LOGIQUE & CALCUL

Être normal ? Pas si facile !

En 1908, Émile Borel se demande s'il est possible que toutes les séquences de chiffres soient représentées de façon égale dans le développement décimal d'un nombre réel. Il prouve que c'est le cas le plus fréquent... mais ne propose pas d'exemples.

Jean-Paul DELAHAYE

En 1908, le mathématicien français Émile Borel (1871-1956) s'interroge sur les propriétés particulières que pourraient posséder les décimales des nombres usuels, comme $\sqrt{2}$, e ou π. Il introduit la notion de « nombre normal » dont nous verrons plus loin la définition. Aujourd'hui, tout un domaine de l'arithmétique s'occupe de ces questions qui ont pris de l'importance et qui progressent régulièrement, malgré l'extrême difficulté du sujet.

Une multitude d'articles et un livre récent de Yann Bugeaud exposent ces progrès. Un texte non publié d'Alan Turing (1912-1954) dont nous fêtons cette année le centième anniversaire de la naissance résolvait la question de l'existence de nombres « absolument normaux calculables ». Sa redécouverte montre une fois encore qu'informatique et mathématiques sont intimement liées, et illustre le génie de Turing.

Le nombre 13/50 s'écrit 0,26. C'est un nombre dont le développement décimal est fini. Un autre exemple est 721/250 = 2,884. Tout quotient de deux entiers n/m avec m de la forme $2^i \times 5^j$ est de la même façon un nombre à l'écriture décimale finie. Inversement, tout nombre qui possède un développement décimal fini est de ce type. Il faut le savoir, mais, bien sûr, ce ne sont pas ces nombres décimaux qui nous inquiéteront !

Les nombres 8/15 = 0,533333333... (la suite de 3 est illimitée) et 149/7 = 21,285714285714... (la séquence 285714 se répète indéfiniment) sont dits ultimement périodiques : à partir d'un certain endroit, leur développement décimal se répète périodiquement, et cela jusqu'à l'infini. On montre que tout nombre rationnel, c'est-à-dire quotient de deux entiers, possède un développement décimal fini ou ultimement périodique, et qu'à l'inverse, aucun nombre irrationnel (ne pouvant s'écrire comme quotient de deux entiers ; c'est le cas de $\sqrt{2}$, e ou π) ne possède un développement décimal fini ou ultimement périodique.

Les décimales des nombres $\sqrt{2}$, e ou π semblent par ailleurs indiscernables de ce que donneraient des tirages au hasard de chiffres entre 0 et 9. Borel, pour exprimer cette idée, a introduit le concept de nombre simplement normal en base 10. Par définition, c'est un nombre tel que la proportion des 0 parmi les n premières décimales tend vers 1/10 quand n tend vers l'infini, de même pour les 1, les 2, ..., les 9. Un nombre normal en base 10 est un nombre dont toute séquence fixée de k chiffres apparaît avec la fréquence limite $1/10^k$: ainsi, 1789 y apparaît avec une fréquence limite 1/10 000 ; 12345 y apparaît avec une fréquence limite 1/100 000. Ces définitions s'étendent aux bases de numération autres que 10.

Dans les décimales d'un nombre normal en base 10, on rencontre bien sûr toutes les séquences finies de chiffres, donc en particulier la séquence donnant votre numéro de sécurité sociale, ou celle, plus longue, codant en 10 niveaux de gris votre portrait sous la forme d'une image carrée d'un million (= 1 000 × 1 000) de pixels, ou encore l'histoire de votre vie sans utiliser la lettre *e*.

Est-il possible d'être absolument normal ?

Un nombre normal en toute base de numération b supérieure ou égale à 2 est dit absolument normal. Cette propriété est une propriété forte de bon mélange des chiffres. Pour un nombre réel x donné, elle signifie que, quelle que soit la base de numération b que vous choisirez pour l'écrire, en recherchant une séquence de k chiffres très loin dans ce développement, vous aurez autant de chances de la trouver que n'importe laquelle des séquences de même longueur : 341sera aussi fréquente que 777 ou 987 dans le développement en base 10 d'un nombre absolument normal. En base 2, la séquence 01010101 sera aussi fréquente que 00001111.

Ce n'est pas tout de définir une notion, encore faut-il être certain que la définition désigne quelque chose : existe-il des nombres : (1) simplement normaux en base b, (2) normaux en base b, (3) absolument normaux ? La réponse est facile pour « simplement normal en base 10 », car le nombre 123456789/9999999999 = 0,0123457890123456789... convient, et il y a des nombres du même type dans toute base.

Pour les deux autres notions, c'est moins simple, mais Borel a démontré que l'ensemble des nombres qui ne sont pas absolument normaux s'enferme dans une famille I_1, I_2,..., I_n,... d'intervalles dont la longueur totale est aussi petite que l'on veut. Dit autrement, il a démontré que l'ensemble des nombres qui ne sont pas absolument normaux constitue un sous-ensemble de mesure nulle (ou ensemble « négligeable » de l'ensemble des nombres réels).

L'une des conséquences de ce formidable et surprenant théorème est qu'il existe des nombres normaux en base *b* quel que soit *b* supérieur ou égal à 2 et qu'ils sont en quantité infinie non dénombrable (il y en a plus que des nombres entiers). Il en va de même pour les nombres absolument normaux. Non seulement il y en a, mais ils sont majoritaires : en pointant au hasard un nombre réel entre 0 et 1, on tombe, sauf cas infiniment rare, sur un nombre absolument normal.

C'est ici que les ennuis commencent !

Omniprésents, mais introuvables

La démonstration de Borel qu'il existe des nombres absolument normaux n'indique pas comment en obtenir explicitement. En théorie, ces nombres sont partout présents (ceux qui ne le sont pas forment un ensemble négligeable), mais la recherche d'un seul nombre dont on puisse prouver qu'il est normal en base *b*, ou mieux absolument normal, est un défi difficile.

Le nombre de Champernowne est obtenu en mettant bout à bout l'écriture décimale de tous les entiers : 0,12345678910111 21314151617181920... C'est un nombre simple – nous l'avons défini en deux lignes – et pourtant il est normal en base 10. Bien sûr, il existe des nombres équivalents dans toutes les bases de numération. David Champernowne, qui fut professeur de statistique et d'économie à l'Université d'Oxford, était un ami d'Alan Turing. En 1933, il démontra que son nombre était normal en base 10 et l'on peut penser que cette trouvaille incita Turing à s'intéresser lui aussi aux nombres « mélangés » introduits par Borel.

Si l'on met bout à bout l'écriture décimale des nombres premiers, ce qui donne 0,23571113171923..., on obtient à nouveau un nombre normal en base 10. Ce résultat, obtenu en 1946, est dû conjointement à Arthur Copeland et à Paul Erdős, le mathématicien prolixe qui a publié 1 525 articles mathématiques durant sa longue carrière.

D'autres familles de nombres normaux (dans une base fixée) ont été proposées depuis, dont le nombre de Stoneham $\alpha_{2,3}$ introduit en 1973 qui est normal en base 2 :

$$\alpha_{2,3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k 2^{3^k}}$$

Nous y reviendrons. Les constructions du nombre de Champernowne et de ses variantes, et les quelques autres nombres normaux dans une base fixée connue ne résolvent cependant que le problème des nombres normaux en base *b*, pour un *b* unique dans chaque cas. Rien ne dit que le nombre de Champernowne, normal en base 10, soit normal en base 11, 9 ou 2. Les calculs par ordinateur nous conduisent à penser que c'est le cas, mais nul n'a su le démontrer jusqu'ici. Comment trouver un nombre absolument normal ?

Algorithmiquement complexe, donc normal

La théorie algorithmique de l'information semble proposer une solution élégante à cette énigme.

La taille du plus petit programme qui engendre les *n* premiers chiffres d'un nombre réel est la complexité de Kolmogorov de ces *n* chiffres. Si elle vaut toujours à peu près *n* quand *n* tend vers l'infini, on dit que l'on a affaire à un nombre aléatoire au sens de Martin-Löf *(voir l'article du mois de mars 2012 de cette rubrique)*. Or un nombre aléatoire dans ce sens est absolument normal, comme l'ont démontré Cristian Calude et Helmut Jürgensen en 2002.

Un tel résultat ne donnerait rien de plus que l'affirmation de Borel que les nombres absolument normaux sont partout, si on ne pouvait pas trouver de nombres réels aléatoires bien identifiés. C'est là que le nombre Ω (oméga) de Gregory Chaitin intervient. Ce nombre est la probabilité qu'une machine universelle de Turing s'arrête quand on lui donne un programme écrit en binaire dont les bits sont tirés au

1. L'existence de nombres absolument normaux, sans exemples

Émile Borel introduit en 1908 la notion de nombre absolument normal (la fréquence d'apparition d'une séquence de *k* chiffres dans le développement en base *b* est $1/b^k$). Il prouve l'existence de tels nombres, et même qu'ils sont majoritaires. Il est cependant lucide sur le malaise créé par ces nombres partout présents, mais introuvables en pratique. Il écrit :

« La probabilité pour qu'un nombre soit absolument normal est [...] égale à l'unité. Dans l'état actuel de la science, la détermination effective d'un nombre absolument normal paraît un problème des plus difficiles : il serait intéressant, soit de le résoudre en construisant un nombre absolument normal, ou en montrant qu'un nombre irrationnel connu est absolument normal, soit de démontrer que, parmi les nombres pouvant être réellement définis, aucun n'est absolument normal ; si paradoxal que paraisse cet énoncé, il n'est nullement incompatible avec le fait que la probabilité pour qu'un nombre soit absolument normal est égale à l'unité. »

Aujourd'hui, malgré des avancées significatives, bien des mystères subsistent sur ces nombres quasi paradoxaux. Sa femme, Camille Marbo, relate dans son livre de souvenirs que, découragé de ne pas avoir trouvé un seul exemple de nombre normal dans toutes les bases de numération, Borel abandonna les « hautes mathématiques » pour s'intéresser aux probabilités et à la théorie des jeux.

hasard. On sait construire de telles machines universelles (susceptibles de mener tout calcul) et donc, dès que l'une est choisie, le nombre Ω associé est fixé. C'est une probabilité, c'est-à-dire un nombre réel compris entre 0 et 1. On connaît ainsi des nombres absolument normaux et la méthode des machines universelles en définit même une infinité. Devons-nous être satisfaits ?

Malheureusement non : les nombres Ω de Chaitin sont non calculables. Ils sont parfaitement définis, mais à la question, devenue mathématique grâce aux travaux de Turing de 1936, « sont-ils calculables ? », la théorie répond non de manière formelle et définitive : aucun programme ne peut égrainer les chiffres d'un nombre Ω de Chaitin (alors que c'est possible pour $\sqrt{2}$, *e* ou π).

Un objet mathématique peut être parfaitement bien défini et unique (il existe un unique nombre Ω associé à chaque machine universelle de Turing), sans pour autant qu'on puisse en connaître le détail (par exemple les chiffres décimaux). Cela semble paradoxal, mais c'est l'une des conséquences de l'indécidabilité logique mise en avant par Kurt Gödel en 1931 et complétée par les résultats de non-calculabilité de Turing de 1936 : « être bien défini » n'a pas pour conséquence « être calculable » et, par manque de chance, les nombres absolument normaux donnés par la théorie de la complexité sont justement dans la catégorie étrange des nombres « bien définis et non calculables ».

La question est alors reposée : peut-on définir un nombre réel dont on prouvera qu'il est absolument normal, et dont on calculera véritablement les chiffres un à un aussi loin qu'on le souhaite (par exemple en base 10) ?

Peut-on définir un nombre réel dont on prouvera qu'il est absolument normal, et dont on pourra calculer à volonté les chiffres un à un ?

Absolument normal et calculable ?

La réponse aurait pu être non, car les nombres calculables, qui sont en quantité infinie dénombrable, constituent un sous-ensemble négligeable de l'ensemble des nombres réels, et parce que leur intersection avec le sous-ensemble des nombres normaux pouvait donc être vide.

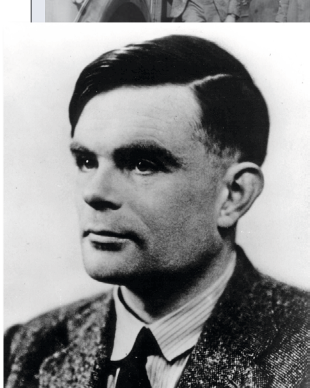
La réponse est positive, mais son histoire, un peu sinueuse, montre que même à propos de questions purement arithmétiques, sans liens apparents avec la logique, le mathématicien contemporain est obligé d'affiner ses concepts à l'aide des outils de cette logique qu'il a parfois regardée avec méfiance, comme le firent Henri Poincaré et Nicolas Bourbaki.

Tout d'abord, dès 1917, deux mathématiciens, Henri Lebesgue (1875-1941) et Waclaw Sierpinski (1882-1969), comprenant qu'il était souhaitable de rendre concrète la définition de Borel d'un nombre absolument normal, reprennent la preuve d'existence de Borel et l'expriment sous une forme constructive. Dans des articles écrits indépendamment, mais se recoupant sur certains points, chacun donne une formulation de la preuve d'existence de Borel d'une telle façon qu'à la fin, elle produise vraiment la définition d'un nombre précis absolument normal. Hélas, si leur démonstration caractérise un nombre par une propriété parfaitement identifiée et

2. Turing et la calculabilité

Alan Turing est né en 1912 et mort en 1954. De nombreuses manifestations ont été organisées cette année à l'occasion du centième anniversaire de sa naissance. C'est l'un des premiers mathématiciens-logiciens-informaticiens (le premier est probablement le philosophe allemand Leibniz, qui a étudié le système de numération binaire et construit une magnifique machine à calculer) ; ses travaux ont créé de nombreux liens entre les trois domaines : théorie mathématique de la calculabilité, indécidabilité algorithmique, corps des nombres réels calculables.

La question des nombres normaux a préoccupé Turing et, dans un texte non publié écrit autour de 1934 (www.turingarchive.org/viewer/?id=131&title=01a.1), il a donné les bases d'un algorithme permettant de calculer des nombres absolument normaux. La mise en forme définitive de son texte, redécouvert tardivement, n'a été effectuée qu'en 2002 par Verónica Becher et Santiago Figueira, informaticiens à l'Université de Buenos Aires.



Alan Turing était un athlète : ici, en 1946, il prend le bus avec les membres du *Walton Athletic Club*. Durant la Seconde Guerre mondiale, Turing participa au décodage du code allemand, ce qui fut décisif dans la victoire des Alliés.

formulée, elle n'en donne pas un moyen de calcul explicite. Bien que plus techniques et moins élégantes que la preuve par le biais de la théorie de la complexité (plus tardive), les preuves de Lebesgue et Sierpinski semblent être de la même nature : elles désignent de façon théorique des nombres dont il est prouvé qu'ils sont absolument normaux, mais dont le calcul des décimales n'est pas effectué et n'est peut-être pas possible. Nous allons voir cependant que ces démonstrations techniques possèdent un avantage sur celle de la théorie de la complexité.

Dans les motivations que Lebesgue donne au début de son travail, apparaît la question de l'axiome du choix, qui préoccupait les mathématiciens du début du XX^e^ siècle. L'axiome du choix affirme qu'à toute famille (A_i) d'ensembles non vides est associé au moins un ensemble C ayant exactement un élément commun avec chaque A_i. Lebesgue exprime sa conviction que pour les définitions « qui ne sont pas illusoires, il est possible d'apporter des précisions qui conduisent à la définition d'un des ensembles [ou nombres] dont on démontre l'existence ». Or on sait aujourd'hui que certaines démonstrations d'existence ne peuvent pas être rendues constructives et seraient donc considérées illusoires par Lebesgue.

Paradoxalement, tel est justement le cas pour les ensembles non mesurables « au sens de Lebesgue » ! Les ensembles mesurables sont ceux constitués de nombres réels auxquels on peut attribuer une longueur, et dans le cas du plan, ceux auxquels on peut attribuer une aire. L'axiome du choix permet de prouver qu'il existe des ensembles non mesurables (n'ayant donc pas de longueur, ou d'aire), mais ne permet d'en définir aucun. Or en 1970, Robert Solovay a démontré qu'on pouvait, sans introduire de contradiction, ajouter à la théorie des ensembles habituelle l'axiome « tout ensemble est mesurable au sens de Lebesgue ». Cela signifie qu'aucune définition précise d'un ensemble non mesurable n'est possible dans le cadre de la théorie des ensembles sans l'axiome du choix. La démonstration classique de l'existence d'ensembles non mesurables est irrémédiablement non constructive : elle s'appuie sur l'axiome du choix, mais pire, sans lui, elle est impossible !

3. Les nombres normaux sont majoritaires

Borel a démontré que les nombres qui ne sont pas normaux en base 10 sont en quantité négligeable : en prenant un nombre réel au hasard entre 0 et 1, on tombera, sauf cas exceptionnellement rare, sur un nombre normal en base 10 (et même normal en toute base de numération).

C'est assez choquant, car on n'arrive même pas à démontrer que les nombres usuels comme π, e, log (2), $\sqrt{2}$, etc., sont normaux en base 10. Voici une façon de présenter le problème qui n'est pas une preuve rigoureuse, mais qui aide à saisir l'étonnante affirmation de Borel.

Tirer au hasard un nombre réel entre 0 et 1 revient à tirer au hasard une suite infinie de 0, 1, 2, ..., 9 avec un dé équitable, par exemple un icosaèdre où chaque chiffre apparaît sur deux faces. Or quand on mène une telle suite de tirages équitables, chaque séquence de longueur k, par exemple la séquence 1789 de longueur 4, a la probabilité $1/10^k$ d'être obtenue à chaque instant (1789 apparaît en moyenne une fois sur 10 000).

C'est une conséquence de la loi des grands nombres, car les événements sont indépendants et chaque chiffre se présente avec une probabilité 1/10. Pour une séquence fixée de longueur k, la probabilité pour que la fréquence limite soit $1/10^k$ est donc de 100 %. Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est aussi négligeable, la probabilité qu'une suite infinie de tirages ne donne pas la fréquence limite $1/10^k$ pour une séquence de longueur k est nulle. Autrement dit, un nombre réel pris au hasard entre 0 et 1 a toutes les chances d'être normal en base 10. La conclusion s'étend à la propriété d'être absolument normal (normal dans toute base), car il y a une infinité dénombrable de bases de numération possibles (l'ensemble NN(b) des nombres non normaux en base b est négligeable, donc la réunion de tous les NN(b) aussi ; son complémentaire est l'ensemble des nombres absolument normaux).

En quête d'un algorithme

Arrivés à ce point et conscients, grâce à la logique mathématique, de l'inconfort de la situation concernant les nombres absolument normaux, notre problème se résume alors ainsi :

– La preuve d'existence de Borel est non constructive, mais ne l'est pas aussi gravement que celle des ensembles non mesurables, car les reformulations de Lebesgue et de Sierpinski ainsi que les approches par la théorie de la complexité donnent des définitions précises de nombres absolument normaux.

– Cependant, la logique nous a aussi appris qu'être bien défini n'implique pas être calculable. Reste donc la question, passée sous silence par Lebesgue et Sierpinski faute d'idées assez claires sur le sujet, et devenue parfaitement mathématique grâce à Turing qui introduisit le concept de fonction calculable et de nombre réel calculable : existe-t-il des nombres absolument normaux et calculables ?

Celui grâce à qui la question de l'existence a pris une forme algorithmique claire et mathématique est aussi celui qui la résout positivement pour les nombres absolument normaux dans son article non publié de 1934. Turing refait en quelque sorte le travail de Sierpinski et Lebesgue, mais il cherche à aller plus loin et veille à définir un nombre absolument normal accompagné d'un algorithme de calcul. Malheureusement, ce qu'on a retrouvé de l'article de Turing ne va pas tout à fait au bout et reste incomplet sur un point qui ne sera définitivement éclairci qu'en 2002 par Verónica Becher et Santiago Figueira. Enfin rendue parfaitement constructive et calculable, la démonstration d'existence des nombres absolument normaux de Borel est-elle pour autant définitive ?

Non, la satisfaction éprouvée par ce succès récent est atténuée par deux remarques qui suggèrent qu'il reste encore du travail à faire et que les mathématiciens, les logiciens

4. La complexité des irrationnels algébriques

Le magnifique et puissant théorème de Adamczewski et Bugeaud permet de démontrer la conjecture de Loxton et van den Porten que tout nombre dont les chiffres en base *b* sont produits par un automate fini est soit rationnel, soit transcendant (non solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers). Cette conjecture signifie que les nombres algébriques (solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers) sont ou bien rationnels (et leurs chiffres sont ultimement périodiques, donc très simples), ou bien complexes (leurs chiffres ne peuvent être écrits par un automate fini).

Le théorème donne des informations sur la complexité des chiffres d'un nombre réel mesurée par la fonction $p_b(m)$. Si *x* est un nombre réel écrit en base *b*, on note $p_b(m)$ (et on dénomme fonction complexité de *x*) le nombre de séquences différentes de longueur *m* rencontrées dans son développement en base *b*.

Par exemple, 1/5 s'écrit, en base 2, 0,0011001100110011... Le nombre de mots de longueur 3 rencontrés dans ce développement est 4, puisque les seules séquences de longueur 3 qu'on trouve sont 001, 011, 110 et 100. Il s'ensuit que $p_2(3) = 4$ pour le nombre 1/5. Notons que $p_2(m)$ est inférieur ou égal à 2^m, et que $p_b(m)$ est inférieur à b^m.

THÉORÈME DE ADAMCZEWSKI ET BUGEAUD. Si *x* est un nombre irrationnel algébrique écrit en base *b*, alors $p_b(m)/m$ croît indéfiniment (pour *m* assez grand, $p_b(m)/m$ dépasse 10, et ne revient jamais en dessous, plus loin il dépasse 100, etc.).

Dit autrement, la variété des séquences de longueur *m* qu'on trouve dans le développement d'un nombre algébrique irrationnel est grande : elle augmente plus vite que n'importe quelle fonction linéaire. Ce théorème ne permet pas encore de prouver que les nombres irrationnels algébriques sont normaux, ce que l'on pense vrai, mais on tient là une affirmation forte sur les décimales des nombres algébriques irrationnels qui nous approche un peu du but.

Le théorème est aussi un outil puissant pour démontrer que des nombres sont transcendants et il permet de retrouver le résultat que le nombre de Prouhet-Thue-Morse 0,0110100110010110..., souvent rencontré en arithmétique, est transcendant (ce nombre est obtenu en écrivant, après la virgule, 0 puis le complément 1, ce qui donne 01 ; on ajoute alors le complément 10, ce qui donne 0110 ; on ajoute encore le complément 1001, ce qui donne 01101001 ; et ainsi de suite).

Yann Bugeaud

Boris Adamczewski

et les informaticiens n'en ont pas fini avec les nombres absolument normaux.

Quatre niveaux d'existence mathématique

D'une part, l'algorithme explicité est affreusement inefficace : il est « doublement exponentiel », ce qui signifie que pour connaître *n* décimales du nombre absolument normal qu'il calcule, il faut le faire fonctionner durant un temps en gros proportionnel à exp(exp(*n*)) (ou 2 à la puissance 2^n), qui est une fonction de la variable *n* à croissance extrêmement rapide. À ma connaissance, personne n'a essayé de produire des décimales du nombre calculable que l'algorithme de Turing-Becher-Figueira égraine indéfiniment... en théorie. Cette double exponentielle illustre un quatrième niveau dans les degrés de l'existence mathématique : après l'existence pure (preuve de Borel), l'existence avec caractérisation (théorie de la complexité ou preuves de Lebesgue et Sierpinski), l'existence avec algorithme de calcul (Turing, Becher, Figueira), on aimerait bien atteindre l'existence avec un algorithme de calcul praticable et donnant donc « pour de vrai » les décimales d'un nombre absolument normal qu'on pourrait enfin voir écrit sur une page imprimée !

La deuxième raison d'insatisfaction est que la question posée à propos des nombres absolument normaux n'est pas tant celle d'en définir un et de le calculer, mais plus simplement : $\sqrt{2}$, *e* ou π, ou les nombres irrationnels que l'on connaît, et dont l'étude des chiffres suggère qu'ils sont absolument normaux, le sont-ils vraiment ?

Sur ces dernières questions, des progrès ont été faits assez récemment. Bien sûr le calcul des chiffres de π, qui a maintenant été mené jusqu'à la décimale en position 10^{13} = 10 000 000 000 000, permet d'étudier empiriquement la question. Un travail portant sur les quatre premiers milliards de ces chiffres et utilisant une modélisation à l'aide d'un processus de Poisson a conduit David Bailey, Jonathan Borwein, C. Calude, Michael Dinneen, Monica Dimiteescu et Alex Yee à la conclusion suivante : « Il est extraordinairement improbable que π ne soit pas normal en base 16, étant donné la normalité de son segment initial. » Malheureusement, le nombre décimal qui aurait le même développement pendant quatre milliards de décimales et qui se poursuivrait par des 0 aurait lui aussi conduit à la même conclusion, qui n'est donc en rien l'esquisse d'une preuve.

Vers la normalité de log (2) ou de π

D. Bailey et Richard Crandal ont proposé une condition simple assurant la normalité du nombre log(2) (qui, comme $\sqrt{2}$, *e* ou π, intéresse particulièrement les mathématiciens). Si la suite définie par $x_0 = 0$ et $x_n = (2x_{n-1} + 1/n) \bmod 1$ est équidistribuée (x_n se retrouve dans l'intervalle $[a, b]$ à la fréquence $b-a$, quels que soient les nombres réels *a* et *b* tels que $0 < a \leq b < 1$), alors log (2) est normal en base 10. Même si la condition semble plus simple à établir que la normalité de log (2), elle résiste pour l'instant, et l'on ne peut donc pas affirmer que log (2) est normal. Une condition du même type existe pour π. Bien qu'un peu plus complexe, elle donne l'espoir qu'on s'approche d'une preuve que π est normal en base 2.

Et les nombres absolument non normaux ? Puisqu'on n'arrive pas à expliciter un nombre absolument normal, peut-on au moins en expliciter un qui soit absolument non normal (c'est-à-dire qui ne soit normal dans aucune base *b*, pour *b* supérieur ou égal à 2) ? Cette fois, la réponse est oui : Greg Martin, à l'Université de Toronto, a réussi en 2001 à mener une telle construction pour un nombre irrationnel et calculable de manière effective. Le nombre noté ici α possède une définition courte :

$$d_2 = 2^2, \quad d_j = j^{d_{j-1}/(j-1)},$$
$$\alpha = \prod_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{d_j}\right)$$

Son développement décimal est : 0,656249999995699999...999999985284 04201690728... (avec 23 747 291 559 fois le 9 après 9956).

Normalité mixte...

Des progrès viennent aussi d'être réalisés concernant les nombres normaux dans certaines bases et pas dans d'autres.

Deux entiers *a* et *b* sont dits multiplicativement dépendants s'il existe des puissances de *a* et de *b* égales ($a^m = b^n$). Quand c'est le cas, on montre qu'un nombre normal en base *a* l'est aussi en base *b*. En particulier, « être normal en base 1 000 » est donc équivalent à « être normal en base 10, 100, ou 100 000 ». On ne sait écrire explicitement les décimales d'aucun nombre qui soit normal en deux bases de numération indépendantes. Bien sûr, si l'algorithme pour calculer le nombre de Turing-Becher-Figueira est perfectionné et mis en œuvre, il donnera un tel nombre.

Depuis 1959, on sait cependant, grâce aux travaux du mathématicien anglais John Cassel, que si *a* et *b* sont indépendants, alors il existe des nombres normaux en base *a* qui ne le sont pas en base *b*. Un résultat bien plus général de Wolfgang Schmidt (1962) indique même que si A et B sont deux ensembles d'entiers supérieurs ou égaux à 2, tels que les nombres dépendants ne soient jamais séparés (quand *a* et *b* sont dépendants, ils sont tous deux dans A, ou tous deux dans B), alors il existe un nombre *x* qui est normal dans toute base *a* de A, et non normal dans toute base *b* de B. Ces nombres *x* sont cependant du même type que ceux de Borel : on sait qu'ils existent sans qu'on puisse les définir simplement, ni bien sûr les calculer.

En 2012, on a toutefois réussi à exhiber des nombres calculables dont on a montré qu'ils étaient normaux en base 2 et non normaux en base 6 (2 et 6 sont indépendants). Bien que minuscule en apparence, il s'agit là d'un progrès remarquable, d'autant que cette fois les nombres en question se calculent pour de vrai ! Le nombre de Stoneham dont nous redonnons la définition :

$$\alpha_{2,3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k 2^{3^k}}$$

est normal en base 2 et non normal en base 6. Un autre progrès récent (2007) est le théorème de Boris Adamczewski, de l'Université Lyon 1, et Yann Bugeaud, de l'Université de Strasbourg *(voir l'encadré 4)*.

Ainsi, le monde mathématique est étrange ; on peut y formuler des questions très simples et très naturelles (toutes celles concernant les nombres normaux le sont) et buter dessus longuement : c'est par exemple le cas pour la question « π est-il normal en base 10 ? ». On peut démontrer que des objets existent sans que l'on puisse en exhiber un seul. C'est le cas des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue. On peut aussi définir parfaitement un objet et être incapable d'en connaître le détail, soit parce qu'il est incalculable (comme les nombres absolument normaux du type Ω), soit parce que l'algorithme qui le construit est si inefficace qu'on n'en tire concrètement rien (comme le nombre absolument normal de Turing-Becher-Figueira). Pourtant, dans ce labyrinthe de quasi-paradoxes, les chercheurs réussissent à se frayer un chemin et avancent à petits pas... sans jamais renoncer. ■

■ L'AUTEUR

J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

■ BIBLIOGRAPHIE

Y. Bugeaud, **Distribution Modulo One and Diophantine Approximation**, Cambridge University Press, 2012.

D. H. Bailey *et al.*, **Normality and the digits of pi**, *Experimental Mathematics*, à paraître, 2012.

B. Adamczewski et Y. Bugeaud, **On the complexity of algebraic numbers. Expansions in integer bases**, *Annals of Mathematics*, vol. 165(2), pp. 547-565, 2007.

D. H. Bailey *et al.*, **On the binary expansion of algebraic numbers**, *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, vol. 16(3), pp. 487-518, 2004.

V. Becher et S. Figueira, **An example of a computable absolutely normal number**, *Theoretical Computer Science*, vol. 270, pp. 947-958, 2002.