LOGIQUE & CALCUL

Les surprises du jeu de pile ou face

Les erreurs de nos jugements spontanés sont parfois étonnantes. Le hasard créé par les lancers d'une pièce de monnaie en est l'exemple le plus frappant : tout y semble paradoxal.

Jean-Paul DELAHAYE

Les suites de piles ou faces obtenues avec une pièce non truquée nous semblent sans grand mystère et nous ne doutons guère de nos prédictions statistiques. Ce faisant, nous ignorons une multitude de subtilités, ignorance qui nous conduit à l'erreur, voire nous ferait perdre de l'argent en cas de paris. Comprendre pourquoi et tirer toutes les leçons des pièges tendus à la raison par ces suites de tirages équitables et indépendants est un travail délicat et difficile comme l'attestent les dizaines d'articles publiés depuis 40 ans sur ce sujet.

Un premier exemple de piège, dont l'idée a été proposée en 1969 par l'amateur de récréations mathématiques Walter Penney, consiste à lancer une pièce de monnaie (non truquée) autant de fois qu'il le faut jusqu'à obtenir des séquences de piles ou faces fixées à l'avance. On cherche par exemple à obtenir la séquence pile-face, notée PF, ou face-face, notée FF. La question posée est : laquelle a le plus de chances de se présenter en premier, et combien est-il raisonnable de parier sur elle ?

Raisonnement A. Considérons deux tirages successifs d'une pièce de monnaie ; il y a autant de chances d'obtenir PF que FF, et cette probabilité est $(1/2)^2 = 1/4$. Les deux séquences PF et FF étant équiprobables, chacune a la même probabilité de sortir en premier, et la probabilité que PF survienne avant FF est donc 1/2. Les deux séquences mises en compétition partant sur des bases égales, si l'on nous propose de parier, nous pouvons choisir indifféremment l'une ou l'autre et miser 1 euro contre 1 euro.

Or la réalité est bien différente : dans une compétition entre PF et FF, la séquence PF gagnera trois fois sur quatre. Il est donc intéressant d'accepter de miser 2 euros pour PF contre 1 euro en faveur de FF ; un pari ne favorisant aucun joueur consiste à miser 3 euros pour PF contre 1 pour FF. Voici la démonstration de ces affirmations.

Raisonnement B. Les deux premiers tirages peuvent être PF, FP, PP ou FF. Ces quatre débuts possibles sont équiprobables, chacun survenant avec une probabilité 1/4. Si c'est FF qui sort, la séquence FF aura gagné la compétition. Dans les trois autres cas, la gagnante sera toujours PF. En effet, dès qu'un P tombe, FF ne peut plus sortir avant PF : tant que des P continuent de tomber, aucune ne gagne, et dès que F tombe, PF gagne. Si l'on vous propose ce jeu, choisissez PF : vous gagnerez trois fois sur quatre.

Où est l'erreur dans le raisonnement A ? Sa première phrase est indubitable. Elle implique d'ailleurs que dans une longue séquence de P ou F tirée avec une pièce de monnaie non truquée, il y aura en moyenne autant de couples PF que de couples FF. L'erreur est dans la seconde phrase : « Les deux séquences PF et FF étant équiprobables, chacune a la même probabilité d'être obtenue en premier, et donc, la probabilité que PF survienne avant FF est 1/2. » En effet, même si les deux séquences sont équiprobables, les relations qu'elles entretiennent, comme le détaille le raisonnement B, ont pour conséquence que dès qu'un P est tombé, FF ne peut plus gagner, ce qui entraîne alors que la séquence PF apparaîtra en premier trois fois plus souvent que FF.

Le même type de blocage d'une séquence par une autre montre que si l'on oppose PFF à FFF, la première séquence gagne sept fois sur huit. Plus généralement, si l'on oppose PF...F (($n-1$) fois F) à FF...F (n fois F), alors la première séquence gagne ($2^n - 1$) fois sur 2^n : nous ne devons donc pas hésiter à parier 1 000 euros contre 1 euro en choisissant PFFFFFFFFF contre FFFFFFFFFF.

Si votre doute persiste, opérez un contrôle expérimental avec une pièce de monnaie, en programmant une simulation avec votre ordinateur ou encore en associant P aux décimales impaires de π et F aux décimales paires (*voir la série illustrée ci-dessus et ci-contre*). Dans ce dernier cas, vous pouvez commencer la série

avec 3, avec 1, avec 4, etc. J'avoue avoir fait un tel test pour m'assurer que, lors d'une longue série de tirages, le nombre moyen de FF est le même que le nombre moyen de PF, ce que je n'arrivais pas à considérer comme compatible avec la probabilité de gain de 3/4 en faveur de PF. Le test a bien évidemment donné le résultat décrit par la théorie, pour la fréquence égale de PF et de FF, et celui du raisonnement B, pour le 3/4 en faveur de PF dans une compétition.

Le petit calcul énumératif suivant ne constitue pas une preuve (elle est dans le raisonnement B !), mais il vous aidera sans ordinateur à accepter l'étrange compatibilité entre les diverses affirmations que nous avons formulées. Considérons les 16 séquences possibles et équiprobables qu'on obtient en opérant quatre tirages :
PPPP-PPPF-PPFP-PPFF-PFPP-PFPF-PFFP- PFFF
FPPP-FPPF-FPFP-FPFF-FFPP-FFPF-FFFP-FFFF.

La séquence FF est présente 12 fois comme la séquence PF ; il y a donc bien égalité des fréquences, et FF (ainsi que PF) apparaît dans un quart des 48 couples obtenus avec les 16 tirages de longueur 4. Entre FF et PF, quelle séquence arrive en premier ? On constate que PF gagne 10 fois *(en vert)* alors que FF ne gagne que 4 fois *(en rouge)*. Dans deux cas (PPPP et FPPP), aucune séquence n'a gagné et les tirages doivent donc se poursuivre ; PF gagnera alors nécessairement, puisque les deux séquences indéterminées se terminent par un P, ce qui interdit mécaniquement à FF d'apparaître avant PF. Au total, on trouve donc que PF gagne exactement trois fois sur quatre.

Si l'on envisage les autres compétitions entre séquences de longueur 2, les résultats, faciles à établir (car résultant de symétrie ou se ramenant à la compétition FF contre PF), sont les suivants :
PP gagne contre PF avec une probabilité 1/2,
PP gagne contre FP avec une probabilité 1/4,
PP gagne contre FF avec une probabilité 1/2,
PF gagne contre FP avec une probabilité 1/2,
PF gagne contre FF avec une probabilité 3/4,
FP gagne contre FF avec une probabilité 1/2.

Le temps moyen d'attente

Malheureusement, les cas particuliers que nous venons d'envisager ne nous permettent pas de savoir ce qui se passe quand on oppose deux séquences quelconques, par exemple PFP et FFF. La notion de temps moyen d'attente devrait nous aider. Une séquence S étant fixée, on nomme temps moyen d'attente de S le nombre moyen de fois qu'il faut lancer la pièce pour que S se présente. Par exemple, le temps moyen d'attente de P (ou de F) est 2 *(voir l'encadré 1)*.

Deux séquences S et S' de longueur *k* ont la même probabilité de se produire quand on lance *k* fois la pièce ; elles apparaissent donc avec la même fréquence quand on lance indéfiniment la pièce. On est tenté d'en déduire que les temps moyens d'attente de S et de S' sont égaux. Pourtant, comme dans le cas des compétitions entre deux séquences, ce serait une erreur : le temps moyen d'attente de FF est 6, alors que le temps moyen d'attente de PF est 4.

Cette surprise va cependant dans le même sens que la précédente, quand nous opposions FF à PF. Puisque FF apparaît en moyenne plus tardivement dans une suite de lancers que PF, il semble assez naturel que FF se fasse battre par PF quand on cherche à savoir laquelle arrive le plus souvent en premier. Peut-on déduire le 3/4 de tout à l'heure en faveur de PF, des temps d'attente moyens 6 et 4 ? Cela ne semble pas bien clair et si nous voulions chercher une règle nous ne la trouverions jamais : ici encore, un phénomène inattendu contrarie notre intuition et rend illusoire la déduction du 3/4 à partir des temps d'attente moyens. En effet, il se peut très bien que le temps d'attente moyen d'une séquence S_1 soit plus long que le temps d'attente d'une séquence S_2 et que, pourtant, dans une compétition entre S_1 et S_2, la séquence S_1 se présente plus souvent avant S_2 que l'inverse.

L'exemple le plus simple d'une telle situation paradoxale est donné par les deux séquences S_1 = PFPF et S_2 = FPFF. La séquence S_1 a un temps d'attente de 20, alors que S_2 a un temps d'attente de 18. Pourtant, S_1 arrive devant S_2 avec une probabilité égale à 9/14, soit 0,6428.

Les trois notions « fréquence d'apparition », « temps moyen d'attente » et « gagnant d'une compétition entre deux séquences », que nous lions intuitivement quand nous comparons deux séquences, sont en réalité indépendantes !

Intransitivité

Résumons la situation multiparadoxale à laquelle nous sommes parvenus :
(a) Deux séquences de longueur égale ont la même probabilité de survenir en un emplacement donné d'une suite infinie de tirages ; leurs fréquences moyennes d'apparition sont donc les mêmes.

Pourtant :
(b) Il se peut que l'une d'elles survienne plus souvent avant l'autre dans une compétition entre elles.
(c) Il se peut qu'elles aient des temps d'attente différents.

De plus, et cela paraît un comble :
(d) Il est possible que celle qui arrive statistiquement le plus tardivement soit, en moyenne, plus souvent devant l'autre quand on les fait concourir l'une contre l'autre.

Les comportements contre-intuitifs des suites de tirages à pile ou face vont encore plus loin :
(e) Une séquence plus courte peut perdre dans une compétition qui l'oppose à une séquence plus longue ; tel est le cas quand

1. Surprise pour le temps moyen d'attente

Quand on lance deux fois une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir FF est la même que la probabilité d'obtenir PF et vaut 1/4. En lançant indéfiniment la pièce, la fréquence d'apparition de FF sera 1/4, de même que pour PF. On est tenté d'en déduire que, quand on lance une pièce de monnaie indéfiniment, on attend en moyenne autant de temps pour obtenir FF que PF. C'est faux : le temps moyen d'attente de FF est de six lancers alors que le temps moyen d'attente de PF est de quatre lancers. Cela choque l'intuition et paraît même impossible !


Jean-Michel Thiriet

Pour se persuader de l'exactitude de nos affirmations, on peut mener une vérification expérimentale, ou raisonner.

Exemple 1. Le temps d'attente moyen de la séquence P (une fois pile) est 2. En effet :

– Une fois sur deux, on obtient P dès le premier tirage (temps d'attente égal à 1). Dans la moyenne, on a donc 1 avec un poids 1/2.

– Une fois sur quatre, on a le début FP, et le temps d'attente a donc été 2. Dans la moyenne, on a 2 avec un poids 1/4.

– Une fois sur huit, on a le début FFP. Dans la moyenne, on a donc 3 avec un poids 1/8 ; etc.

Le temps d'attente moyen de P est la somme de la série :

$1/2 + 2 \times 1/4 + 3 \times 1/8 + 4 \times 1/16 + \ldots$ Cette série se calcule à partir de la série géométrique classique $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1$.

$$
\begin{array}{lllll}
1/2 + 2 \times 1/4 + 3 \times 1/8 + 4 \times 1/16 + \ldots = \\
1/2\ + & 1/4\ + & 1/8\ + & 1/16 + \ldots \\
+ & 1/4\ + & 1/8\ + & 1/16 + \ldots \\
 & + & 1/8\ + & 1/16 + \ldots \\
 & & + & 1/16 + \ldots
\end{array}
$$

La première ligne vaut 1, la deuxième 1/2 (c'est la première divisée par 2), la troisième 1/4 (c'est la première divisée par 4), etc. Le tout vaut ainsi $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 2$.

Exemple 2. Calculons maintenant le temps moyen d'attente T de la séquence FF. En envisageant les deux possibilités pour le premier tirage, on a :

T = 1/2 × (temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F) + 1/2 × (temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné P).

Le temps moyen d'attente de FF quand le premier tirage a donné P est bien sûr une unité de plus que le temps moyen d'attente de FF, car quand on a obtenu P en premier, on a perdu un coup : le P obtenu ne sert à rien et ne servira pas. Le second terme de la somme est donc 1/2 × (1 + T).

Pour le premier terme, on écrit que le temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F est égal à 1/2 × (temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F et le second a donné F) + 1/2 × (temps moyen d'attente de FF si le premier tirage a donné F et le second P).

La première grande parenthèse vaut évidemment 2. Quant à la seconde, en raisonnant comme précédemment, on voit qu'elle vaut (2 + T). En regroupant ce que nous venons d'obtenir, on a : $T = 1/2 \times [1/2 \times 2 + 1/2 \times (2 + T)] + 1/2 \times (1 + T)$, ce qui, après résolution, donne T = 6.

Exemple 3. Par la même méthode, en utilisant le résultat de l'exemple 1, on obtient que le temps d'attente moyen T′ de PF vérifie :

T′ = 1/2 × (temps moyen d'attente de PF si le premier tirage a donné P) + 1/2 × (temps moyen d'attente de PF si le premier tirage a donné F) = 1/2 × (1 + temps moyen d'attente de F) + 1/2 × (1 + T′) = 1/2 × (1 + 2) + 1/2 + T′/2. On en déduit que T′ = 4.

on oppose PPP et FFPP, car la seconde gagne avec une probabilité 7/12.

(f) Des séquences peuvent avoir des chances égales de gagner dans une compétition à quatre (25 % de chance chacune) et pourtant, dans des compétitions deux à deux, être toujours inégales.

Ainsi, les séquences PPF, PFF, FPP et FFP gagnent chacune dans 25 % des cas quand on les fait concourir toutes les quatre ensemble, mais ne font jamais jeu égal quand on les oppose deux à deux.

(g) Il se peut que dans des compétitions deux à deux, on obtienne des cycles du type (S_1 bat S_2, S_2 bat S_3, ..., S_{n-1} bat S_n, mais S_n bat S_1). Un tel cycle est obtenu avec les quatre séquences PPF, PFF, FFP et FPP *(voir l'encadré 3)* :

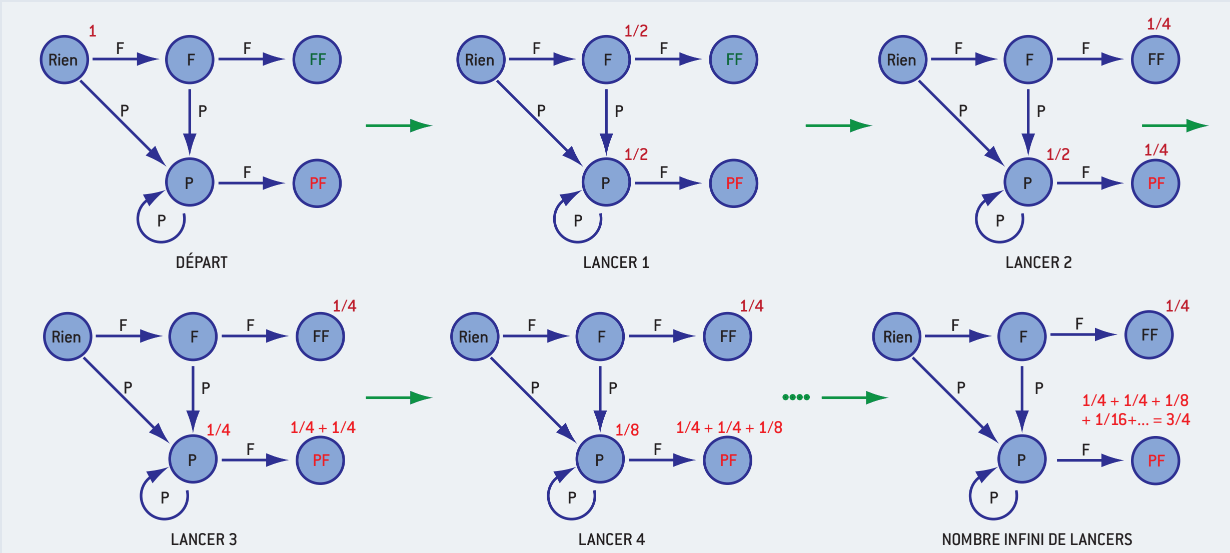
PPF bat PFF avec une probabilité 2/3,
PFF bat FFP avec une probabilité 3/4,
FFP bat FPP avec une probabilité 2/3,
FPP bat PPF avec une probabilité 3/4.

Corriger les fausses simplicités

Nous avons donc affaire à un paradoxe de non-transitivité : l'intuition nous souffle que chaque séquence possède une force propre qui lui permet de se présenter en tête devant une autre séquence et que, donc, si S_1 est plus forte que S_2 et S_2 plus forte que S_3, alors nécessairement S_1 est plus forte que S_3. C'est une illusion, car une séquence peut-être « forte » devant une deuxième et « faible » devant une troisième. En sport et dans les problèmes d'élection, de telles situations se produisent aussi.

Les encadrés expliquent comment mener les calculs qui vous permettront de vérifier ce qui vient d'être affirmé. L'examen attentif de ces méthodes affine notre compréhension et corrige nos jugements spontanés, dont l'inadéquation est flagrante. En relisant le raisonnement B présenté plus haut et en le comprenant, on finit par accepter que PF gagne contre FF et que, finalement... cela n'aurait pas dû nous étonner. De même, la méthode des graphes d'états *(voir l'encadré 2)* conduit à saisir clairement pourquoi PPF bat par exemple PFF. Plus généralement, elle permet de visualiser le rapport de force entre séquences et de comprendre (et calculer) que ce rapport se

2. La méthode des graphes d'états



Deux séquences de P et de F étant données, par exemple PF et FF, on lance une pièce de monnaie jusqu'à ce que l'une se présente. Ce sera la gagnante. Contrairement à ce que le bon sens suggère, la séquence PF gagnera plus souvent (trois fois sur quatre en moyenne) que la séquence FF.

Pour le prouver, un raisonnement direct est possible *(voir le texte)*, mais la méthode des graphes d'états présentée ici se généralise à tout couple de séquences et même à des compétitions entre *k* séquences. C'est elle qui permet de déterminer (sans simulation) les probabilités de gains de ce type de compétitions.

On dessine un graphe dont les nœuds sont tous les débuts possibles de l'une des séquences en compétition. On relie le nœud N au nœud N' si N est le début de N'. Grâce à ce graphe, on calcule les probabilités des différentes situations, lancer après lancer, en opérant un suivi de la probabilité que chaque nouveau tirage fait avancer sur le graphe.

• Au départ, il n'y a aucun P ou F connu : avec une probabilité égale à 1, nous nous trouvons dans l'état « Rien ».

• Après un lancer, le 1 initial s'est séparé en deux fois 1/2, qui se trouvent sur les états P et F. Cela signifie qu'après un lancer, on a une chance sur deux d'être dans l'état P et autant pour l'état F.

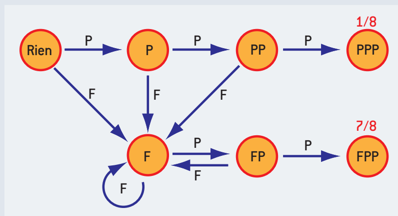
• Après le second lancer, la probabilité 1/2 de l'état F s'est scindée en deux fois 1/4. Le premier 1/4 est allé se placer sur FF qui, maintenant, est marqué par 1/4. L'état P a donné la moitié de sa valeur à l'état PF (marqué maintenant par 1/4) et l'autre moitié de sa valeur à lui-même, ce qui, en additionnant avec le 1/4 qui vient de l'état F, donne une probabilité 1/2 pour PF. Ces marques correspondent aux probabilités qu'on a, après deux lancers, de se trouver dans les états notés sur le graphe.

La circulation des probabilités marquées sur les nœuds du graphe se poursuit selon les mêmes règles : chaque valeur est coupée en deux et va vers les nœuds voisins en suivant les flèches. Cela donne ainsi, lancer après lancer, les probabilités *(en rouge)* de se trouver dans un état ou un autre. Bien sûr, quand une probabilité arrive sur l'une des séquences en compétition, elle n'en bouge plus. Bien sûr aussi, lors de ces calculs et quelle que soit l'étape, la somme des probabilités placées sur les nœuds marqués vaut 1.

Il est clair ici que le 1/4 de FF ne changera plus, et que les 3/4 restants vont peu à peu arriver sur PF qui, à l'infini, sera donc marqué par 3/4. L'état du graphe à l'infini indique les probabilités respectives de gain des séquences PF et FF : 1/4 et 3/4.

Appliquée au graphe ci-contre, la méthode permet de savoir très rapidement que PPP ne gagne qu'avec une probabilité de 1/8 contre FPP (seul 1/8 de la probabilité arrive sur PPP, et le reste finit donc sur FPP, car on continue à jouer tant que l'on n'a pas une des deux séquences). Dans le cas de graphes très compliqués, l'étude de la circulation des probabilités d'un nœud à l'autre devient difficile à suivre. Cependant, elle se ramène à un problème classique d'algèbre linéaire qu'on sait parfaitement traiter, et donc la méthode des graphes d'états est générale pour connaître les probabilités respectives de gains quel que soit le nombre de séquences en compétition.

Il est intéressant de noter que la circulation des probabilités dans le graphe d'états fonctionne selon un principe identique à celui utilisé par le moteur de recherche *Google* pour attribuer des notes *PageRank* aux pages du Web, notes qui déterminent les rangs d'affichage des pages quand vous soumettez une requête. Au départ, une note égale est attribuée à chaque page ; à chaque étape de redistribution, cette note est fractionnée et passe aux pages citées (ce qui permet aux pages souvent citées d'avoir de bonnes notes). Quelques itérations – et non pas une infinité – de ce procédé de redistribution de *PageRank* conduisent à une valeur satisfaisante de la valeur de notoriété d'une page. Ce procédé itératif peut se paralléliser facilement et fonctionne donc même avec des milliards de pages à noter.



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

construit à partir de la structure des deux séquences, et qu'il n'y a pas de force propre à une séquence indépendante des compétitions à laquelle on la soumet.

Connaître la fréquence de survenue d'une séquence S_1 et son temps moyen d'attente ne suffit pas pour prédire sa force quand elle sera confrontée une autre séquence S_2, car cette force se décide face à S_2 et est spécifique de la compétition particulière S_1 contre S_2, contrairement à ce que notre jugement premier nous faisait croire. L'explication de l'inadéquation de nos appréciations spontanées est sans doute à rechercher dans l'expérience que nous avons des nombreuses situations où la force d'un concurrent dans une compétition provient d'une aptitude qu'il possède en propre (par exemple, en course à pied, son aptitude à aller vite) et qui n'est pas liée aux adversaires qu'il affronte.

Mener le calcul pour savoir qui gagne est un travail délicat par la méthode des graphes d'états. Peut-on arriver au résultat plus rapidement ? Un algorithme miraculeux de John Conway détermine le temps moyen d'attente d'une séquence et la probabilité de gagner d'une séquence par rapport à une autre *(voir l'encadré 4)*.

On ne comprend pas pourquoi l'algorithme de Conway, d'une simplicité déroutante, donne la bonne réponse ... comme bien d'autres résultats de J. Conway. Ce mathématicien n'a jamais publié la preuve que son algorithme calcule convenablement (cela ne signifie pas qu'il n'en connaissait pas). Des démonstrations ont été publiées, dont aucune n'est simple. Nous disposons, grâce au génie de J. Conway, d'un procédé assez rapide pour savoir qui gagne dans une compétition à deux et les temps moyens d'attente. Toutefois, à ma connaissance, il n'existe pas d'algorithme équivalent pour savoir qui gagne dans une compétition entre trois séquences ou plus.

Choisir à tour de rôle

Avec les suites de P ou F, on peut jouer ou parier. La méthode consistant à proposer la séquence perdante (par exemple FF) alors que vous vous réservez la bonne (PF) risque de susciter la méfiance. Mieux vaut laisser choisir une séquence, puis choisir ensuite une autre séquence de même longueur qui vous fera gagner.

Comment, face à une séquence S donnée, déterminer une séquence qui batte S ? Un examen systématique de toutes les séquences et la comparaison de chaque possibilité avec l'algorithme de Conway donnerait le résultat. De tête, le calcul serait compliqué, voire impossible, si le premier joueur a choisi une séquence de plus de dix piles ou faces. Apprendre par cœur le tableau des probabilités de gains (calculé à l'avance) n'est pas plus envisageable, même en se limitant aux séquences de taille inférieure à cinq. Comment s'y prendre ?

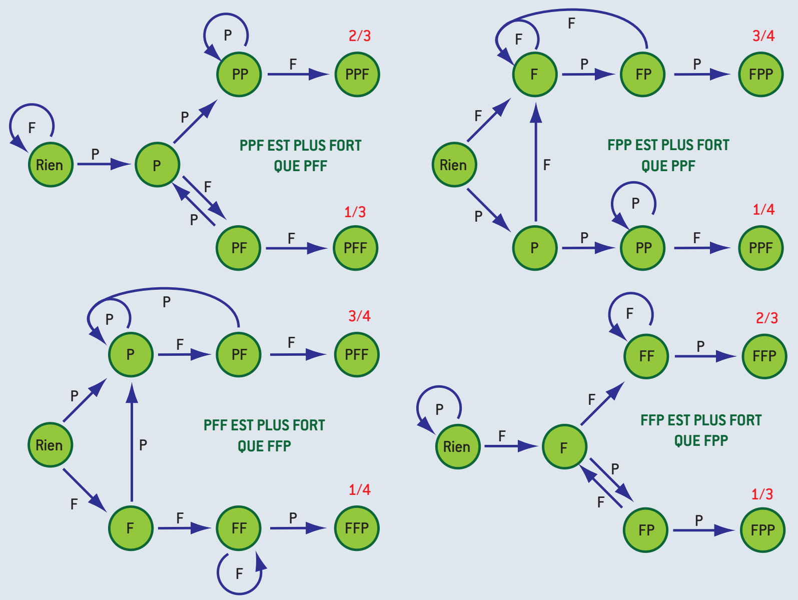
3. La non-transitivité de la relation de force

L'examen des quatre graphes d'états correspondant aux compétitions PPF–PFF, PFF–FFP, FFP–FPP et FPP–PPF indique qu'à chaque confrontation, la première séquence bat la seconde : nous avons donc un cycle paradoxal.

Le 2/3 en faveur de PPF contre PFF se justifie de la manière suivante en utilisant la méthode du graphe d'états. Au départ, on place 1 sur le nœud *Rien*. On suit ce que devient ce 1, lancer après lancer. Malgré la flèche du nœud *Rien* vers lui-même, toute la probabilité 1 se retrouve à la limite sur le nœud P. Celui-ci distribue 1/2 à PP qui finit par l'envoyer sur PPF. Le nœud P distribue aussi 1/2 à PF, qui en envoie la moitié (c'est-à-dire 1/4) à PFF. Le 1/4 que PF renvoie à P sera renvoyé pour moitié (1/8) à PP et pour moitié à PF, qui en enverra la moitié à PFF (1/16), etc. Le nœud PFF au total recevra donc 1/4 + 1/16 + 1/64 +... = 1/3 (somme des termes d'une suite géométrique). Bien sûr tout le reste, c'est-à-dire 2/3, arrive sur PPF.

Le résultat 3/4 en faveur de PFF quand il est opposé à FFP est plus facile encore à justifier, puisque le nœud FF ne reçoit que 1/4 en tout.

Les deux autres graphes d'états sont identiques aux deux premiers à des changements de noms près, et donc se ramènent aux deux premiers. Le cycle est entièrement justifié.



4. L'algorithme magique de John Conway

John Conway a conçu un algorithme qui, sans utiliser la méthode des graphes d'états, indique le résultat des confrontations d'une séquence contre une autre et cela quelles que soient leurs complexités et leurs longueurs.

Considérons par exemple les séquences

A = PFPP et **B** = PPFF.

Plaçons **A** au-dessus de **B** :

A PFPP
B PPFF

Si les séquences coïncident, écrivons 1 sur les séquences ; sinon, écrivons 0, comme c'est le cas ici :

0
A PFPP
B PPFF

Comparons maintenant les trois derniers symboles de la première séquence (FPP) avec les trois premiers de la seconde (PPF). Si ces sous-séquences coïncident, on ajoute un 1, sinon un 0 :

00
A PFPP
B PPFF

On compare les deux derniers symboles (PP) de la première séquence avec les deux premiers de la seconde (PP), etc. Nous obtenons finalement :

0011 = 3
A PFPP
B PPFF,

la suite de 0 et de 1 étant lue comme un entier en base 2. C'est la clef de **A** par rapport à **B** ; on la note Clef(**A**, **B**). Ici, Clef(**A**, **B**) = 3. Le rapport de la probabilité que **B** gagne sur la probabilité que **A** gagne est alors donné par :

[Clef(**A**, **A**) – Clef(**A**, **B**)]/[Clef(**B**, **B**) – Clef(**B**, **A**)].

L'application de l'algorithme de Conway donne :

0011 = 3	1001 = 9	0000 = 0	1000 = 8
A PFPP	**A** PFPP	**B** PPFF	**B** PPFF
B PPFF	**A** PFPP	**A** PFPP	**B** PPFF

Clef(**A**, **A**) – Clef(**A**, **B**)) = 6
Clef(**B**, **B**) – Clef(**B**, **A**)) = 8.

Ainsi, **B** = PPFF gagne six fois quand **A** = PFPP gagne huit fois. Autrement dit, la probabilité de gain de **A** contre **B** est : 8/(6 + 8) = 4/7

Autre exemple : **A** = PFP, **B** = PPF.

001 = 1	101 = 5	010 = 2	100 = 4
A PFP	**A** PFP	**B** PPF	**B** PPF
B PPF	**A** PFP	**A** PFP	**B** PPF

Clef(**A**, **A**) – Clef(**A**, **B**)) = 4
Clef(**B**, **B**) – Clef(**B**, **A**)) = 2.

Donc **B** = PPF gagne quatre fois quand **A** = PFP gagne deux fois. Dit autrement, la probabilité de gain de **A** contre **B** est : 2/(2 + 4) = 1/3.

Le fait que cet algorithme fonctionne correctement est bien sûr difficile à démontrer, mais cela a été fait de plusieurs manières.

Autre miracle de l'algorithme de Conway : le nombre 2 Clef(**A**, **A**) est le temps moyen d'attente de la séquence **A**. Cela permet de vérifier les résultats de l'encadré 1, qui indiquaient que le temps moyen d'attente de FF est 6 et que celui de PF est 4.

John Conway présentant un théorème de topologie.

Sous sa forme la plus générale, le problème n'a été résolu qu'en 2006 par Daniel Felix, de l'Université de Californie à San Diego. Cependant, la règle qu'il a trouvée (et qui vaut même si on remplace la pièce de monnaie par un dé à *k* faces) est trop complexe pour être décrite ici. Heureusement, la règle suivante, proposée par Mark Andrews en 2004, même si elle ne donne pas la meilleure probabilité de gain possible, marche très bien et s'applique de tête :

Face à une séquence S choisie par le premier joueur, prenez, pour le premier élément de votre séquence S', le deuxième élément de S en l'« inversant », puis faites suivre ce premier élément par la séquence S sans son dernier élément. Si par exemple votre adversaire choisit S = PPFPFPPF, vous repérez le deuxième élément de sa séquence, P, vous l'« inversez » et obtenez F, que vous faites suivre de la suite de l'adversaire sans le dernier F, ce qui vous donne S' = FPPFPFPP. L'algorithme de Conway indique que vous gagnerez alors avec une probabilité de 123/188=65,42, soit presque 2/3. Leonidas Guibas et Andrew Odlyzko ont établi que la meilleure façon de répliquer au choix du premier joueur ne peut être que la séquence donnée par la méthode de M. Andrews, ou la même séquence dont le premier symbole est inversé. De plus, quelle que soit la façon dont joue le premier joueur, pour toute séquence de longueur au moins trois, il existe une façon de lui répliquer qui donne au second joueur une probabilité de gagner supérieure à 9/14 = 0,6428.

Notre intuition des problèmes probabilistes est souvent dans l'erreur, car elle généralise de façon précipitée certaines règles habituellement valides, mais ayant des exceptions, comme celle indiquant que la force d'un joueur à un jeu est une propriété indépendante de l'adversaire. Notre intuition manque de finesse en confondant le gagnant d'une compétition entre deux séquences et la séquence ayant le plus court temps d'attente moyen. Le travail du mathématicien consiste alors à démêler la confusion qui résulte des fausses évidences du bon sens, et à montrer que là où l'on voyait un paradoxe ne règne en définitive qu'un peu de subtilité mathématique.

✔ BIBLIOGRAPHIE

E. Pegg, **How to Win at Coin Flipping**, novembre 2010 : http://blog.wolfram.com/2010/11/30/how-to-win-at-coin-flipping/

R. Nickerson et P. Ante, **Counterintuitive probabilities in coin tossing**, *The UMAP Journal*, vol. 28, pp. 523-532, 2007.

D. Felix, **Optimal Penney Ante strategy via correlation polynomial identities**, *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 13-1, R35, 2006.

M. W. Andrews, **Anyone for a nontransitive paradoxe ? The case of Penney Ante**, prépublication, 2004 (m.andrews@ucl.ac.uk).

S. Collings, **Coin sequence probabilities and paradoxes**, *Bull. of the Inst. of Math. and its Applic.*, vol. 18, pp. 227-232, 1982.

L. Guibas et A. Odlyzko, **String overlaps, pattern matching, and nontransitive games**, *Journal of Combinatorial Theory*, vol. A30-2, pp. 183-208, 1981.