1512, 1560, 1578, 1632, 1734, 1920, 1992. On remarquera que cette liste ne comporte que des nombres pairs. Notons qu'avant 1980, il y avait 14 suites aliquotes partant de nombres entre 1000 et 2000 dont le statut était inconnu («les 14 de Godwin») ; maintenant il n'en reste plus que douze, car Godwin a établi que la suite aliquote partant de 1848 s'arrêtait, et Dickerman a fait de même pour celle partant de 1248.

LA CONJECTURE DE CATALAN

En 1888, le mathématicien belge Eugène Catalan a conjecturé que toutes les suites aliquotes se terminaient (c'est-à-dire aboutissaient sur 1, sur un nombre parfait, sur une paire amiable, ou sur une chaîne sociable). On est très loin de savoir démontrer cette conjecture.

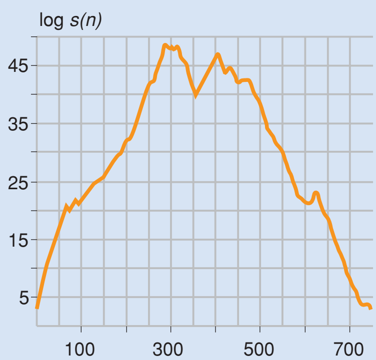
Certains mathématiciens pensent qu'au contraire un grand nombre de suites aliquotes partent à l'infini et une conjecture opposée à celle de Catalan affirme que toute suite aliquote commençant par un nombre pair va vers l'infini, sauf pour un nombre fini de cas exceptionnels.

L'opinion du mathématicien français Paul Zimmerman, qui participe activement à l'étude des suites aliquotes, est que la conjecture de Catalan est vraie. Il remarque cependant que pour n=840, on atteint un nombre de 49 chiffres décimaux, pour

6. CINQ TYPES DE SUITES ALIQUOTES

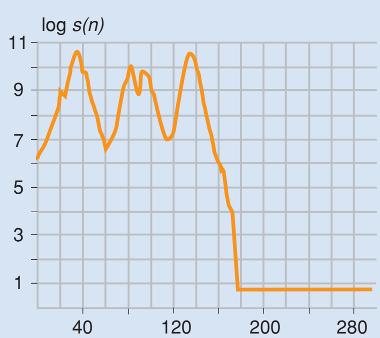
Prenons un nombre au hasard *n* et calculons sa suite aliquote *n, s(n), s(s(n)), s(s(s(n))), s(s(s(s(n)))), s(s(s(s(s(n))))),* etc. Plusieurs cas apparaissent.

1- On finit par arriver sur un nombre premier, puis sur 1, puis sur 0, point où la suite s'arrête.



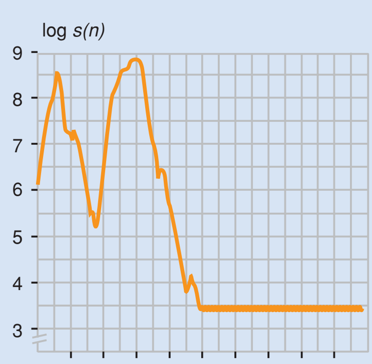
Suite aliquote de 840

2- On finit par arriver sur un nombre parfait et on y reste donc toujours ensuite.



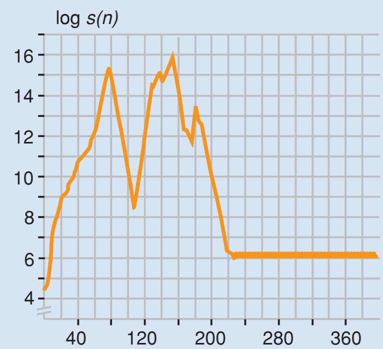
Suite aliquote de 976950 finissant en 6

3- On finit par arriver sur un nombre appartenant à une paire amiable et à partir de ce moment-là on oscille indéfiniment entre les deux nombres.

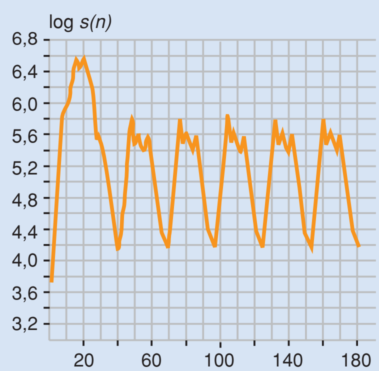


Suite aliquote de 980460 finissant sur une paire amiable

4- On finit par atteindre un élément d'une chaîne sociable et à partir de ce point on repasse indéfiniment par les points de la chaîne.

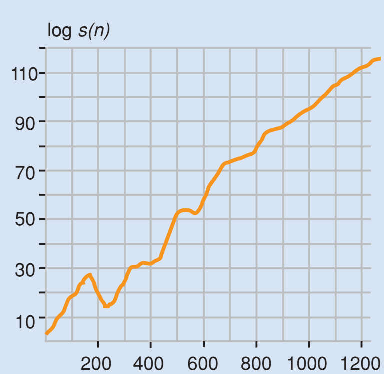


Suite aliquote de 17490 finissant sur une chaîne sociable d'ordre 4



Suite aliquote de 2856 finissant sur une chaîne sociable d'ordre 28

5- On tombe sur un nombre qu'on n'arrive pas à décomposer et on ignore alors quel est le destin de la suite, qui est peut-être infinie. C'est ce qu'on appelle les chaînes aliquotes à statut inconnu.



Suite aliquote de 276 à statut inconnu

Les graphes sont ceux de Creyaufmueller : http://home.t-online.de/home/Wolfgang.Creyaufmueller/aliquote.htm

n = 1248, on atteint 58 chiffres décimaux et donc qu'il est bien possible que l'on atteigne des nombres de 200 ou même 1000 chiffres pour *n* = 276, ce qui mettrait cette suite hors de la portée des algorithmes et des machines pour longtemps. Il n'est pas exclu que jamais aucun humain ne sache quel est le devenir de la suite aliquote partant du nombre 276!!

Les plus longues suites aliquotes

Les passionnés de calcul s'amusent à rechercher la plus longue suite aliquote calculable, c'est-à-dire qu'on arrive à suivre jusqu'à son aboutissement. En octobre 1999, Wieb Bosma découvrit que la suite aliquote partant de 44922 arrivait sur 1 après 1689 étapes (après être passée par un nombre comportant 85 chiffres à l'étape 1167). En décembre 1999, il surpassa son propre record avec la suite partant de 43230 qui se termine aussi par 1 mais cette fois en 4357 étapes et après un passage par un nombre de 91 chiffres à l'étape 967. Le record de hauteur pour une suite aliquote se terminant a été découvert le 10 juin 2001 par Manuel Benito et Juan Varona qui menèrent le calcul de la suite aliquote partant de 3630. Elle passe par un nombre de 100 chiffres à l'étape 1263 avant d'arriver sur 1 à l'étape 2624 (l'étape précédente est un nombre premier de 59 chiffres).

H. Lenstra a démontré que, pour tout entier *k*, on pouvait construire une suite aliquote croissante pendant *k* étapes consécutives. Pour connaître le devenir des suites aliquotes, on étudie le rapport *s(n)/n* et quelques résultats ont pu être obtenus. La quantité *s(n)/n* peut être aussi grande que l'on veut, ce qui signifie que, tout à coup, la longueur d'une suite aliquote peut être multipliée par mille ou un milliard de milliards ou plus.

Le comportement nettement différent des suites partant d'un nombre pair comparé à celui des suites partant d'un nombre impair est assez bien expliqué. En effet, on démontre (ce n'est pas difficile) qu'il ne peut y avoir de changement de parité entre *n* et *s(n)* que lorsque *n* est un carré ou le double d'un carré, or les nombres de ce type se raréfient considérablement et donc, lorsque *n* grandit, la probabilité qu'un nombre *n* soit un carré ou le double d'un carré est quasiment nulle. Autrement dit, sauf cas exceptionnels, *n* et *s(n)* sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Une suite partant d'un nombre pair très grand, semble donc avoir peu de chances de se terminer rapidement sur 1, alors qu'en revanche une suite partant d'un nombre impair peut à chaque instant arriver sur un nombre premier (et donc ensuite sur 1, puis sur 0).

13074 13086 15306 15318 20250 36378 45990 92538 113850
234342 286074 361638 468282 523590 775866 1240134
1594554 1840038 1891338 1891350 3375054 4125186
6267378 7945422 7973250 11929854 12736266 12736278
16797402 20743398 29193642 36657558 54995562
64161528 96242352 160407888 300514992 518099280
1161793200 2679992656 3167275952 3174139600
4882146352 5127784400 8186601520 11484996560
16457024560 23039840336 23128466608 26960583440
50204763376 50204764368 113175278640 279563593392
534231368016 890385617328 1676494853712
4722159891888 10025736658512 18119854289328
35015571492432 58359285824688 117168541897552
117935445658800 396865150137168 661441916899248
1102403194836048 2537739954424752 6075443166573648
12440193150634928 15994750980082768
16952554883095472 16952554883096464
16952773075243376 23551939337244304
31024742901246320 43978139208281488
58682076329972336 60318288999189904
61324189052760688 61324189052761680
141720603054533040 312718892796229200
721338246050091696 1532887198712545104
3733842950549385336 7508331051407898504
12706406394690290616 23731083558963437544
42035291420334469656 80249013732908612424
149033882646830280696 235569713561614206984
16404 21900 42332 35788 29732 22306 12974 8026 4016
3796 3456 6744 10176 17256 25944 43176 80664 121056
224688 378448 494512 495504 1012336 1181968 1182960
2995344 6599280 14542224 25693296 43014360 90683160
185451240 425275800 940708200 1975489080 4299600360
9787608600 30598377960 62464790040 124929580440
322138579560 782543654040 1590997194600
3789466067640 8612422885320 17245450814520
34491361043400 72967727801400 156608347258440
511373352229560 1193233352540040 3238776242618040
7557144566112360 17008403414134680
43343078672652120 98245289952891720
225485753448117420 499595022460258740
1016220356878620060 2146302511659329220
4365805465306640340 8912079582213674700
19057572060429045492 30451944343316954508
46523803857845347256 43522269061507054024
41538397982866392056 39514226617193027944
34588280875055182556 26164545907884419524
19879736397904788476 15278939116317231844
13034324430483320084 9787165489989868000
14259900118915247504 13373492843095311856
12537649540401854896 11754756084394941888
20702681104040261952 35918311240577926848
63312611494171175232 104258325352849123008
210998991785527991104 207702132538879116370
169624609562080576430 135726953604303765970
148468761008721086318 131290689970046993554
93931702661206931822 67094073456072645490
63039859860977978510 66642137567319577426
33622680034706422574 20453938384323035986
10514105806833405614 5257053195212561074
2628558999616292174 1319289459782004154
678859735840149446 432198199089642970
372584654387623790 423185411483397010
447367434996734126 335199506688516274
241133173013919566 129392986488928594
69210234498425006 49442455265686354
31628275705499822 17569420012749490
15482802556130510 12912073075113586
8615431262813582 4307715631406794 2182074293639066
1091037352376614 545519846484554 272807528144026
136403764072016 172028060840272 246230032928432
322698987259984 302536923800196 440536222376284
330402166782220 469768933828340 521929534249180
574124185108340 632252256474700 811995150775220
893194665852784 856062512768896 913869490270304
885311068699420 1142969402332388 857227051749298
428613525874652 321536752958884 279499971575516
235369388238244 208212125817436 207269989503284
155452492127470 125699432957330 100559546365882
50279927860454 25488855451066 20776630073990
21985463380090 25902201396614 14856456204922
7434249373850 7457427003070 7186247839538
4160459275582 2399770256450 2707938109054
1364410976426 711333048214 360723394754
183945042814 115353159818 74577627382 39307973018
20226433030

7. En préparant cet article j'ai, par hasard, fait une étrange constatation. Si on dispose une suite aliquote dans un paragraphe justifié à la fois à droite et à gauche, alors on découvre que le dessin formé par les nombres et les espaces entre nombres est, à peu de chose près, symétrique par rapport à la verticale. De plus de nombreuses rivières (terme utilisé par les typographes pour désigner des espaces se prolongeant de ligne en ligne) sont présentes. Cette propriété est surprenante et un texte quelconque a très peu de chances de présenter un tel axe de symétrie et d'aussi longues rivières. Je donne ici l'exemple de la suite aliquote engendrée par 13074. Un lecteur expliquera-t-il cette propriété ?

Jean-Luc Garambois propose des arguments heuristiques (c'est-à-dire des raisonnements non parfaitement rigoureux utilisant des approximations) qui suggèrent que la moyenne de $s(n)/n$ tend vers une constante C faisant intervenir le nombre π : $C = (\pi^2 - 6)/6 = 0{,}64493406$.

Lorsqu'on expérimente en calculant par exemple la moyenne de $s(n)/n$ pour les nombres n compris entre 2 et 10000 on trouve : 0,644560346, ce qui est remarquablement proche du résultat conjecturé. On tire de cela un argument en faveur de la conjecture de Catalan : puisque $s(n)/n$ est en moyenne plus petit que 1, cela signifie qu'en moyenne une suite aliquote diminue et donc se termine.

Cependant tout se complique si on tient compte de la parité des termes de la suite, car la moyenne n'est pas équilibrée entre les n pairs et les n impairs : la moyenne de $s(n)/n$ pour n pair jusqu'à 10000 vaut 1,055307291, alors que la moyenne de $s(n)/n$ pour n impair jusqu'à 10000 vaut 0,2337312343. Du coup, on en tire, au final, un argument contre la conjecture de Catalan. Lorsqu'on débute par un nombre pair assez grand, on reste sur des nombres pairs (à cause de la difficulté qu'il y a à changer de parité, voir plus haut) et ces nombres vont augmenter en moyenne (puisque $s(n)/n$ pour n pair semble valoir en moyenne 1,055307291). On ira donc vers l'infini. Cet argument un peu compliqué me semble assez convaincant et je crois finalement que la conjecture de Catalan est fausse et que les suites aliquotes débutant par un nombre pair et partant vers l'infini ne sont pas rares. Bien sûr tout cela reste à démontrer !

Le problème des antécédents aliquotes

Une autre série d'énigmes concerne les antécédents aliquotes. Quand un nombre n est donné, on peut rechercher quels sont les nombres m tels que $s(m) = n$; c'est ce que nous appellerons les antécédents aliquotes de n. Jean-Luc Garambois a démontré que tous les antécédents aliquotes de n sont inférieurs à n^2+2. Les antécédents de 6 sont donc inférieurs à $38 = 6^2+2$; on constate qu'il n'y a que 25. Le nombre 21 possède trois antécédents aliquotes inférieurs à 100. Les antécédents des antécédents de n sont appelés antécédents d'ordre 2 de n, et on définit de la même façon les antécédents d'ordre 3, 4, etc. J.-L. Garambois a calculé que le nombre 6 possède exactement 4 antécédents aliquotes d'ordre 2, 17 d'ordre 3 et 1131 d'ordre 4. Il semble impossible avec nos moyens de calcul actuels de connaître exactement le nombre d'antécédents d'ordre 5 de l'entier 6, car cela impliquerait une recherche systématique hors de portée de nos ordinateurs. Les nombres inférieurs à 100 qui ne possèdent pas d'antécédents sont 2, 5, 52, 88 et 96. Ce sont des points de blocage quand on veut remonter une chaîne aliquote en arrière. Il semble exister de tels points de blocage de toutes tailles.

Notons que 28 n'a pas d'autres antécédents que lui-même : il est donc complètement isolé sur le graphe infini de toutes les suites aliquotes. Lorsque n devient grand, J.-L. Garambois a noté que le nombre d'antécédents aliquotes de n augmente si n est impair, et qu'en revanche il est très petit, voire nul, si n est pair. Par exemple, entre 9990 et 1000, on trouve :

n	Nombre d'antécédents
9990	1
9991	270
9992	1
9993	105
9994	4
9995	99
9996	0
9997	262
9998	0
9999	99

De nombreuses questions se posent concernant les antécédents aliquotes. Existe-t-il un nombre qui possède des antécédents de tout ordre ? Existe-t-il un nombre dont on puisse remonter indéfiniment d'antécédents en antécédents (une chaîne aliquote infinie en arrière) ? Existe-t-il des chaînes aliquotes infinies à la fois vers l'avant et vers l'arrière ? Comme ces questions s'ajoutent à celles déjà nombreuses et non résolues sur les nombres parfaits, les paires amiables et les chaînes sociables, soyons certains que le mathématicien aliquote ne s'ennuiera pas de sitôt et que la puissance des microprocesseurs de l'avenir trouvera au moins une utilisation… utile.

Jean-Luc Garambois, *Les suites aliquotes*. 2000. (Lui écrire pour lui demander une copie : 32 rue du Rampart, 68190 Ensisheim.)

Paul Zimmerman, *Aliquot sequences*. www. loria.fr/~zimmerma/records/aliquot.html

Juan Varona, *Aliquot sequences*. www.unirioja.es/dptos/dmc/jvarona/aliquot.html

Wolfgang Creyaufmueller, *Aliquot sequences*. http://home.t-online.de/home/ Wolfgang.Creyaufmueller/aliquote.htm

Song Y. Yan, *Perfect, Amicable and Sociable Numbers. A computational Approach*. *World Scientific*, Singapore, 1996.

Jean-Paul Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Belin-Pour La Science, 2000.