

LOGIQUE & CALCUL

Les graphes-allumettes

Les graphes d'un seul tenant et dont toutes les arêtes sont de même longueur peuvent être dessinés en disposant des allumettes sur une table. Ils sont loin d'avoir livré tous leurs secrets.

Jean-Paul DELAHAYE

Avec des allumettes, les amateurs méticuleux fabriquent des sculptures étonnantes. Un exemple est celle réalisée par Patrick Acton, un passionné d'architecture gothique qui vit dans l'Iowa : longue de plus de deux mètres, elle représente la cathédrale Notre-Dame de Paris (*cliché ci-contre*). Cette maquette a exigé 298 000 allumettes, 55 litres de colle et 2000 heures de travail (www.matchstickmarvels.com/the-models/notre-dame-cathedral).

Beaucoup moins d'allumettes suffisent à l'amusement d'un mathématicien. Grâce à elles, il découvre de nouveaux aspects de sa discipline en se posant des problèmes géométriques ou topologiques sur les dessins faisables avec des traits ayant tous la même longueur. Il tente de les traiter à la main en manipulant le contenu d'une boîte d'allumettes. Certaines questions le conduisent à établir de délicats catalogues. D'autres se révèlent plus ardues et créent de véritables sujets de recherche où il ne progresse que lentement.

Quand on dispose des allumettes sur une surface plane sans qu'elles se croisent, en les faisant se toucher par leurs extrémités et en composant une forme d'un seul tenant, on dessine des graphes d'un type particulier. Ce sont les « graphes-allumettes » ou « graphes-unités », car on peut supposer que la longueur d'une allumette fixe l'unité de longueur (*voir des exemples dans l'encadré 1*). L'étude de ces graphes-allumettes est à la

fois ludique et sérieuse ; c'est à elle que le mathématicien se consacrera de préférence aux constructions de cathédrales !

Deux graphes G et G' sont équivalents, ou « isomorphes », s'ils ont le même nombre de sommets et d'arêtes et s'il est possible de nommer les sommets de G et de G' d'une telle façon que les arêtes de G (ce sont des couples de sommets) soient exactement les mêmes que les arêtes de G' . Ainsi, dans l'encadré 1, les graphes a et b sont iso-

(on dit aussi « connexes ») : deux sommets quelconques sont toujours joignables par un chemin qui suit les arêtes.

Une première question intéresse le mathématicien : un nombre d'allumettes étant fixé, par exemple 6, combien existe-t-il de graphes-allumettes (d'un seul tenant) différents, c'est-à-dire non isomorphes ? On notera $a(n)$ ce nombre. Il est facile de déterminer $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 3$, $a(4) = 5$. Prenez quelques allumettes et amusez-vous à trouver $a(5)$ (*voir l'encadré 1 pour la réponse*).



LA CATHÉDRALE NOTRE-DAME de Paris, maquette construite avec des allumettes.

morphes. En revanche, les graphes a et c ne le sont pas, ni les graphes c et d . Précisons que les graphes dont nous parlerons ici ne sont pas orientés (l'arête xy est considérée identique à l'arête yx), et qu'il ne peut y avoir ni arête d'un sommet vers lui-même (pas d'arête xx), ni deux arêtes reliant deux fois les mêmes sommets (pas d'arcs doubles). Nous ne le préciserons pas à chaque fois, mais nous ne considérerons que des graphes d'un seul tenant

Dénombrements

Les valeurs de $a(n)$ définissent la suite A066951 de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org/A066951>). On ne les connaît que jusqu'à $a(9)$ et cela seulement depuis 2013, grâce à un travail de Raffaele Salvia (<http://arxiv.org/pdf/1303.5965v2.pdf>). Aucune formule n'a été proposée pour $a(n)$.

Un autre décompte est intéressant : parmi les graphes-allumettes (d'un seul tenant) qu'on dessine avec n allumettes, combien sont topologiquement différents ? Cette question admet presque toujours une réponse différente de la première, car deux graphes G et G' sont topologiquement équivalents (on dit aussi « homéomorphes ») si en imaginant que les graphes sont faits de fils en caoutchouc, il est possible de déformer G pour obtenir G' (il ne faut pas se préoccuper des nœuds, mais seulement des

arêtes). Ainsi, les graphes b et c de l'encadré 1 sont topologiquement équivalents (alors qu'ils ne sont pas isomorphes). En revanche, les graphes c et d ne sont pas topologiquement équivalents et correspondent à des classes d'homéomorphie distinctes (dessins A et B).

Le second problème de dénombrement consiste à déterminer combien de classes d'homéomorphie différentes on obtient en dessinant des graphes-allumettes (d'un seul tenant) avec n allumettes. Notons $b(n)$ cette suite. On vérifie aisément que $b(1) = 1$, $b(2) = 1$, $b(3) = 3$, $b(4) = 5$. Rien ne change jusque-là par rapport à $a(n)$. Mais $b(5) = 10$ alors que $a(5) = 12$. En effet, comme l'illustre l'encadré 1, certains graphes non isomorphes appartiennent à la même classe d'homéomorphie. La suite $b(n)$ est la suite A003055 (<https://oeis.org/A003055>) de l'encyclopédie de N. Sloane qui propose les $b(n)$ jusqu'à $n = 9$. Là encore, aucune formule générale n'est connue pour $b(n)$.

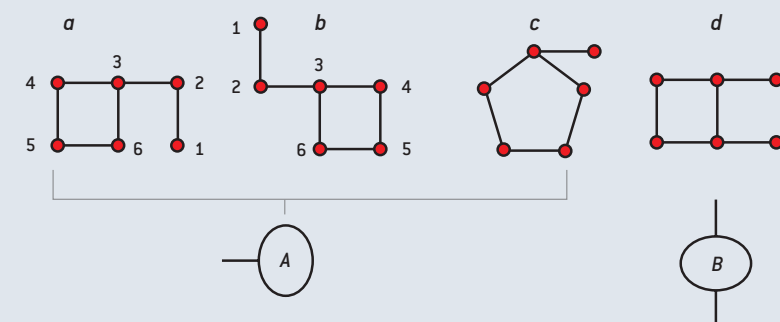
Un joli petit problème que vous pourrez traiter à la main avec seulement six allumettes (de la patience et de la concentration) consiste à retrouver les 28 graphes-allumettes différents qu'on peut faire, et à les regrouper en 19 classes d'homéomorphie. Un défi plus difficile est de mener le même travail pour sept, huit ou neuf allumettes. Vous contrôlerez vos recherches en consultant le récent catalogue publié par R. Salvia.

Les graphes k -réguliers

Calculer un tel catalogue est assez difficile, même avec un ordinateur, car les notions d'isomorphisme de graphes et encore plus d'homéomorphisme de graphes ne se laissent pas facilement programmer. Aller au-delà de $n = 9$ serait un bel exploit et permettrait de compléter le catalogue de R. Salvia et les données de l'encyclopédie des suites numériques. Qui veut essayer ?

Dans un graphe, on nomme « degré d'un sommet » le nombre de ses voisins, c'est-à-dire le nombre d'arêtes dont il est l'extrémité. Par définition, un graphe k -régulier est un graphe dont tous les sommets ont le même degré k . Un tel graphe présente un aspect homogène. Les graphes associés

1. Graphes isomorphes et homéomorphes



n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(n)$:	1	1	3	5	12	28	74	207	633
$b(n)$:	1	1	3	5	10	19	39	84	197

—			

Un graphe-allumettes est un graphe d'un seul tenant dessiné sur un plan, dont toutes les arêtes sont des segments de droite de même longueur et qui ne comporte aucun croisement.

Deux graphes sont dits isomorphes si, en changeant le nom des sommets de l'un, on peut les rendre identiques, c'est-à-dire faire qu'ils aient exactement les mêmes arêtes. Les graphes a et b sont isomorphes, mais pas a et c , ni c et d .

Deux graphes sont topologiquement iden-

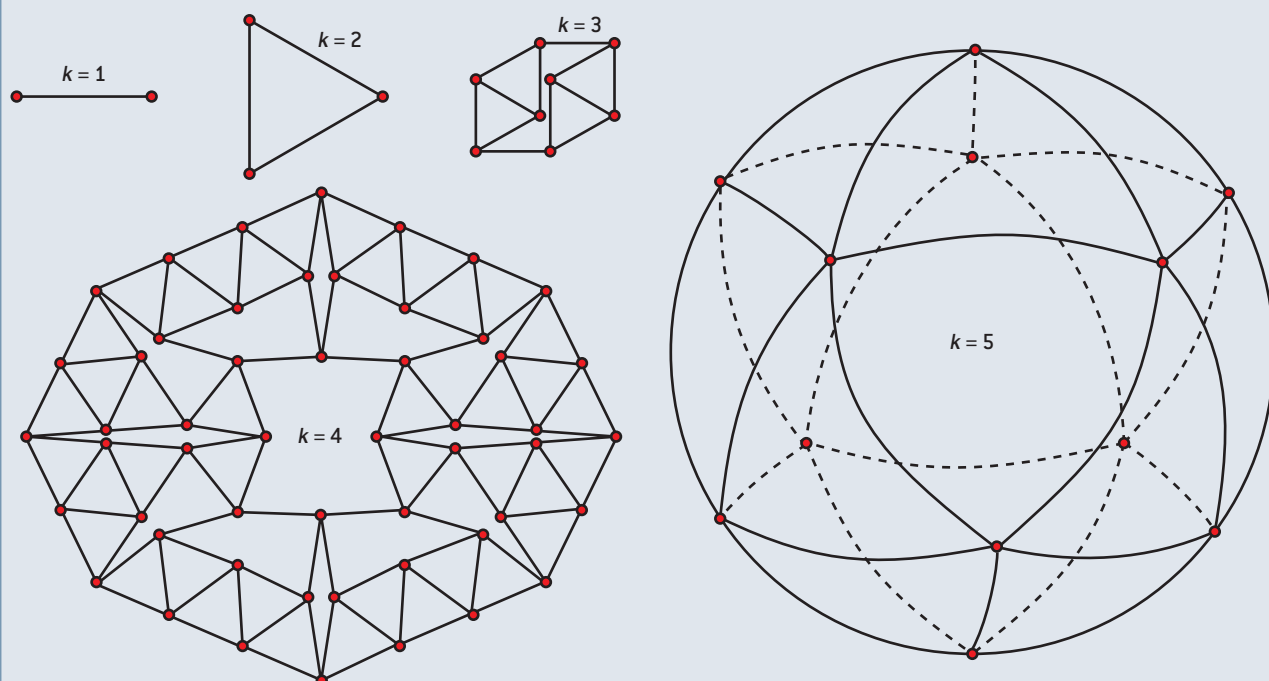
tiques, on dit « homéomorphes » si, en imaginant que chaque graphe n'est qu'un réseau de fils en caoutchouc parfaitement collés, on peut déformer l'un et obtenir l'autre. Les graphes a , b et c sont homéomorphes. Le graphe d , lui, n'est homéomorphe à aucun

des autres. Les dessins A et B représentent les classes d'homéomorphie.

Ci-dessus sont indiqués les 12 différents graphes non isomorphes faisables avec cinq allumettes, qui se regroupent en 10 classes d'homéomorphie.

Le petit tableau indique le nombre $a(n)$ de graphes non isomorphes faisables avec n allumettes sur un plan, et le nombre $b(n)$ de classes d'homéomorphie de ces graphes-allumettes.

2. Les graphes-allumettes k -réguliers et le graphe de Harborth



Les graphes-allumettes dont chaque sommet est le point de rencontre de k arêtes exactement – les graphes k -réguliers – sont faciles à trouver pour $k = 1$ et $k = 2$. Pour $k = 2$, ce sont les

graphes en anneaux composés de n sommets et n arêtes. Le plus petit est un simple triangle équilatéral. Trouver ces graphes-allumettes k -réguliers pour $k = 3$ est moins facile. La

solution minimale comporte huit sommets. Pour $k = 4$, une solution est le graphe de Harborth, mais on n'est pas certain que ce soit la solution minimale. Pour $k > 4$, il n'existe

aucune solution. Pour les graphes-allumettes sur la sphère, il existe une solution pour $k = 5$ qui est la projection sur la sphère des arêtes d'un icosaèdre inscrit.

aux polyèdres réguliers ou semi-réguliers sont tous des graphes réguliers. En 1986, un très joli problème a été posé par Heiko Harborth, de l'Université de Braunschweig en Afrique du Sud. Il porte sur les graphes réguliers faisables sur un plan avec des allumettes. Ce problème, qui n'est que partiellement résolu aujourd'hui, comporte deux questions :
1) Pour quelles valeurs de l'entier k existe-t-il des graphes-allumettes k -réguliers ?
2) Pour chaque k pour lequel de tels graphes existent, quel est le nombre minimal de sommets d'un graphe solution ?

L'encadré 2 présente quatre dessins donnant des solutions pour $k = 1, 2, 3$ et 4 . Le graphe pour $k = 3$ n'est pas tout à fait évident, cependant sa recherche constitue un petit casse-tête d'une difficulté raisonnable, qu'on proposera donc à ses amis en

prenant l'apéritif. L'énoncé du défi sera : « Trouver une disposition d'allumettes sur la table, sans croisement et telle que chaque extrémité d'allumette en rencontre deux autres exactement ».

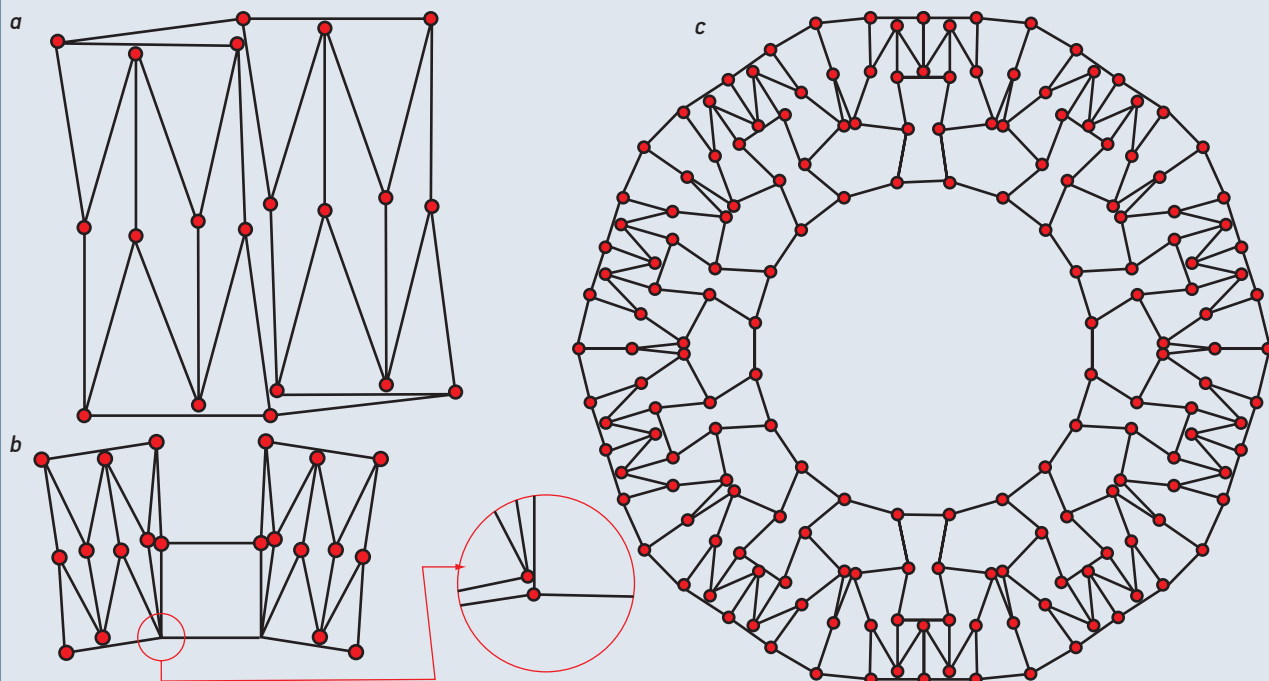
Prévoir 12 allumettes au moins. Si un de vos amis trouve la solution, demandez-lui alors de traiter le problème avec $k = 4$ (chaque extrémité d'allumette doit en rencontrer trois autres exactement). Cette fois, il faut prévoir 52 allumettes. La merveilleuse solution découverte en 1985 par H. Harborth porte aujourd'hui son nom. Ce graphe à 52 sommets est rigide : on ne peut pas le déformer en maintenant toutes les jonctions (la solution pour $k = 3$, elle, n'est pas rigide). Connaître exactement les coordonnées des sommets du graphe de Harborth est assez délicat, mais indispensable pour être certain que le graphe

existe et démontrer sa rigidité. Ce travail n'a été fait qu'en 2006 par Eberhard Gerbracht, à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Dans le cours de ses calculs, il a dû manipuler un polynôme de degré 22.

Le graphe de Harborth est-il minimal ?

Pour $k = 1, 2, 3$, on est certain qu'il n'y a pas de solution plus petite que celles indiquées dans la figure. Pour $k = 4$, on n'a pas encore réussi à démontrer que le graphe de Harborth est minimal. En 2011, Sascha Kurz, de l'Université de Bayreuth, et Rom Pinchasi, du Technion en Israël, ont établi à l'aide d'un programme qu'un graphe-allumettes 4-régulier a au moins 34 sommets. On est loin du nombre 52 de la solution de

3. Graphes où les triangles sont interdits



On recherche des graphes-allumettes k -réguliers où la longueur T du plus petit circuit est différente de 3 : le graphe ne doit comporter aucun triangle. Pour $k = 3$ et $T = 4$, une

solution à 20 sommets (a) a été trouvée récemment par S. Kurz et G. Mazzuocollo qui proposent aussi une méthode donnant des graphes-allumettes 3-réguliers avec $T = 4$ et un

nombre pair ≥ 20 de sommets. L'idée (b) est de remplacer le quadrilatère de la partie centrale par une série de quadrilatères formant une chaîne (un quadrilatère supplémentaire

augmente le nombre de sommets de 2). Pour le cas difficile $k = 3$ et $T = 5$ (pas de triangle, pas de quadrilatère), la solution minimale à ce jour est ce graphe à 180 sommets (c).

H. Harborth, mais on ne sait pas faire mieux pour l'instant ; on recherche donc des graphes-allumettes 4-réguliers plus petits que le graphe de Harborth.

Pas de solution pour $k > 4$

Pour $k = 5$, on soupçonnait depuis longtemps qu'aucune solution n'est possible. Plusieurs preuves ont été proposées pour établir cette inexistence. Dans un premier temps, certaines comportaient des erreurs. Les preuves admises aujourd'hui sont dues à Aart Blokhuis, de l'Université d'Eindhoven, S. Kurz et R. Pinchasi. Aucune n'est assez simple pour être reproduite ici !

Remarquons que cette impossibilité ne concerne que le plan. Sur une sphère, en prenant les projections des arêtes d'un

icosaèdre (le polyèdre de Platon à 20 faces) sur la sphère dans lequel il s'inscrit, on dessine à la surface de la sphère un graphe-allumettes 5-régulier (voir l'encadré 2).

Pour $k = 6$, il n'y a pas de graphes-allumettes 6-réguliers au sens usuel, c'est-à-dire ayant un nombre fini de sommets, mais il est facile d'imaginer une solution infinie. Réfléchissez trois secondes (réponse : un pavage de triangles équilatéraux sur tout le plan).

Pour $k \geq 6$, on démontre, cette fois facilement, qu'il n'y a pas de solution. La démonstration utilise la formule d'Euler pour les graphes planaires. Celle-ci indique que pour un graphe planaire, on a toujours $S - A + F = 2$, où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de faces (c'est-à-dire de zones du plan créées par le

graphe, y compris la zone extérieure au dessin du graphe).

Voici cette démonstration. Si le graphe est k -régulier, à chaque sommet arrivent exactement k arêtes, donc $kS = 2A$. La formule d'Euler devient :

$2A/k - A + F = 2$, ou $F = 2 + (1 - 2/k)A$. Chaque zone du plan délimitée par le graphe comporte au moins trois arêtes sur son pourtour et chaque arête borde exactement deux zones. Cela signifie que $F \leq 2A/3$. On en tire $2A/3 \geq 2 + (1 - 2/k)A$ ou $0 \geq 2 + (1/3 - 2/k)A$. Or cela est impossible quand $k \geq 6$, car $(1/3 - 2/k)$ est alors positif ou nul. Cela achève notre démonstration.

Dans un graphe, la longueur de la plus courte liste d'arêtes qui se suivent et reviennent à leur point de départ se nomme taille du plus petit circuit. On note T ce

paramètre. C'est une donnée qui intéresse les mathématiciens, car les graphes ayant un T assez grand sont rares. Dans le cas du graphe de Harborth, $T = 3$ (il comporte des triangles). Un article publié récemment par S. Kurz et Giuseppe Mazzuocolo, de l'Université de Modène, s'intéresse aux graphes-allumettes k -réguliers ayant $T > 3$ (donc plus difficiles à trouver).

On savait déjà que les graphes-unités 3-réguliers avec $T = 3$ existent si et seulement si le nombre de sommets est pair et supérieur à 8. L'article démontre que les graphes-allumettes 3-réguliers avec $T = 4$ existent si et seulement si le nombre de sommets est pair et supérieur ou égal à 20. Le graphe trouvé pour 20 sommets est étonnant et il faut le regarder de très près pour être certain que les allumettes (nécessairement excessivement fines) ne se touchent qu'à leurs extrémités (voir l'encadré 3).

En plus du travail de démonstration mené pour les graphes ayant $T = 4$, les chercheurs ont réussi à construire un graphe-allumettes

3-régulier ayant $T = 5$ (voir l'encadré 3, c). Il a 180 sommets et est très beau. On ignore si c'est le meilleur de sa catégorie.

Une démonstration utilisant à nouveau la formule d'Euler établit que les graphes-allumettes 3-réguliers ayant $T \geq 6$ sont impossibles.

Dans leur article, les deux auteurs rendent hommage à H. Harborth qui a introduit les problèmes de graphes-allumettes en 1986. Ils précisent que « les allumettes sont les moins chers et les plus simples des objets donnant naissance à des problèmes stimulants, difficiles et ayant un véritable intérêt mathématique. »

Les variantes de ces problèmes ont donné naissance à une famille d'énigmes mathématiques susceptibles de vous occuper longuement. Erich Friedman, de l'Université Stetson en Floride, s'est par exemple intéressé aux graphes-allumettes ayant deux sortes de sommets, les uns de degré n , les autres de degré m (généralisation naturelle de la notion de graphes-allumettes k -réguliers).

En existe-t-il toujours ? Quels sont, pour n et m fixés, les plus simples ?

Sur la page <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1205.html>, E. Friedman tient à jour les meilleurs résultats connus (voir l'encadré 5).

Un problème NP-difficile

La difficulté à résoudre ces problèmes a une explication indirecte qui, cette fois, nous emmène au cœur de la théorie moderne du calcul. La difficulté s'explique par un résultat démontré par les Australiens Peter Eades et Nicholas Wormald : le problème de dessiner sur un plan un graphe dont toutes les arêtes ont la même longueur est « NP-difficile ». Cela signifie que si on savait faire cela efficacement (c'est-à-dire en temps polynomial en fonction du nombre d'arêtes), alors on saurait traiter efficacement une multitude d'autres problèmes dont certains sont unanimement considérés difficiles (ceux dénommés NP-complets). En clair, il ne fait pas de

4. Le problème de Paul Erdős

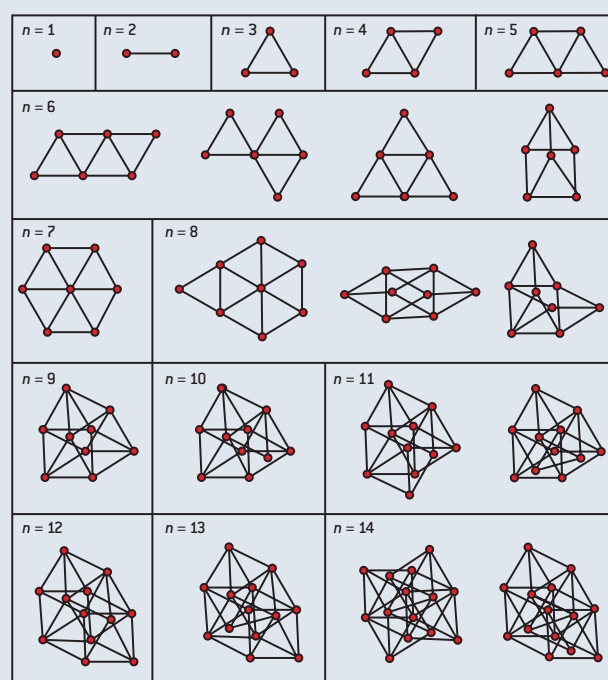
En 1946, Paul Erdős se demande, quand on place n points sur le plan, combien de fois au plus on peut obtenir la même distance entre deux points. La question peut se formuler plus simplement avec les graphes-allumettes, à condition d'autoriser le croisement des arêtes.

La question d'Erdős devient alors : quel est le maximum $f(n)$ d'arêtes que peut avoir un graphe-allumettes de n sommets ? Des petits dessins permettent de répondre assez facilement pour les premières valeurs de n ($n = 1, 2, \dots, 6$). En revanche, pour aller plus loin, il faut s'armer d'une grande patience et de beaucoup d'ingéniosité... ou d'un ordinateur.

La suite $f(n)$ est la suite A186705 de l'encyclopédie des suites de Neil Sloane. Erdős démontra qu'il existe deux

constantes positives c et c' telles que : $n^{1+c/\log(\log(n))} < f(n) < c'n^{3/2}$. L'exposant $3/2$ du terme de droite a depuis été amélioré, d'abord en 1,44, puis en $4/3$. Mais on n'en sait pas plus aujourd'hui, et bien sûr, pas plus que pour $a(n)$ et $b(n)$, on ne connaît de formule générale satisfaisante pour $f(n)$.

On a représenté ci-contre les meilleurs graphes-allumettes connus pour ce problème (dessins dus à C. Schade, voir le livre de P. Brass, W. Moser et J. Pach).



5. Les graphes de Erich Friedman

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8
1							
2							
3							

Erich Friedman s'est intéressé aux graphes-allumettes ayant uniquement des sommets de degré n ou m (n et m étant deux entiers fixés, ici $m = 1, 2, 3$ et $n = 2, 3, \dots, 8$). Nous les nomme-

rons « graphes-allumettes de type $n-m$ ». On recherche à chaque fois les solutions minimales (voir la page www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1205.html).

doute que dessiner un graphe-allumettes en partant seulement de la donnée de ses arêtes exige des calculs qui deviennent déraisonnablement longs quand le nombre d'arêtes augmente.

Le maximum de points distants d'une unité

Un graphe-allumettes est un ensemble de points du plan dont tous ceux liés par une arête sont distants d'une unité exactement. Une question naturelle se pose à propos des ensembles des points distants d'une unité. C'est le grand mathématicien hongrois Paul Erdős qui y a pensé le premier en 1946. Un entier n étant fixé, on considère n points sur un plan ; combien au plus de couples de points peuvent-ils être mutuellement à distance 1 ? À la condition d'autoriser les croisements d'allumettes (ce qui jusqu'à présent n'était pas le cas), ce nombre, que nous noterons $f(n)$, est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe-allumettes ayant n sommets. Erdős s'est penché sur cette suite $f(n)$ qui, depuis, a donné lieu à une série de publications. Quelques dessins permettent de trouver les premières valeurs

de $f(n)$: $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 5, f(5) = 7, f(6) = 9$.

Au-delà, c'est nettement plus délicat comme le montrent les configurations optimales de l'encadré 4, qui conduisent aux valeurs : $f(7) = 12, f(8) = 14, f(9) = 18, f(10) = 20, f(11) = 23, f(12) = 27, f(13) = 30, f(14) = 33$.

La beauté et l'importance des mathématiques sont sans doute liées à ce que nous constatons en étudiant les graphes-allumettes : au départ, le sujet est simple, et semble n'être qu'une question combinatoire assez facile à maîtriser. Pourtant, en allant y voir de plus près, toutes sortes de mathématiques y glissent leur nez (dénombrements délicats, topologie, polyèdres, classes de complexité, etc.) pour, finalement, constituer des vrais et difficiles sujets de recherche dont personne ne sait faire le tour et dont les avancées enrichissent les mathématiques d'objets fascinants, tel le graphe de Harborth. ■



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

S. Kurz et G. Mazzuocolo, **3-regular matchstick graphs with given girth** (<http://arxiv.org/abs/1401.4360>), 2014.

S. Kurz et R. Pinchasi, **Regular matchstick graphs**, *The Amer. Math. Monthly*, vol. 118(3), pp. 264-267, 2011.

E. Gerbracht, **Minimal polynomials for the coordinates of the Harborth graph** (<http://arxiv.org/pdf/math/0609360.pdf>), 2006.

P. Brass, W. Moser et J. Pach, **Research Problems in Discrete Geometry**, Springer, 2005.

Références supplémentaires sur le site www.pourlascience.fr