

Logique et calcul

Le miraculeux « lemme de Burnside »

Pour réussir de délicats décomptes, amateurs et inventeurs de casse-tête, n'oubliez pas un théorème magique qui, en fait, n'est pas de Burnside !



William Burnside (1852-1927)



Augustin Cauchy (1789-1857)



Ferdinand Frobenius (1849-1917)



George Polya (1887-1985)

Les mathématiciens ont un légitime souci de précision et s'attachent à donner une forme générale et abstraite à leurs résultats, forme qui garantit auprès de leurs collègues compréhension, respect et diffusion. Cependant ce sérieux fait qu'un résultat simple et qui serait utile à de nombreux autres scientifiques ou amateurs est parfois rendu opaque, voire inaccessible. Trop de précisions techniques rendent absconses des vérités élémentaires et en interdisent l'usage à un plus grand nombre.

Le lemme de Burnside est l'exemple même d'une telle situation. Énoncé comme un résultat de la « théorie des groupes opérant sur un ensemble », il risque de vous faire fuir, alors que ce théorème, maîtrisable rapidement, autorise des dénombrements remarquables, parfois impossibles sans lui. Le but de cet article est de vous initier à ce résultat magique dont le graveur Maurits Escher aurait pu profiter lors de ses recherches sur les pavages du plan.

Ce résultat est dénommé lemme de Burnside en référence au mathématicien William Burnside qui le mentionna dans son livre de 1887 sur les groupes finis. Cependant le lemme (en fait un théorème) semble avoir été connu bien avant, par Augustin-Louis Cauchy et Ferdinand Frobenius, ce qui fait qu'on lui donne parfois le nom de Lemme de Cauchy-Frobenius. George Polya en fit aussi un grand usage et le généralisa, d'où encore des dénominations incluant Polya. En définitive, personne ne sait qui l'a découvert et énoncé pour la première fois. Pour éviter une attribution inexacte et disposer quand même d'un nom commode, certains mathématiciens ont décidé de le nommer « lemme qui n'est pas de Burnside ».



Le décompte des dominos

Prenons un problème de décompte facile, pour nous entraîner : nous le résoudrons d'abord sans le lemme de Burnside, puis nous montrerons qu'il nous facilite la tâche. Nous souhaitons savoir combien il y a de dominos différents (au sens du jeu de dominos où l'on peut retourner de 180 degrés un domino) quand on dispose de 7 symboles pour chaque case (rien, un, deux, trois, quatre, cinq et six points). On sait, en comptant dans la boîte, qu'il y a 28 dominos différents.

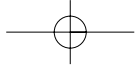
Notons 0, 1, ..., 6 les symboles dénotant le nombre de points. Il y a les dominos qui comportent le symbole 0 (la case vide). Ce sont : [0,0], [0,1], [0,2], [0,3], [0,4], [0,5], [0,6].

Il y a ceux avec une case comportant un point, noté 1. Nous éliminons le domino [1,0] qui a déjà été compté. Ce sont donc : [1,1], [1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6].

Il y a ceux avec 2. On élimine [2,0] et [2,1] que nous avons déjà comptés. Ce sont : [2,2], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6]. Nous continuons jusqu'aux dominos avec 5 qui sont [5,5] et [5,6], et enfin jusqu'au seul domino avec 6 et non déjà compté, le double six, [6,6]. Cela fait en tout $7+6+5+4+3+2+1$, soit 28 dominos différents. Cela n'est pas très ardu. Or, déjà là, le lemme de Burnside nous facilitera l'obtention de la solution. Énonçons-le :

Quand on dispose d'objets pouvant se transformer les uns en les autres par l'application d'opérations t_1, t_2, \dots, t_n , le nombre d'objets réellement différents





est donné par la moyenne des nombres d'objets qui restent invariants lorsqu'on applique les opérations t_1, t_2, \dots, t_n .

Les objets que nous considérons ici sont les dominos. Si nous ne pouvions pas les bouger, ils seraient au nombre de 49 (7 choix pour la case de droite, 7 choix pour la case gauche). Nous les nommerons dominos *immobilisés* pour les distinguer des dominos *véritables* (dans les dominos du jeu, on peut tourner un domino de 180 degrés sans changer sa nature). Ici, il y a seulement deux opérations à considérer.

1) L'identité I , qui ne change pas la position d'un domino. Dans toutes les applications du lemme de Burnside, nous aurons à considérer l'opération identité qui ne change rien. Ici, l'identité I laisse les 49 dominos immobilisés invariants.

2) La rotation R de 180 degrés : le domino $[a, b]$ devient $[b, a]$. La rotation R laisse 7 dominos invariants, car, quand on l'applique à un domino de la forme $[i, i]$, celui-ci est transformé en lui-même, et ce sont les seuls qui restent identiques quand nous appliquons R .

La moyenne de deux nombres, 49 et 7, est $56/2 = 28$. D'après le lemme de Burnside, c'est le nombre de dominos véritables. Nous avons aussi trouvé 28 par l'autre raisonnement : tout va bien. Notons que le dénombrement avec Burnside a été légèrement plus simple.

Traisons maintenant un deuxième exemple où le lemme de Burnside va, cette fois, nous faciliter grandement la tâche.

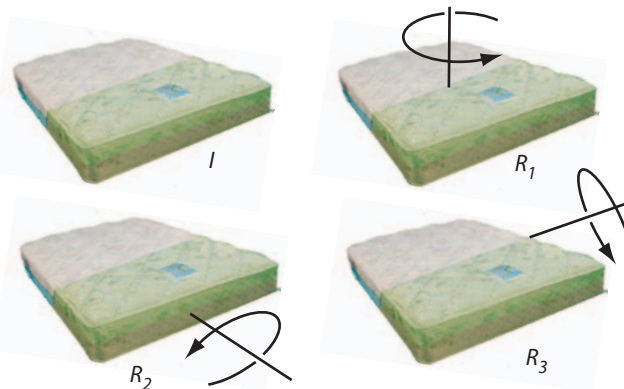
Le matelas à k couleurs

Nous considérons un matelas dont la longueur est double de la largeur et dont l'épaisseur est sans importance. Chaque face du matelas est divisée en deux carrés et chacun des quatre carrés du matelas est colorié par une couleur prise dans un

1. Le lemme de Burnside, comme un tour de prestidigitation, donne le nombre de configurations d'un objet, ici les treize configurations d'un ballon partagé en six secteurs (problème équivalent à celui des hexagones transparents).

ensemble de k couleurs (ce matelas est un domino à double face). De combien de façons vraiment différentes pouvons-nous colorier ce type de matelas avec ces k couleurs ? Nous utiliserons directement le lemme de Burnside, puis nous vérifierons notre résultat sur un cas particulier.

Si nous ne pouvions pas bouger les matelas (matelas immobilisés), il y aurait k^4 façons différentes de les colorier, car chaque carré peut être colorié avec une couleur choisie parmi k . Cependant, on peut bouger les matelas et ce qu'on veut, c'est connaître le nombre de matelas vraiment différents (le nombre de matelas véritables). Cette fois il y a quatre opérations.



1) L'identité I .

2) La rotation R_1 de 180 degrés par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du matelas et passant par son centre.

3) La rotation R_2 de 180 degrés par rapport au grand axe du matelas.

4) La rotation R_3 de 180 degrés par rapport à l'axe horizontal qui coupe en deux carrés le plan du matelas.

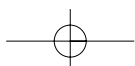
Pour chacune de ces quatre opérations, comptons le nombre de matelas qui restent identiques à eux-mêmes quand on leur applique l'opération. La moyenne de ces quatre nombres sera le nombre de matelas réellement différents.

Bien sûr, pour l'identité I , les k^4 matelas sont invariants.

Pour R_1 , il y a k^2 matelas invariants, car pour qu'un matelas soit invariant quand nous appliquons R_1 , il faut que les deux couleurs utilisées pour le dessus soient identiques, ainsi que les deux couleurs utilisées pour le dessous. Il y a k façons de choisir la couleur du dessus, et k pour celle du dessous, et donc cela fait k^2 matelas invariants par R_1 . Pour R_2 , il y a de même k^2 matelas invariants. Cette fois, il faut que chaque carré du dessus soit colorié comme celui situé juste en dessous, ce qui à nouveau amène à choisir deux couleurs pour chaque matelas invariant par R_2 . Pour R_3 , il y a encore k^2 matelas invariants : le coloriage du dessous doit être le même que celui du dessus en intervertissant les couleurs des deux carrés. La moyenne des 4 nombres que l'on vient de trouver est :

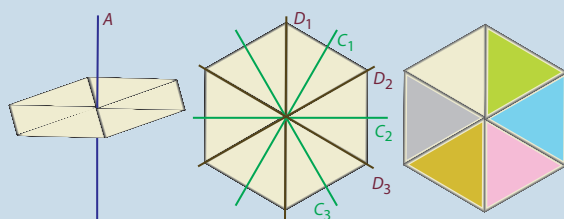
$$M = (k^4 + k^2 + k^2 + k^2)/4 = (k^4 + 3k^2)/4$$

D'après le lemme de Burnside, il s'agit du nombre de matelas véritablement distincts. Pour s'assurer que le résultat est juste, nous ne ferons pas un raisonnement direct – c'est



2. Les jetons transparents

Déterminons le nombre de jetons hexagonaux (chacun composé des six triangles équilatéraux) vraiment différents quand on dispose de k couleurs différentes (pour les triangles équilatéraux) et qu'on impose aussi que chaque jeton soit composé de 6 couleurs exactement.



Il y a 12 opérations à considérer (voir le texte principal) qui chacune laisse un certain nombre de jetons invariants.

- 1) L'identité : $k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)$ jetons invariants.
- 2) La rotation de 60 degrés autour de l'axe A passant par le centre et perpendiculaire au plan du jeton et les rotations de 120, 180, 240, 300 degrés laissent 0 jeton invariant.
- 3) Les rotations de 180 degrés par rapport aux droites $D_1, D_2, D_3, C_1, C_2, C_3$ laissent 0 jeton invariant.
- 4) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite D_2 : 0 jeton invariant.

D'après le lemme de Burnside, cela fait donc en tout $M = k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)/12$ jetons différents.

possible, mais assez long et délicat – nous nous contenterons d'un contrôle dans le cas particulier de deux couleurs ($k = 2$). Le lemme donne : $M = (16+12)/4 = 7$.

Le décompte se fait directement et on constate qu'il y a effectivement 7 matelas vraiment différents qui sont (avec une notation évidente) :

$$\begin{bmatrix} bb \\ bb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} nb \\ bb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} nb \\ nb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} nn \\ bb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} nb \\ bn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} nn \\ bn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} nn \\ nn \end{bmatrix}$$

Groupes et orbites

Donnons quelques précisions sur les conditions d'utilisation du lemme de Burnside, car notre premier énoncé du lemme est trop vague. L'ensemble des opérations permettant de transformer les objets les uns en les autres doit être ce qu'on appelle un groupe, ce qui signifie trois conditions.

(a) Il faut que parmi les opérations, il y ait l'opération identité (celle qui ne change rien).

(b) Il faut que la liste des opérations soit complète : si r et s sont des opérations, l'opération consistant à appliquer r après s (notée rs) doit aussi être dans la liste des opérations envisagées.

(c) Il faut que chaque opération r ait son inverse s : si r est une opération, il faut qu'il existe une opération s qui inverse le travail de r , c'est-à-dire telle que l'application de r , puis de s , (ainsi que l'opération consistant à appliquer s , puis r) soit l'identité.

À chaque fois que nous dénombrerons des objets concrets solides (dominos, matelas, jetons, cubes, etc.), ces conditions seront automatiquement vérifiées si nous n'avons rien oublié, car les opérations que nous envisagerons seront celles qui transforment l'objet (rigide non coloré) en lui-même sans le déformer, ensemble qui est automatiquement un groupe (c'est un sous-groupe du groupe des déplacements). Dans certaines applications plus subtiles du lemme de Burnside où les opérations n'ont pas une interprétation géométrique de ce type, il faudra contrôler qu'on a affaire à un groupe (voir l'exemple d'un tel cas à la figure 3).

Nous en savons assez maintenant pour aborder des dénombrements vraiment intéressants. Ceux qui veulent connaître les détails de la théorie et voir la démonstration du lemme trouveront facilement tout ce qu'ils souhaitent dans les livres d'algèbre ou sur Internet.

On souhaite créer une série de jetons hexagonaux, chacun composé de 6 triangles équilatéraux accolés et transparents que l'on colorie en choisissant dans une palette de k couleurs. On souhaite éviter qu'il y ait des jetons en double. Combien notre jeu comportera-t-il de jetons ? Notons bien que, pour chaque jeton, il y a 6 couleurs à placer, car comme le jeton est transparent une couleur placée sur une face se voit des deux côtés. Le nombre de jetons immobilisés est donc k^6 et le nombre de jetons véritables que nous cherchons à connaître sera un nombre plus petit, obtenu comme la moyenne des nombres de jetons invariants des opérations géométriques qu'on peut faire sur un jeton et qui le laisse en place (rotations, retournements, autour des axes indiqués sur la figure 2).

Cette fois, il y a 12 opérations géométriques laissant en place un jeton (sans couleur). En même temps que nous

3. La bande de chiffres

Écrivons n chiffres sur une bande de papier. Par exemple : **5 0 1 2 3 6 7 9**. Nous voulons déterminer combien il existe de bandes vraiment différentes.

La difficulté vient des bandes du type **0 1 9 6 1 0**, car, d'une part, **0 1 8** sont invariants quand on les retourne de 180 degrés et, d'autre part, **6** et **9** s'échangent. Ainsi **1 9 6** et **9 6 1** représentent la même bande.

Nous définissons deux opérations (l'astuce mathématique est due à C. L. Liu) qui sont :

1) L'identité I .

2) L'opération R de retournement conditionnel qui retourne la bande quand elle ne comporte que des chiffres parmi les symétriques, soit **0, 1, 6, 8, 9**, et qui, sinon, ne fait rien.

I, R constituent bien un groupe.

Pour I il y a 10^n bandes invariantes, chaque chiffre étant pris dans la liste **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**.

Pour R il y a deux types de bandes invariantes.

Premier type : $(10^n - 5^n)$. Il y a 10^n bandes dont 5^n ne comportent que les chiffres **0, 1, 6, 8** et **9**, donc il y en a $10^n - 5^n$ comportant au moins un chiffre autre que **0, 1, 6, 8** et **9**.

Deuxième type :

- $5^{n/2}$ bandes invariantes avec **0, 1, 6, 8** et **9** si n est pair (la connaissance d'une moitié de la bande impose l'autre moitié).

- $3 \times 5^{(n-1)/2}$ bandes invariantes avec **0, 1, 6, 8** et **9** si n est impair (le chiffre central doit être l'un des trois chiffres **0, 1, 8** car seuls **0, 1** et **8** sont invariants (le **6** et le **9** s'échangent) quand on retourne la bande et pour les $n-1$ autres, la connaissance de la moitié d'entre eux détermine les autres).

La réponse est donc :

$$M = (10^n + 10^n - 5^n + 5^{n/2})/2, \text{ si } n \text{ est pair.}$$

$$M = (10^n + 10^n - 5^n + 3 \times 5^{(n-1)/2})/2, \text{ si } n \text{ est impair.}$$

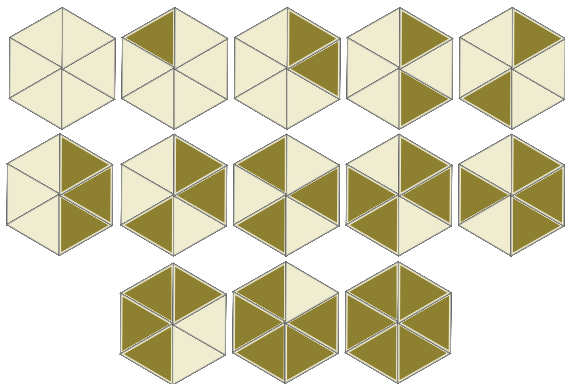
en faisons la liste, nous comptons pour chacune le nombre de jetons coloriés invariants (tous les détails ne sont pas donnés).

1) L'identité : k^6 jetons invariants. 2) La rotation de 60 degrés autour de l'axe A passant par le centre et perpendiculaire au plan du jeton : k jetons invariants (les jetons invariants sont les jetons unicolores). 3) La rotation de 120 degrés autour de l'axe A : k^2 jetons invariants (les jetons invariants sont les jetons unicolores ou bicolores alternés). 4) La rotation de 180 degrés autour de l'axe A : k^3 jetons invariants. 5) La rotation de 240 degrés (ou -120 degrés) autour de l'axe A : k^2 jetons invariants. 6) La rotation de 300 degrés (ou -60 degrés) autour de l'axe A : k jetons invariants. 7) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite D_1 : k^3 jetons invariants. 8) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite D_2 : k^3 jetons invariants. 9) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite D_3 : k^3 jetons invariants. 10) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite C_1 : k^4 jetons invariants. 11) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite C_2 : k^4 jetons invariants. 12) La rotation de 180 degrés par rapport à la droite C_3 : k^4 jetons invariants.

Soit une moyenne $M = (k^6 + 3k^4 + 4k^3 + 2k^2 + 2k)/12$.

Contrôlons pour deux couleurs ($k=2$). Le lemme de Burnside donne : $M = (2^6 + 3 \times 16 + 4 \times 8 + 2 \times 4 + 2 \times 2) / 12 = (64 + 48 + 32 + 8 + 4)/12 = 156/12 = 13$.

Le fait que la fraction se simplifie en un entier n'est pas la preuve que notre décompte est bon, cependant c'est un bon signe ; car lorsqu'on se trompe en appliquant le lemme de Burnside, il est peu probable que la fraction finale se simplifie. On s'assure que 13 est la bonne réponse pour deux couleurs, car un peu d'attention nous fournit la liste suivante de jetons véritablement différents, qui sont bien au nombre de 13.



On peut aussi exiger que toutes les couleurs des triangles des jetons hexagonaux soient différentes (voir la figure 2) et appliquer là aussi le lemme de Burnside.

Les pavages de Maurits Escher

Venons-en à un cas amusant, car lié aux explorations combinatoires d'un artiste curieux de mathématiques. Au cours des années 1938-1943, le graveur hollandais Escher (évoqué ici il y a deux mois pour ses figures impossibles) développa une série de techniques pour découper un plan en pavés superposables et emboîtables, qui le conduisirent

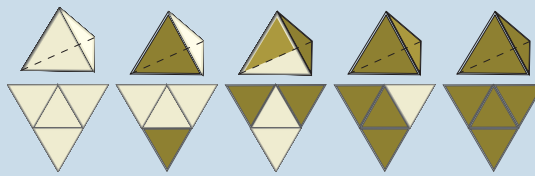
4. Le coloriage du tétraèdre

Le tétraèdre régulier est l'un des cinq polyèdres platoniciens. Interrogeons-nous sur les différentes façons de colorier ses faces, toujours en utilisant des couleurs prises parmi k . Il y a cette fois 12 rotations différentes à prendre en compte. On les classe en trois catégories.

L'identité I : elle laisse invariants les k^4 tétraèdres possibles. Les 8 rotations de 120 degrés ou -120 degrés ayant leur axe passant par un sommet et le centre d'une face : chacune laisse k^2 tétraèdres invariants. Les 3 rotations de 180 degrés dont les axes passent par le milieu de deux arêtes opposées : chacune laisse k^2 tétraèdres invariants.

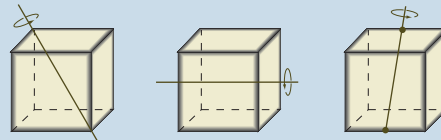


Le lemme de Burnside nous indique immédiatement qu'il y a $M = (k^4 + 11k^2)/12$ façons différentes de colorier le tétraèdre. Pour $k=2$, on obtient donc $M = (16 + 44)/12 = 60/12 = 5$, ce que l'on contrôle en faisant les dessins suivants avec leur patron :



5. Le coloriage du cube

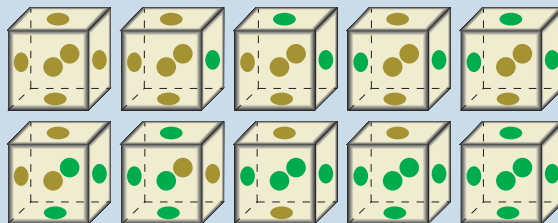
Nous voulons colorier les 6 faces d'un cube avec k couleurs. De combien de façons vraiment différentes est-ce possible ?



Vingt-quatre opérations laissent invariant un cube non colorié.

1) L'identité laisse k^6 cubes invariants. 2) Six rotations de 90 degrés autour des axes passant par le centre de deux faces opposées. Chacune laisse k^3 cubes invariants. 3) Trois rotations de 180 degrés autour des axes passant par le centre des deux faces opposées. Chacune laisse k^4 cubes invariants. 4) Huit rotations de 120 degrés autour des axes passant par deux sommets diamétralement opposés. Chacune laisse k^2 cubes invariants. 5) Six rotations de 180 degrés autour des axes passant par le centre de deux arêtes diamétralement opposées. Chacune laisse k^3 cubes invariants.

Le lemme de Burnside donne $M = (k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2)/24$ cubes vraiment différents, et l'on obtient, pour deux couleurs, $M = (2^6 + 3 \times 2^4 + 12 \times 2^3 + 8 \times 2^2)/24 = 10$, ce que l'on vérifie.



Pour 3 couleurs, on obtient $M=10$. À vos scies et pinceaux !

à réaliser des œuvres universellement connues aujourd'hui. Il s'intéressa aussi à plusieurs problèmes d'énumération de pavages dont il envisagea un moment de vendre les solutions à des fabricants de carreaux de céramique, accompagnées de motifs adaptés. Voici un problème qui le préoccupa et qui lui fit remplir des dizaines de pages de ses carnets de croquis.

On se donne un motif géométrique ne possédant aucune symétrie (par exemple une main, ou la lettre *k*) et peint sur un carré. On considère les quatre façons de placer le carré quand on le fait tourner de 0, 90, 180 et 270 degrés. Désignons-les par *A*, *B*, *C*, *D*. Par symétrie, on obtient 4 autres motifs notés *a*, *b*, *c*, *d*, puis on construit des carrés 2 × 2 en prenant 4 motifs (éventuellement plusieurs fois le même) qu'on assemble côté à côté comme représenté en haut à gauche de la figure ci-contre.

Utilisant ce carré de 4 motifs, on pave alors le plan par translations horizontales et verticales répétées du motif. Escher se demande : combien de pavages vraiment différents peut-on obtenir ? La question n'est pas facile, car le carré *A B C D* donne le même pavage que les carrés *B A C D* ou *D C B A*. De plus, les pavages qui se déduisent l'un de l'autre par rotation compliquent encore la tâche. Escher se limita dans un premier temps à l'utilisation de *A*, *B*, *C*, *D*. Il aboutit à 23 pavages vraiment différents de ce type. L'usage du lemme de Burnside – qu'il ne connaissait pas – confirme ce résultat.

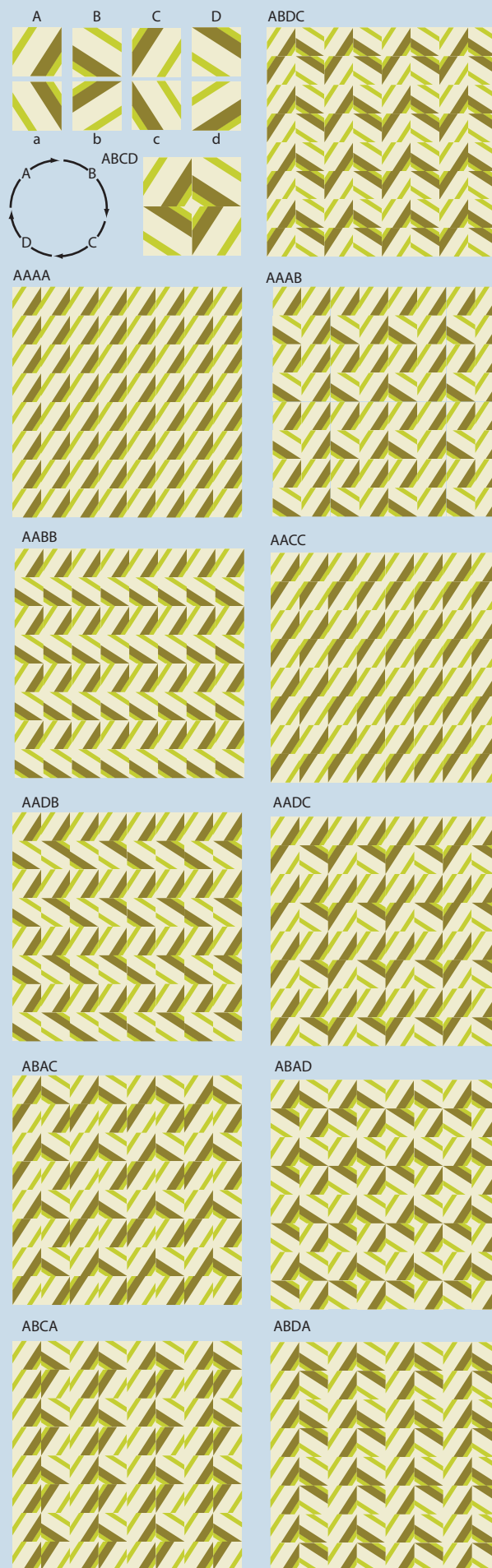
6. Un pavage du plan

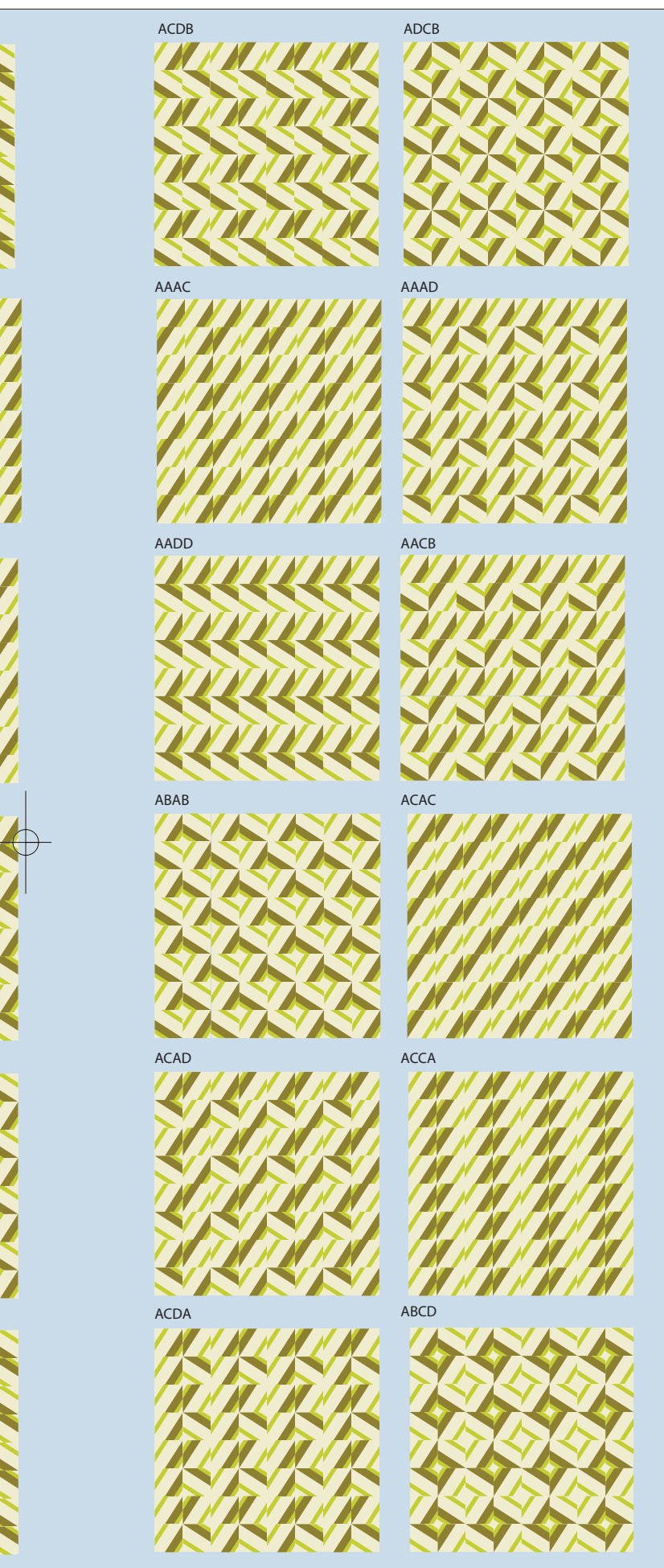
Maurits Escher dénombra de manière empirique les pavages avec seulement quatre carrés du type *A B C D* en éliminant les configurations de carrés qui conduisaient à des pavages déjà obtenus (voir ci-dessus). Il obtint 23 pavages différents de ce type. L'utilisation du lemme de Burnside – qu'il ne connaissait pas – confirme ce résultat.

En effet le nombre d'opérations possibles sur un pavage est 16, dont voici la liste avec le nombre de pavages invariants pour chacune.

- 1) L'identité I : 4^4 pavages invariants (4 choix pour chaque lettre).
- 2) La rotation R_1 d'un quart de tour : 4 pavages invariants (les quatre lettres du carré se déduisent d'une seule).
- 3) Rotation R_2 d'un demi-tour ($R_2 = R_1 \times R_1$) : 4^2 pavages invariants (*A* et *B* imposent *C* et *D*).
- 4) R_3 rotation de trois quarts de tour ($R_3 = R_1 \times R_1 \times R_1 = R_2 \times R_1$) : 4 pavages invariants (les quatre lettres du carré se déduisent d'une seule).
- 5) La translation vers la droite d'une case T_1 : 4^2 pavages invariants (il s'agit de ceux de la forme *XXYY*).
- 6) La translation vers le haut d'une case T_2 : 4^2 pavages invariants (ceux où les carrés sont de la forme *YYXX*).
- 7) La translation en diagonale d'une case $T_3 = T_1 \times T_2$: 4^2 pavages invariants (ceux où les carrés sont de la forme *XYXY*).
- 8) $R_1 \times T_1$: 0 pavage invariant.
- 9) $R_1 \times T_2$: 0 pavage invariant.
- 10) $R_1 \times T_3$: 4 pavages invariants.
- 11) $R_2 \times T_1$: 4^2 pavages invariants.
- 12) $R_2 \times T_2$: 4^2 pavages invariants.
- 13) $R_2 \times T_3$: 0 pavage invariant.
- 14) $R_3 \times T_1$: 0 pavage invariant.
- 15) $R_3 \times T_2$: 0 pavage invariant.
- 16) $R_3 \times T_3$: 4 pavages invariants.

Le lemme de Burnside nous donne donc un total de $M = (4^4 + 6 \times 4^2 + 4^2)/16 = 23$ pavages vraiment différents, ce qui confirme que la liste proposée par Escher est bonne.





Escher se posa d'autres problèmes du même type et finit par buter sur une explosion de combinaisons impossibles à maîtriser, même pour l'artiste méticuleux qu'il était. Il réussit à trouver que si on compose le motif carré 2×2 en prenant 2 fois le même motif de base (parmi A, B, C et D) et deux fois un motif obtenu par symétrie (donc parmi a, b, c et d), par exemple $A c c A$, on peut réaliser 10 pavages différents. En revanche, il échoua en voulant compter combien il y a de pavages obtenus en composant le carré 2×2 avec deux carrés différents parmi A, B, C et D et deux carrés différents pris parmi leurs symétriques a, b, c, d . Au lieu du bon résultat qui est 39, il n'en trouva que 37 (et même 36, car deux des pavages de sa liste sont identiques). Depuis, le problème des pavages de Escher a été repris et traité complètement. C'est ainsi que, récemment, Dan Davis a pu énumérer à l'aide d'un programme les 154 pavages différents qu'on obtient avec un motif carré 2×2 composé sans restriction de quatre carrés pris parmi A, B, C, D, a, b, c, d .

Burnside pour les jeux, la chimie et la musique

Dans le domaine des applications ludiques, indiquons que le lemme de Burnside a été utilisé pour compter combien de configurations vraiment différentes possède le fameux cube de Rubik. Il y en a : $(8! \times 12! \times 3^8 \times 2^{12}) / (2 \times 3 \times 2) = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$ si l'on compte plusieurs fois les cubes qui, par rotation (de tout le cube), se ramènent les uns aux autres (résultat de E. Turner et K. Gold). Le nombre véritable de configurations différentes, calculé par Dan Hoey en utilisant le lemme de Burnside, est sensiblement plus petit : 901 083 404 981 813 616.

Le lemme est très apprécié des théoriciens de la musique qui, grâce à lui, comptent combien de structures différentes sont possibles (canons, rythmes cycliques, etc.) et des chimistes qui s'en servent pour dénombrer les isomères.

Le lemme de Burnside illustre la magie des mathématiques : grâce à lui, l'impossible devient simple. L'expliquer aux élèves leur montre que le passage par l'abstrait – même s'il est fait par des théoriciens dont on n'arrive pas à comprendre parfaitement les subtils raisonnements – donne des outils (lemmes, théorèmes, etc.) que chacun peut maîtriser et qui simplifient le monde.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

R. HALL et P. KLINGSBERG, *Asymmetric rhythms and tiling canons*, in *American Mathematical Monthly*, décembre 2006.

N. BAXTER, *The burnside di-lemma : combinatorics and puzzle symmetry*, in *Tribute to a Mathematician*, Ed. Barry Cipra et al., Wellesley Massachusetts, pp. 199-210, 2005.

D. SCHATTSCHNEIDER, *Escher's combinatorial patterns*, in *Electr. J. Comb.*, 4, 2, 1997.

P. NEUMANN, *A lemma that is not burnside's*, in *Math. Scientist*, 4 : pp. 133-141, 1979.

C. L. LIU, *Introduction to combinatorial mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

W. BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*, Camb. Univ. Press, 1897.