

# R

## ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul  
P.86 Art & science  
P.88 Idées de physique  
P.92 Chroniques de l'évolution  
P.96 Science & gastronomie  
P.98 À picorer

# PAVER LE PLAN AVEC UN PENTAGONE CONVEXE

**L'ordinateur est parfois bon géomètre. C'est en l'utilisant qu'un mathématicien français vient de mettre le point final à la solution du problème des polygones convexes permettant de recouvrir le plan.**

## L'AUTEUR



**JEAN-PAUL DELAHAYE**  
professeur émérite  
à l'université de Lille  
et chercheur au Centre  
de recherche en  
informatique, signal  
et automatique de Lille  
(Cristal)

**D**ans le numéro d'octobre 2013 de *Pour la Science*, cette rubrique présentait l'extraordinaire histoire des pavages du plan par des pentagones convexes identiques.

Le statut du problème était alors incertain: après plusieurs annonces fausses de sa résolution et des efforts considérables, on ne savait pas si les 14 formes possibles identifiées constituaient une liste complète, ou si d'autres formes seraient découvertes.

Depuis, deux événements remarquables se sont produits: la découverte inattendue d'une quinzième forme et la mise au point d'une démonstration que la classification avec les 15 formes trouvées est complète. Le problème des pavages par pentagones convexes est ainsi résolu et, en corollaire, nous connaissons toutes les formes possibles polygonales convexes qui pavent le plan.

Précisons les termes. Les polygones convexes sont les formes du plan délimitées par des segments de droites dont on peut parcourir la frontière en tournant toujours vers la droite ou toujours vers la gauche (la convexité peut s'exprimer autrement: un polygone est convexe si, pour deux points quelconques A et B du polygone, le segment AB est entièrement contenu dans le polygone).

Des résultats anciens, dont certains sont assez faciles (voir l'article d'octobre 2013, «Les pavages pentagonaux: une classification qui s'améliore»), établissent que n'importe quel triangle, ou n'importe quel quadrilatère

(convexe ou non) pave le plan. Pour ce qui est des hexagones convexes, on sait qu'il existe 3 formes possibles pavant le plan. On sait aussi qu'aucun polygone convexe à 7 côtés ou plus ne pave le plan.

Pour connaître tous les polygones convexes qui pavent le plan, seul le cas des pentagones restait à régler... et ce ne fut pas simple!

## UNE HISTOIRE CHAOTIQUE

Nous ne reviendrons pas sur les amusantes péripéties des listes partielles de pentagones convexes dont des mathématiciens pressés et imprudents affirmèrent qu'elles étaient complètes, alors que quelque temps après on découvrait que c'était faux en exhibant des nouvelles formes inconnues, augmentant petit à petit la longueur de la liste à considérer.

Cette illusion répétée d'avoir traité le problème se produisit en 1918, 1968, 1975 et 1985. En 2013, on connaissait 14 formes, et nombre de spécialistes pensaient qu'il n'en existait pas d'autres. Ils avaient encore une fois tort: en 2015, à l'université de Washington, Casey Mann, Jennifer McCloud-Mann et David Von Derau découvrirent, en utilisant l'ordinateur, une quinzième forme de pentagone convexe pavant le plan (voir la page ci-contre).

Comme on était échaudé par les annonces répétées et fausses selon lesquelles on disposait de la liste complète, plus personne n'osait l'affirmer, mais cette fois c'était vrai: en 2017, Michaël Rao, chercheur du CNRS à l'École normale supérieure de Lyon, a prouvé qu'on ne trouverait jamais d'autres formes que les 15 connues. ➤

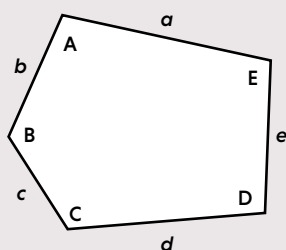


Jean-Paul Delahaye a récemment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

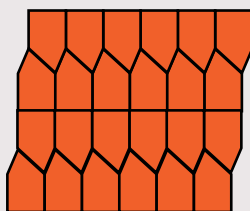
## LES 15 FORMES DE PENTAGONES CONVEXES QUI PAVENT LE PLAN

# 1

Le mathématicien français Michaël Rao vient de démontrer que les pentagones convexes pouvant paver parfaitement le plan se rangent en 15 classes. Chaque classe est définie par des relations entre les angles (notés A, B, C, D, E) et entre les longueurs des côtés (notées a, b, c, d, e).

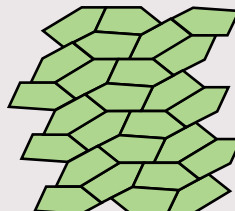


Type 1



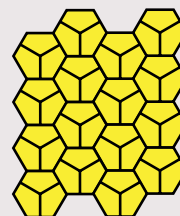
$$D + E = \pi$$

Type 2



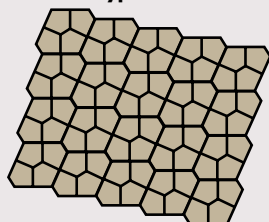
$$C + E = \pi \\ a = d$$

Type 3



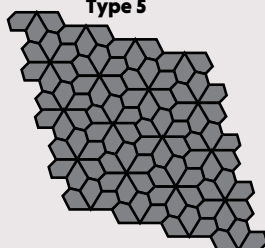
$$A = C = D = 2\pi/3 \\ a = b, d = c + e$$

Type 4



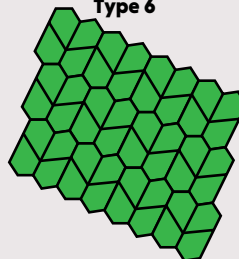
$$A = C = \pi/2 \\ a = b, c = d$$

Type 5



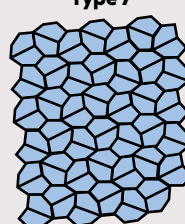
$$C = 2A = 2\pi/3 \\ a = b, c = d$$

Type 6



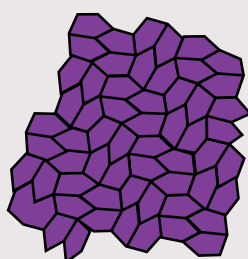
$$C + E = \pi, A = 2C \\ a = b = e, c = d$$

Type 7



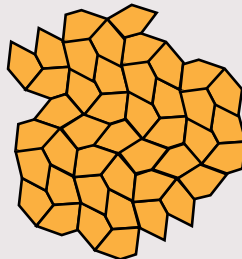
$$2B + C = 2\pi, \\ 2D + A = 2\pi \\ a = b = c = d$$

Type 8



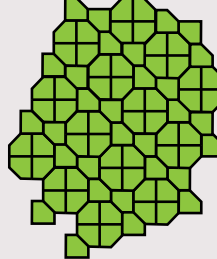
$$2A + B = 2\pi \\ 2D + C = 2\pi \\ a = b = c = d$$

Type 9



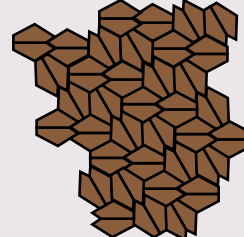
$$2E + B = 2\pi \\ 2D + C = 2\pi \\ a = b = c = d$$

Type 10



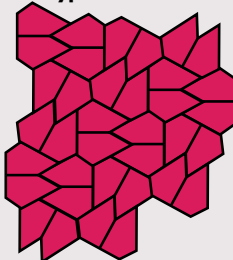
$$E = \pi/2, A + D = \pi \\ 2B - D = \pi, 2C + D = 2\pi \\ a = e = b + d$$

Type 11



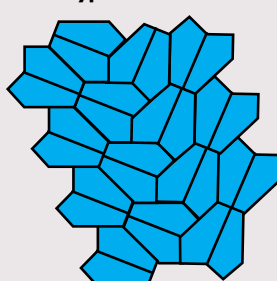
$$A = \pi/2, C + E = \pi \\ 2B + C = 2\pi \\ d = e = 2a + c$$

Type 12



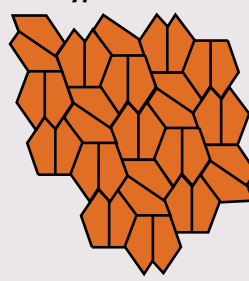
$$A = \pi/2, C + E = \pi \\ 2B + C = 2\pi \\ 2a = c + e = d$$

Type 13



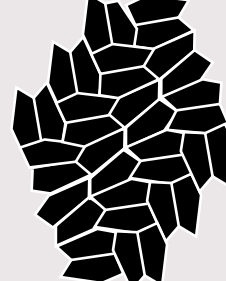
$$A = C = \pi/2, \\ 2B = 2E = 2\pi - D \\ c = d, 2c = e$$

Type 14



$$D = \pi/2, 2E + A = 2\pi \\ B + D + E = 2\pi, A + C = \pi \\ b = c = 2a = 2d$$

Type 15



$$A = \pi/3, B = 3\pi/4, C = 7\pi/12 \\ D = \pi/2, E = 5\pi/6 \\ a = 2b = 2d = 2e$$

- > Sa démonstration utilise un ordinateur, mais la partie humaine préparatoire aux calculs était délicate et personne avant Michaël Rao n'avait su la mener correctement. La démonstration a consisté à ramener l'exploration des cas possibles, qui *a priori* sont en nombre infini, à un nombre fini de cas.

### LA DÉMONSTRATION PROCÈDE EN QUATRE ÉTAPES.

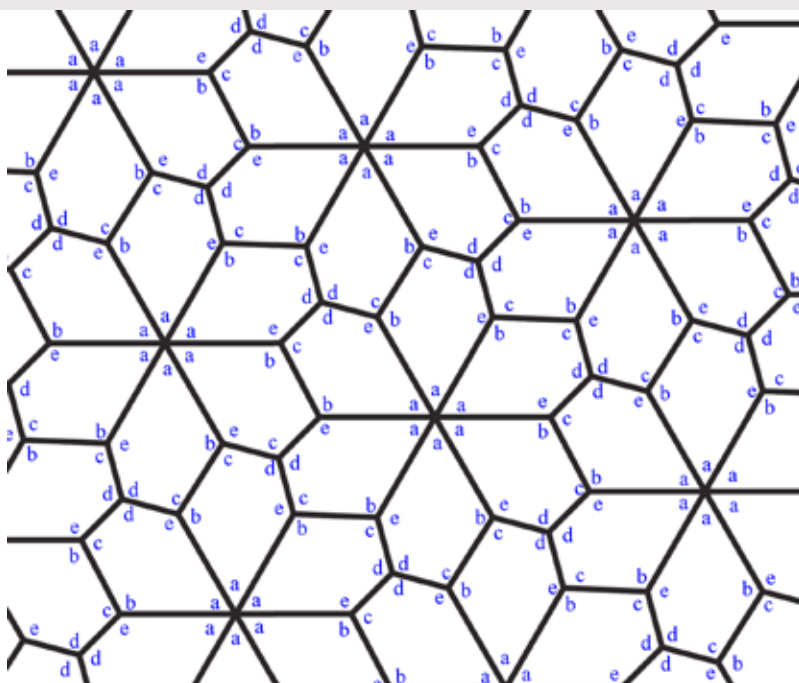
**Étape 1.** Michaël Rao prouve que «si une forme pentagonale convexe P pave le plan, alors elle peut le faire de telle façon que chaque type de sommet du pavage possède une densité positive dans le pavage».

# 2

## LES TYPES DE SOMMETS D'UN PAVAGE

**D**ans la démonstration de Michaël Rao, la classification des types de sommets présents dans un pavage joue un rôle important. Dans l'exemple dessiné ici, où les sommets du pentagone utilisé sont notés  $a, b, c, d, e$ , on observe qu'en un point du plan où plusieurs pentagones se rencontrent, il existe trois types différents de situations :  $(a, a, a, a, a)$ ,  $(b, c, e)$  et  $(d, d, d)$ .

Cet ensemble de 3 types de sommets est l'un des 371 ensembles différents qu'une recherche exhaustive par programme a produits. Après une exploration de chacun de ces 371 ensembles, on n'obtient que 15 formes de pavages différents par des pentagones convexes.



Expliquons cet énoncé. On désigne les 5 sommets du pavé P considéré par les lettres  $a, b, c, d$  et  $e$ . En certains points M du pavage, se rencontrent plusieurs des sommets du pentagone convexe P, par exemple  $b, c$  et  $e$ , qui proviennent des différentes versions de P placées autour de M. Cette suite de lettres définit un type de sommet du pavage. Dans un pavage donné, il y a plusieurs types de sommets. Par exemple (voir l'encadré 2), il peut y avoir les trois types de sommets  $(b, c, e)$ ,  $(d, d, d)$  et  $(a, a, a, a, a)$ . Cette représentation des types de sommets possibles permettra plus loin de ramener le nombre de cas à traiter, *a priori* infini, à un nombre fini de cas. On aurait pu imaginer qu'un type donné de sommets soit utilisé avec une densité décroissante et tendant vers zéro quand on s'éloigne du centre. Ce que dit le résultat de l'étape 1 du raisonnement de Michaël Rao est que cela ne se produit pas, au moins pour l'un des pavages du plan utilisant le pavé P: pour chaque type T de sommets à envisager, la proportion de sommets de type T dans un pavage utilisant N exemplaires de P sera supérieure à une constante.

**Étape 2.** Un ensemble de types de sommets pour un pavage donné du plan par des pentagones convexes, par exemple l'ensemble  $\{(b, c, e), (d, d, d), (a, a, a, a, a)\}$ , a une propriété algébrique particulière (notons-la Q) provenant de sa capacité à paver le plan avec une densité positive pour chaque type de sommets. Cette propriété Q est facile à tester par programme. Celui écrit par Michaël Rao a fait découvrir qu'il n'y a que 371 possibilités différentes pour ces ensembles de types de sommets.

**Étape 3.** Pour chacun des 371 cas repérés à l'étape 2, on tente d'une manière systématique de paver le plan. Michaël Rao utilise un second programme pour mener cette recherche. Le programme essaye de construire un pavage avec les conditions qu'on s'est fixées sur les angles, mais *a priori* sans conditions sur les côtés. Il explore les pavages possibles et doit faire des hypothèses sur les longueurs des côtés au cours de l'exploration. Si on aboutit à l'un des 15 cas connus, le programme ne va pas plus loin. En effet, on sait alors qu'on peut paver avec ce pentagone et que le motif sera périodique. Les pavages périodiques sont ceux où l'on peut extraire un ensemble fini de pavés et où, à l'aide de deux translations appliquées à ce sous-pavage, on obtient petit à petit le pavage entier.

Il est important de noter que dans le cas général, il existe des ensembles de formes pavant le plan mais qui ne le pavent que non périodiquement. Les ensembles connus de ce type comportent toujours au moins deux pavés différents. Les pavages de Penrose sont de ce type: ils pavent le plan, mais jamais périodiquement.

**Étape 4.** L'analyse des cas qui ont réussi et leurs regroupements (quand plusieurs cas

donnent des pavages équivalents) fournissent exactement les 15 formes de pavés pentagonaux convexes connus. Cela prouve que la classification avec les 15 formes est complète.

La méthode ne demande pas une puissance de calcul informatique considérable; elle aurait pu être menée depuis assez longtemps si quelqu'un l'avait imaginée avant Michaël Rao.

Dans cette recherche, on n'a pas supposé que le pavage était périodique. La méthode utilisée dans la démonstration et les calculs montrent donc qu'il n'y a pas de cas essentiellement non périodiques, autrement dit qu'il n'y a aucun pavé pentagonal convexe qui pourrait paver le plan uniquement de façon non périodique. Dit autrement encore: s'il existe un pavé qui pave le plan aperiodiquement et jamais de manière périodique (on dit «qui force la non-périodicité»), alors ce n'est pas un pentagone convexe.

L'une des grandes questions de la théorie mathématique des pavages est de savoir s'il existe un pavé qui, à lui seul, force la non-périodicité. Un tel pavé hypothétique qui forcerait la non-périodicité est dénommé *einstein*, non pas en l'honneur du célèbre physicien, mais parce que cela signifie «une pierre» en allemand (voir [https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_problem)). La démonstration de Michaël Rao montre donc que s'il existe un pavé *einstein*, ce n'est pas un pentagone convexe.

### DES QUESTIONS POSÉES PAR LA DÉMONSTRATION

La preuve a déjà été étudiée par plusieurs spécialistes de ce type de questions et une partie des calculs a été refaite par un programme différent écrit par Thomas Hales, dont nous allons reparler plus loin. Il a confirmé les 371 cas de l'étape 2. Le programme utilisé dans l'étape 3 a été simplifié et contrôlé, et il a toujours donné les mêmes résultats. Tout semble donc parfait. Cependant, plusieurs questions restent posées.

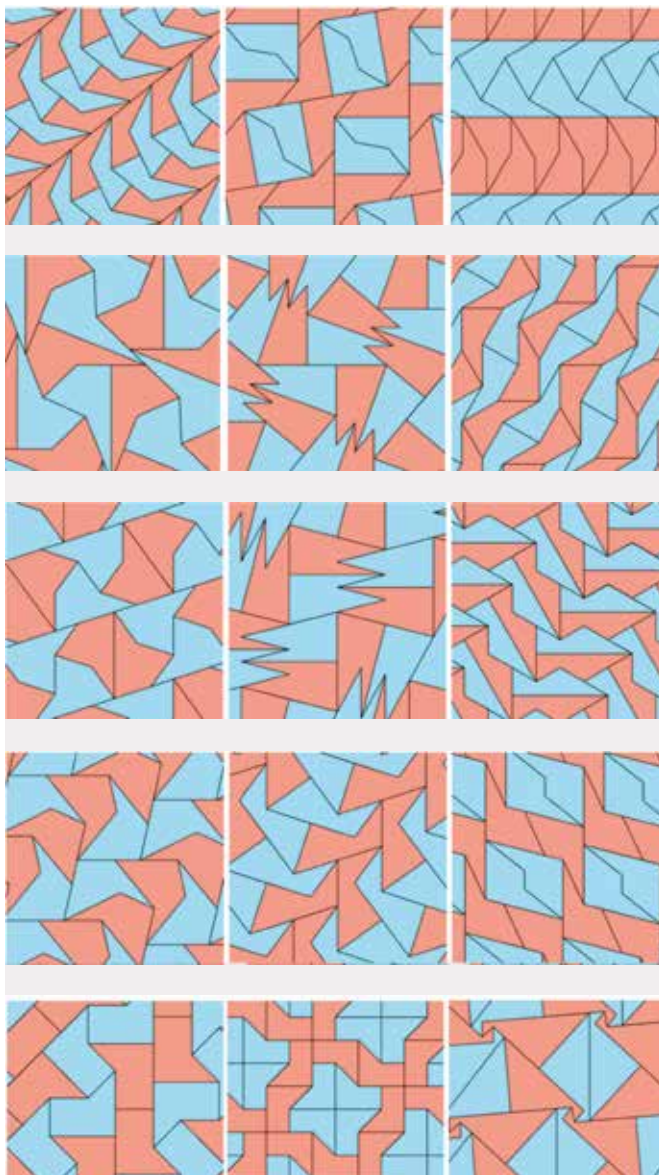
Pourra-t-on simplifier la preuve pour ne plus avoir à utiliser d'ordinateurs? Michaël Rao pense qu'il sera peut-être possible pour l'étape 2 de faire le travail sans ordinateur. Pour l'exploitation des 371 cas un à un, ce chercheur n'exclut pas l'idée qu'une armée de 100 ou 1000 mathématiciens consciencieux puisse mener le calcul et vérifier ce qu'a trouvé la machine. Il juge cependant que ce serait futile et inefficace, puisque, pour ce type de travail, la précision et la fiabilité de la machine sont meilleures que celles des humains. Les calculs sur une machine unique ont duré 40 heures; même si les humains trouveraient sans doute des raccourcis en procédant à la main, il en faudrait beaucoup, et de très déterminés!

Pourrait-on traduire la preuve en une preuve formellement vérifiable? Aujourd'hui, face à une preuve longue et complexe, on tente >

# 3

## DES PENTAGONES NON CONVEXES QUI PAVENT LE PLAN

**L**es images suivantes sont des pavages du plan par des pentagones non convexes. La variété des images suggère que le problème de leur classification est sans doute aussi délicat ou plus que celui résolu par Michaël Rao. Ces images proviennent du site d'un amateur de récréations mathématiques, Jaap Scherphuis (<https://www.jaapsch.net/tilings/>). Il propose bien d'autres exemples.



> d'en obtenir une version parfaitement formalisée qu'un ou plusieurs ordinateurs contrôlent en utilisant éventuellement des programmes différents, ce qui procure une garantie presque parfaite de correction. Des logiciels spécialisés nommés assistants de preuve, dont COQ de l'Inria, aident à l'écriture de ces preuves formelles. La méthode des preuves formelles est utilisée pour certifier des circuits et des programmes importants, par exemple en aéronautique. Ici, la mise au point d'une telle preuve permettrait de valider non seulement la partie calculatoire de la démonstration de Michaël Rao, mais aussi sa partie «humaine». Les programmes utilisés par le mathématicien ont été écrits dans le langage C++ et ont une longueur d'environ 5000 lignes. Assurer leur totale exactitude ne sera pas une mince affaire.

Le résultat de Michaël Rao concerne les pentagones convexes. Il est remarquable qu'on ne connaisse pas aujourd'hui de classification analogue pour les pentagones non convexes qui pavent le plan (voir l'encadré 3 pour des exemples). Le problème, d'énoncé simple, semble d'une grande difficulté. Les idées et méthodes de la démonstration de Michaël Rao pourront-elles

faire avancer cette version généralisée de la classification des pentagones pavant le plan?

À cette question, Michaël Rao répond: «La plupart des méthodes que j'ai utilisées peuvent être adaptées aux polygones à  $n$  côtés (pour un  $n$  fixé), et pas forcément convexes.» Il ajoute cependant: «Je ne me prononcerai pas sur la question d'une classification complète pour les polygones (pas nécessairement convexes) à  $n$  côtés (pour un  $n$  fixé). Il se pourrait qu'il y ait des comportements bizarres, et qu'on ait un nombre infini de types (conditions sur les angles et les côtés), alors qu'on a un nombre fini de familles (conditions sur les angles uniquement).» Il précise aussi qu'au départ, il s'intéressait au fameux problème de l'*einstein* et que ce n'est que dans un second temps, quand la quinzième forme a été découverte en 2015, qu'il a compris que la preuve de la classification complète des pentagones convexes pavant le plan était à sa portée. Il va continuer à travailler sur ces questions de pavages... sans doute en espérant être celui qui trouve en premier un *einstein*, ou qui montre qu'il n'en existe pas.

#### AUTRES PROGRÈS RÉCENTS CONCERNANT LES PENTAGONES

Parfois, un pentagone ne peut pas paver le plan. C'est ce qu'on démontre facilement pour le pentagone régulier, qui a 5 côtés égaux et 5 angles égaux. Reste alors à savoir comment placer un tel pentagone de manière optimale dans le plan, c'est-à-dire avec une densité aussi élevée que possible. Remarquons que ce problème de densité optimale est le plus simple qui soit non trivial pour les polygones réguliers. On sait en effet répondre à la question de la densité maximale pour les triangles équilatéraux, pour les carrés et même pour les hexagones réguliers... puisqu'ils pavent parfaitement le plan!

La figure ci-contre montre une façon de disposer des pentagones réguliers sur un plan qui semble assez bonne. Sa densité est de:

$$(5 - \sqrt{5})/3 \approx 0,921311.$$

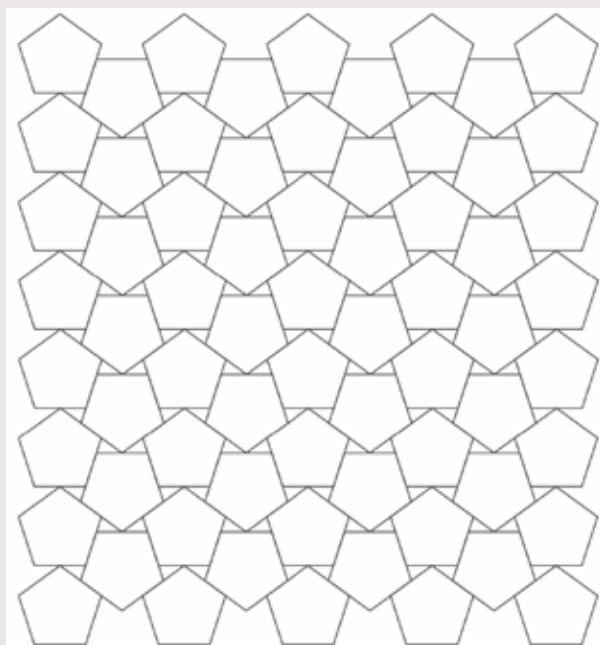
Autrement dit, la partie du plan non recouverte est inférieure à 8 % de la surface.

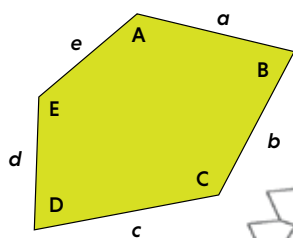
Est-ce la meilleure façon de disposer les pentagones? Ne peut-on pas les serrer les uns contre les autres encore mieux? L'affirmation que cette disposition est la plus dense possible constitue la «conjecture pentagonale de Henley». Elle est restée non résolue jusqu'en 2016. Elle n'est pas simple du tout, car les rangements possibles sont nombreux et délicats à comparer si l'on veut être certain de ne laisser échapper aucune éventualité. Les dispositions optimales pourraient être très complexes et, par exemple, ne pas être périodiques. Cela se produit en effet pour d'autres problèmes du même type: quand on cherche la disposition de densité optimale pour deux pavés de Penrose, la solution est un pavage non périodique.

# 4

## LE PAVAGE OPTIMAL PAR UN PENTAGONE RÉGULIER

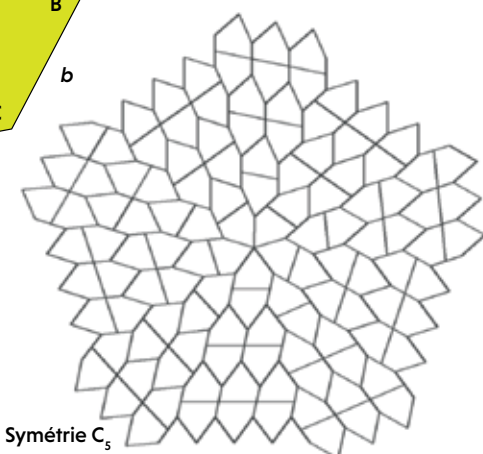
**D**isposer des pentagones réguliers identiques de façon que la surface non recouverte soit aussi réduite que possible est loin d'être simple. Que la disposition représentée ci-dessous soit la meilleure est vrai, mais il aura fallu attendre 2016 pour le démontrer. La preuve s'étale sur un article de 60 pages, mais elle a aussi nécessité l'utilisation de plusieurs programmes informatiques.



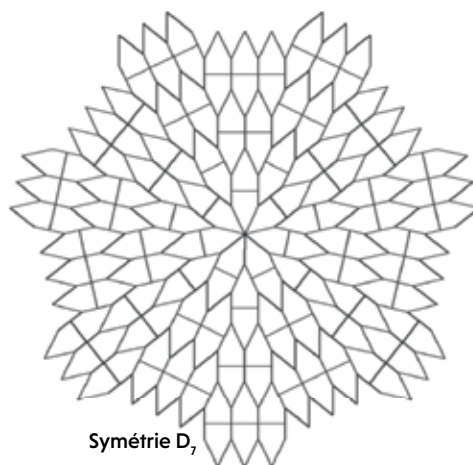


$$D + E = 180^\circ, \\ B = 72^\circ$$

$$C = 180^\circ - B/2 \\ D = 90^\circ$$



Symétrie  $C_5$



Symétrie  $D_7$

# 5

## DES PENTAGONES POUR DES PAVAGES EN ÉTOILE

**A**ssembler des copies d'un même pentagone pour obtenir un pavage étoilé complet du plan semble difficile. Pourtant, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 3, il existe un pavé qui donnera un pavage étoilé à  $k$  branches.

Selon qu'on souhaite que le pavage ait des axes de symétrie ou

non, deux types de solutions sont possibles.

Nommons A, B, C, D, E les angles internes du pentagone considéré et  $a, b, c, d, e$  les longueurs de ses côtés. Soit  $k \geq 3$  un entier. Si les angles A, B, C, D et E sont inférieurs à  $180^\circ$ , que  $b = c = a + d$  et  $D + E = 180^\circ$ , que B et

C divisent  $360^\circ$  et que  $B = 360^\circ/k$ , alors il est possible de paver le plan avec la symétrie  $C_k$  (invariance uniquement par des rotations).

Si, de plus, on a  $C = 180^\circ - B/2$  et  $D = 90^\circ$ , alors on peut paver le plan avec la symétrie  $D_k$  (invariance par des rotations et des symétries axiales).

La conjecture de Henley vient d'être démontrée par Thomas Hales et Wöden Kusner. Thomas Hales, professeur à l'université de Pittsburgh, aux États-Unis, est connu pour avoir résolu la conjecture de Kepler qui indique la façon la plus dense d'empiler des sphères dans l'espace, et Wöden Kusner est actuellement à l'université de Vanderbilt. L'article qui prouve la conjecture de Henley comporte 60 pages, mais il se réfère, comme celui de Michaël Rao, à plusieurs programmes mis en œuvre pour aboutir au résultat. Qui aurait soupçonné il y a un siècle que la géométrie exigerait l'aide de machines ?

### PENTAGONES POUR PAVAGES EN ÉTOILE

Terminons notre promenade géométrique en évoquant un résultat inattendu et esthétique. La question que s'est posée Bernhard Klaassen, de l'institut Fraunhofer SCAI, en Allemagne, est la suivante : pour quelle valeur de l'entier  $k \geq 3$  peut-on trouver des pavés pentagonaux qui pavent le plan de manière étoilée, c'est-à-dire en disposant les pavés autour d'un centre de telle façon que le pavage soit invariant par rotation de  $2\pi/k$  ? Pour chaque  $k$ , il existe deux variantes du problème. Soit la rotation de  $2\pi/k$ , une ou plusieurs fois, est la seule façon de retrouver le pavage, auquel cas on

parle de symétrie  $C_k$ . Soit, en plus de la rotation, la symétrie par rapport à certaines droites passant par le centre laisse aussi le pavage invariant, auquel cas on parle de symétrie  $D_k$  (voir l'encadré ci-dessus).

Bernhard Klaassen a trouvé une famille de pentagones qui autorisent un pavage avec symétries  $C_k$  ou  $D_k$  pour tout  $k \geq 3$ . Voici sa solution. Notons A, B, C, D et E les angles internes du pentagone considéré et  $a, b, c, d, e$  les longueurs des côtés du pentagone. On impose les propriétés suivantes : tous les angles internes sont inférieurs à  $180^\circ$  ;  $b = c = a + d$  ;  $D + E = 180^\circ$  et C divise  $360^\circ$  ainsi que B.

Le théorème est alors le suivant :

Pour tout entier  $k \geq 3$  et tout pentagone possédant les propriétés énoncées avec  $B = 360^\circ/k$ , il est possible de paver le plan avec la symétrie  $C_k$ . De plus, si  $C = 180^\circ - B/2$  et  $D = 90^\circ$ , alors on peut paver le plan avec la symétrie  $D_k$ . On remarque qu'en prenant une solution et en accolant correctement les pentagones par deux, on obtient un pavage par des hexagones : la solution trouvée pour les pentagones donne donc du même coup une solution pour les hexagones.

N'est-il pas étonnant qu'il ait fallu attendre 2016 et 2017 pour résoudre ces questions assez simples concernant les polygones, et que pour deux des trois résultats mentionnés ici, l'ordinateur ait été nécessaire ? ■

### BIBLIOGRAPHIE

M. Rao, **Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane**, <http://perso.ens-lyon.fr/michael.rao/publi/penta.pdf>, 2017.

N. Wolchover, **Pentagon tiling proof solves century-old math problem**, *Quanta*, 11 juillet 2017 (traduction française : <http://bit.ly/2xEmaBS>).

B. Klaassen, **Rotationally symmetric tilings with convex pentagons and hexagons**, *Elemente der Mathematik*, vol. 71, pp. 137-144, 2016 (<https://arxiv.org/pdf/1509.06297.pdf>).

T. Hales et W. Kusner, **Packings of regular pentagons in the plane**, <https://arxiv.org/pdf/1602.07220.pdf>, 2016.

C. Mann et al., **Convex pentagons that admit i-block transitive tilings**, <https://arxiv.org/pdf/1510.01186.pdf>, 2015.